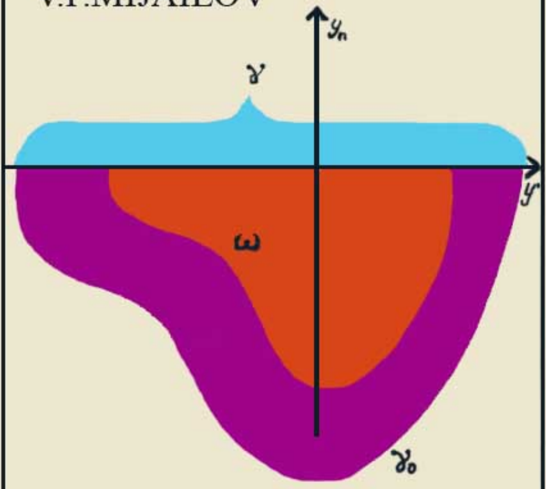
ECUACIONES DIFERENCIALES EN DERIVADAS PARCIALES

V.P. MIJÁILOV



EDITORIAL · MIR · MOSCÚ

ИЗДАТЕЛЬСТВО · МИР ·

В. П. МИХАЙЛОВ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА» МОСКВА

ECUACIONES DIFERENCIALES EN DERIVADAS PARCIALES

V. P. MIJAILOV

VERSION AL ESPAÑOL
POR K. P. MEDKOV

EDITORIAL · MIR · MOSCU

Franco Renato Campana Valderrama
U.P.R.P.

Impreso en la URSS. 1978

На испанском языке

INDICE

PREFACIO

La presente obra es una exposición ampliada del curso de conferencias dictadas por el autor durante varios años ante los estudiantes del Instituto físico-técnico de Moscú. Está destinada para los estudiantes que dominan las bases del Análisis matemático, Algebra y Teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias dentro de los límites del programa universitario. Toda la información indispensable está contenida, por ejemplo, en los libros siguientes: «Curso del Análisis matemático», vols. 1, 2, por *S. M. Nikólski*, «Fundamentos de Algebra lineal» por *A. I. Máltsev*, «Ecuaciones diferenciales corrientes» por *L. S. Pontryáguin*.

La disposición del material en el libro se arregla a los tipos principales de ecuaciones, a excepción del capítulo I en el que se consideran problemas generales de las ecuaciones en derivadas parciales. El papel central en el libro lo desempeña el capítulo IV, que es el más voluminoso, en el cual se estudian ecuaciones elípticas. En los capítulos V y VI se examinan ecuaciones hiperbólicas y parabólicas.

El método que emplea el autor para estudiar los problemas de contorno (y, en parte, el problema de Cauchy) se apoya en el concepto de la solución generalizada lo que permite abordar las ecuaciones con coeficientes variables de una manera tan sencilla como al operar con las ecuaciones más simples, a saber, las ecuaciones de Poisson, de onda y de conducción de calor. Analizando las cuestiones de existencia y unicidad de soluciones de los principales problemas de contorno, el autor dedica gran atención a los métodos aproximados para la resolución de los problemas citados: al método de Ritz en el caso de la ecuación elíptica y al de Galérkin, en el caso de ecuaciones hiperbólicas y parabólicas.

Los conocimientos necesarios sobre los espacios funcionales, en particular, el teorema de inmersión de S. L. Sóbolev, se dan en el capítulo III. No se suponía familiarizar al lector con los apartados correspondientes de la Teoría de funciones y del Análisis funcional; a estos problemas está dedicado el capítulo II de carácter auxiliar.

En cada capítulo, salvo en el II, se ofrecen problemas. Buena parte de éstos tiene por objeto profundizar y ampliar el contenido expuesto en el correspondiente capítulo; con el mismo fin se dan las listas de literatura adicional. Para los ejercicios se recomiendan:

«Problemas de las ecuaciones de física matemática» por V. S. Vladímirov, «Problemas de la física matemática» por B. M. Budak, A. A. Samarski, A. N. Tíjonov y «Problemas y ejercicios de la física matemática» por M. M. Smirnov.

En conclusión, el autor expresa su más profunda gratitud a V. S. Vladímirov que ha revelado enorme interés hacia este libro, y también a T. I. Zelenjak, I. A. Kiprijánov, S. L. Sóbolev que estudiaron el manuscrito y hicieron una serie de observaciones valiosas. Un agradecimiento especial el autor expresa a sus camaradas A. K. Guschin y L. A. Muravéji cuya cooperación fructífera contribuyó muchísimo a reforzar el carácter práctico de este libro.

Julio de 1975

V. Mijáilov

CAPITULO I. INTRODUCCION. CLASIFICACION DE ECUACIONES. PLANTEAMIENTO DE ALGUNOS PROBLEMAS

Introducción

Llamamos ecuaciones diferenciales aquellas cuyas incógnitas son funciones de una o varias variables, con la particularidad de que en dichas ecuaciones figuran no sólo las propias funciones sino también sus derivadas. Si las incógnitas son funciones de muchas variables (al menos dos), las ecuaciones se denominan *ecuaciones en derivadas parciales*. En lo sucesivo trataremos precisamente de ecuaciones de este tipo y vamos a considerar sólo una ecuación en derivadas parciales con una función incógnita.

Una ecuación en derivadas parciales de una función incógnita u de n variables $x_1, \ldots, x_n$ se denomina ecuación de *N-ésimo orden*, si contiene siquiera una derivada de orden N y no contiene derivadas de orden superior a N, es decir, la ecuación:

$$\Phi\left(x_1, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \ldots, \frac{\partial N_u}{\partial x_n^N}\right) = 0 \qquad (1)$$

La ecuación (1) se llama *lineal*, si Φ, siendo función de las variables u, $\frac{\partial u}{x_1}, \ldots, \frac{\partial^N u}{\partial x_n^N}$, es lineal. En lo sucesivo consideraremos una ecuación lineal de segundo orden, esto es, una ecuación de tipo

$$\sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + a(x)\, u = f(x); \qquad (2)$$

donde $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Las funciones $a_{ij}(x)$, $i, j = 1, \ldots, n$, $a_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$, $a(x)$ se denominan *coeficientes* de la ecuación (2), y la función $f(x)$, *término independiente*.

Designemos con R_n un espacio euclídeo n-dimensional y supongamos que $x = (x_1, \ldots, x_n)$ es un punto de R_n, $|x| = (x_1^2 + \ldots \ldots + x_n^2)^{1/2}$. Como siempre, por dominio en R_n o dominio n-dimensional entendemos un conjunto abierto y conexo (no vacío) de puntos pertenecientes a R_n. En lo sucesivo aceptaremos que dichos dominios son acotados, siempre que no se especifique lo contrario.

Sea Q un dominio n-dimensional. Un conjunto $E \subset Q$ se denomina *estrictamente interior* respecto de Q, $E \Subset Q$, si $\overline{E} \subset Q$, donde $\overline{E}$ es una adherencia*) (en el sentido de la distancia en R_n) del conjunto E.

Designemos con $C^k(Q)$ el conjunto de todas las funciones que tienen en Q derivadas parciales continuas de un orden hasta k inclusive (k es cierto número entero no negativo) y con $C^k(\overline{Q})$, el subconjunto de este conjunto compuesto por todas las funciones cuyas derivadas parciales hasta el k-ésimo orden son todas continuas en $\overline{Q}$. Para los conjuntos $C^0(Q)$ y $C^0(\overline{Q})$ de funciones continuas en Q y, conformemente, en $\overline{Q}$ emplearemos también las designaciones $C(Q)$ y $C(\overline{Q})$. El conjunto de todas las funciones que pertenecen a todos los $C^k(Q)$, $k = 0, 1, \ldots,$ lo designamos por $C^\infty(Q)$, es decir, $C^\infty(Q) = \bigcap\limits_{k=0}^{\infty} C^k(Q)$. El conjunto de todas las funciones pertenecientes a todos los $C^k(\overline{Q})$, $k = 0, 1, \ldots,$ lo designamos por $C^\infty(\overline{Q})$, es decir, $C^\infty(\overline{Q}) = \bigcap\limits_{k=0}^{\infty} C^k(\overline{Q})$.

La función $f(x)$ se llama *terminal* en Q, si existe un subdominio $Q' \Subset Q$ tal que $f(x) = 0$ en $Q \setminus Q'$. Designemos con $\dot{C}^k(\overline{Q})$ el conjunto de todas las funciones terminales de $C^k(Q)$ y con $\dot{C}^\infty(\overline{Q})$, la intersección $\bigcap\limits_{k=0}^{\infty} \dot{C}^k(\overline{Q})$ de todos estos conjuntos.

Sea $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ un vector de coordenadas enteras no negativas, y designemos por $|\alpha|$ la suma $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n$: $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$. Si la función $f(x) \in C^k(Q)$, entonces la derivada parcial $\dfrac{\partial^{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$ se designará con frecuencia, para abreviar, por el símbolo $D^\alpha f$. Para las derivadas de primero y segundo órdenes emplearemos también las designaciones f_{x_i}, $f_{x_i x_j}$. El gradiente $(f_{x_1}, \ldots, f_{x_n})$ de la función $f \in C^1(Q)$ será designado mediante $\nabla f(x)$.

Por superficie cerrada S de $(n-1)$ dimensiones entenderemos una superficie $(n-1)$-dimensional de la clase C^k (para cierto $k \geqslant 1$), acotada, cerrada y sin límites, esto es, una superficie conexa acotada y cerrada ($S = \overline{S}$) que pertenece a R_n y que posee la siguiente propiedad: para todo punto $x^0 \in S$ existen su entorno (n-dimensional) U_{x^0} y una función $F_{x^0}(x)$, que pertenece a $C^k(U_{x^0})$ y para la cual se cumple la desigualdad $\nabla F_{x^0}(x^0) \neq 0$, tales, que el conjunto $S \cap U_{x^0}$ se describe por la ecuación $F_{x^0}(x) = 0$, es decir, que todos los

*) A veces se emplea también el término «clausura» (N. del T.)

puntos del conjunto $S \cap U_{x^0}$ satisfacen la ecuación $F_{x^0}(x) = 0$ y cualquier punto en U_{x^0} pertenece a S, siempre que satisfaga la ecuación $F_{x^0}(x) = 0$.

El contorno del dominio Q lo designaremos con ∂Q. En adelante supondremos, siempre que no se diga lo contrario, que los contornos de los dominios en consideración están compuestos de un número finito de superficies cerradas (n — 1)-dimensionales (de la clase C^1) y que estas superficies no se intersecan. Mediante $|Q|$ designaremos el volumen de Q.

Observemos que si la superficie cerrada S de (n — 1) dimensiones pertenece a la clase C^k, para todo punto x^0 de S existe un entorno U'_{x^0} tan pequeño que la intersección $S \cap U'_{x^0}$ se proyecta unívocamente sobre cierto dominio D_{x^0} (n — 1)-dimensional, con el límite de la clase C^k, y este dominio se encuentra en uno de los planos de coordenadas, es decir, se decribe, para cierto i, $i = 1, \ldots, n$, por la ecuación $x_i = \varphi_{x^0}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$, $(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \in D_{x^0}$ y que, además, $\varphi_{x^0} \in C^k(\overline{D}_{x^0})$. La intersección $S \cap U'_{x^0}$ se llamará *trazo simple* (o *trazo*) de la superficie S.

Dado que S es acotada y cerrada, entonces del cubrimiento $\{U'_x, x \in S\}$ de la superficie S se puede elegir un subcubrimiento finito. Llamaremos *cubrimiento de la superficie S con trozos simples* la totalidad de trozos simples $S_1, \ldots, S_N$ que corresponden a tal cubrimiento finito.

Por superficie $(n - 1)$-dimensional S de clase C^k, $k \geqslant 1$, entenderemos una superficie conexa que puede ser cubierta con un número finito de dominios (n-dimensionales) U_i, $i = 1, \ldots, N$, de manera tal que cada uno de los conjuntos $S_i = S \cap U_i$, $i = 1, \ldots, N$, se proyecte unívocamente sobre cierto dominio $(n - 1)$-dimensional D_i con contorno de la clase C^k, encontrándose éste en uno de los planos de coordenadas, es decir, para cierto $p = p(i)$, $p = 1, \ldots, n$, se describe cada conjunto por la ecuación $x_p = \varphi_i(x_1, \ldots, x_{p-1}, x_{p+1}, \ldots, x_n)$, $(x_1, \ldots, x_{p-1}, x_{p+1}, \ldots) \in D_i$, y que, además, $\varphi_i \in C^k(\overline{D}_i)$. Llamaremos *cubrimiento de la superficie S con trozos simples* la totalidad de superficies S_i, o sea, de trozos simples de la superficie S que corresponden al cubrimiento $U_1, \ldots, U_N$ de ésta. En lo sucesivo por superficie de $(n - 1)$ dimensiones entenderemos una superficie $(n - 1)$-dimensional de la clase C^k para cierto $k \geqslant 1$.

Designemos con Q^δ, $\delta > 0$, la unión de bolas $\{|x - x^0| < \delta\}$ que es un dominio respecto a todos los $x^0 \in Q$; $Q^\delta = \bigcup\limits_{x^0 \in Q} \{|x - x^0| < \delta\}$; $Q \Subset Q^\delta$. Mediante Q_δ, $\delta > 0$, designaremos un conjunto constituido por todos aquellos puntos del dominio Q que distan del contorno ∂Q a una magnitud mayor que δ; $Q_\delta \Subset Q$; cuando $\delta > 0$ es suficientemente pequeño, Q_δ será un dominio. Vamos a mostrar que para cualquier $\delta > 0$, suficientemente pequeño, existe una función $\zeta_\delta(x)$, indefinidamente diferenciable en R_n, que es igual a 1 en Q_δ y a 0 fuera de $Q_{\delta/2}$. La función $\zeta_\delta(x)$ se llamará en adelante *función δ-cortante* (o, simplemente, *función cortante*) *para el dominio Q*. Antes de construir la función $\zeta_\delta(x)$, introduzcamos el importante concepto del núcleo de mediación.

Sea $\omega_1(t)$ la función de una variable $t\,(-\infty < t < +\infty)$. Supongamos que esta función es indefinidamente diferenciable, par, no negativa y que se anula cuando $|t| \geqslant 1$, además, para ella es válida la igualdad

$$\int\limits_{R_n} \omega_1(|x|)\,dx = \int\limits_{|x|<1} \omega_1(|x|)\,dx = 1. \tag{3}$$

A título de $\omega_1(t)$ se puede tomar, por ejemplo, la función

$$\omega_1(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{C_n} e^{-\frac{1}{1-t^2}}, & 0 \leqslant |t| < 1, \\ 0, & |t| \geqslant 1, \end{cases}$$

donde la constante C_n está elegida de tal manera que se cumpla la condición (3). Sea h número positivo arbitrario. La función

$$\omega_h(|x|) = \frac{1}{h^n}\,\omega_1(|x|/h)$$

lleva el nombre de *núcleo de mediación* (de radio h). Es evidente que el núcleo de mediación $\omega_h(|x|)$ posee las siguientes propiedades:

a) $\omega_h(|x|) \in C^\infty(R_n)$, $\omega_h(x) \geqslant 0$ en R_n,

b) $\omega_h(|x|) \equiv 0$ para $|x| \geqslant h$,

c) $\int\limits_{R_n} \omega_h(|x|)\,dx = 1$,

d) para cualquier $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $|\alpha| \geqslant 0$, y para todos los $x \in R_n$

$$|D^\alpha \omega_h(|x|) \leqslant C_\alpha / h^{n+|\alpha|},$$

donde C_α es cierta constante positiva que no depende de h.

Sea $\omega_h(|x|)$ un núcleo de mediación arbitrario. Se puede comprobar inmediatamente que, siendo $\delta > 0$ suficientemente pequeño, la función

$$\zeta_\delta(x) = \int\limits_{Q_{3\delta/4}} \omega_{\delta/4}(|x-y|)\,dy$$

es cortante para el dominio Q y en R_n satisface las desigualdades $0 \leqslant \zeta_\delta(x) \leqslant 1$.

§ 1. Problema de Cauchy. Teorema de Kovalevskaya

1. Planteamiento del problema de Cauchy. Examinemos en un dominio Q del espacio n-dimensional R_n (el dominio no tiene que ser obligatoriamente acotado, en particular, puede coincidir con todo el R_n) una ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$\mathcal{L}u \equiv \sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, u_{x_i} + a(x)\, u = f(x), \tag{1}$$

En este caso, consideraremos que los coeficientes y el término independiente son funciones de valores complejos suficientemente suaves. Designemos con $A(x)$ la matriz $\| a_{ij}(x) \|$, $i, j = 1, \ldots, n$, compuesta por los coeficientes de las derivadas de órdenes superiores; la matriz $A(x)$ es distinta de la matriz nula por todo Q.

En el caso de una sola variable espacial, $n = 1$, la ecuación (1) es una ecuación diferencial ordinaria y se la puede escribir ($a_{11} \neq 0$) en la forma

$$u'' + b(x)\, u' + c(x)\, u = g(x). \tag{2}$$

Entonces, el problema más sencillo es el de Cauchy que tiene por objeto hallar para esta ecuación una solución que para cierto $x = x^0$ satisfaga las condiciones iniciales $u(x^0) = u_0$, $u'(x^0) = u_1$.

Veamos cómo se puede plantear un problema análogo para la ecuación en derivadas parciales (1). Tomemos en Q una superficie $(n-1)$-dimensional S suficientemente suave (de la clase C^2), prefijada por la ecuación

$$F(x) = 0, \tag{3}$$

donde $F(x)$ es una función de valores reales, y supongamos que $|\nabla F| \neq 0$ para todos los $x \in S$.

Sea dado en Q tal campo vectorial $l(x) = (l_1(x), \ldots, l_n(x))$, donde $l_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$, son funciones de valores reales pertenecientes a $C^1(Q)$, $|l^2| = l_1^2 + \ldots + l_n^2 > 0$, que para todos los $x \in S$ el vector $l(x)$ no haga contacto con la superficie S, es decir,

$$\left.\frac{\partial F}{\partial l}\right|_S = \left.\frac{(l, \nabla F)}{|l|}\right|_S \neq 0.$$

(En lo sucesivo sólo nos interesarán los valores del campo $l(x)$ en la superficie S).

Tomemos un punto arbitrario $x^0 \in S$ y examinemos la ecuación (1) en un entorno suficientemente pequeño U de este punto (supongamos que U es una bola de radio suficientemente pequeño y con centro en el punto x^0). Designaremos con S_0 la intersección $S \cap U$.

Sea dada en U una solución u, $u \in C^2(U)$, de la ecuación (1), y supongamos que $u_0(x)$ es un valor de la función u en S_0, y $u_1(x)$, el valor de la derivada $\frac{\partial u}{\partial l}$ en S_0:

$$u\,|_{S_0} = u_0(x), \tag{4}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{S_0} = u_1(x). \tag{5}$$

Mostremos que para una ecuación en derivadas parciales, a diferencia de una ecuación ordinaria, u_0 y u_1 no pueden ser, en caso general, funciones arbitrarias (suaves).

Como $\nabla F(x^0) \neq 0$, una de las coordenadas del vector $\nabla F(x^0)$ es distinta de cero; sea, por ejemplo, $F_{x_n}(x^0) \neq 0$. Consideramos que el entorno U es tan pequeño que en él $F_{x_n}(x) \neq 0$ y la ecuación (3) puede escribirse en la forma

$$x_n = \varphi(x'),\ x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$$

con una función suave $\varphi(x')$. Designemos con $F_n(x)$ la función $F(x)$ y con $F_i(x)$, las funciones $x_i - x_i^0$, $i = 1, \ldots, n-1$, y examinemos una aplicación biunívoca

$$y_i = F_i(x),\ i = 1, \ldots, n, \tag{6}$$

del dominio U en cierto entorno V del origen de coordenadas, es decir, de la imagen del punto x^0. Designemos con el símbolo $\sum$ la imagen de la superficie S_0 que se encuentra en el plano $y_n = 0$:

$$\textstyle\sum = V \cap \{y' = (y_1, \ldots, y_{n-1}) \in R_{n-1},\ y_n = 0\}.$$

Designaremos por $v(y)$ la función $u(x(y))$. Dado que $u_{x_i} = \sum_{p=1}^{n} v_{y_p} F_{px_i}$, mientras que $u_{x_i x_j} = \sum_{p,\,q=1}^{n} v_{y_p y_q} F_{px_i} \cdot F_{qx_j} + \sum_{p=1}^{n} v_{y_p} F_{px_i x_j}$, entonces la ecuación (1) en las nuevas variables adquiere la forma

$$\sum_{i,\,j=1}^{n} \beta_{ij}(y)\, v_{y_i y_j} + \sum_{i=1}^{n} \beta_i(y)\, v_{y_i} + \beta(y)\, v = f_1(y), \tag{1'}$$

donde $\beta_{ij}(y)$ son elementos de la matriz cuadrada $\|(A(x(y)) \times \nabla F_i(x(y)),\ \nabla F_j(x(y)))\|$, en particular,

$$\beta_{nn}(y(x)) = (A(x)\,\nabla F(x),\ \ \nabla F(x)). \tag{7}$$

Las condiciones (4) y (5) toman, respectivamente, la forma

$$v\,|_{\sum} = v_0(y') \tag{8}$$

y

$$(\nabla_y v,\ \lambda(y))|_{\Sigma} = v_1'(y'), \tag{5'}$$

donde $v_0(y') = u_0(y', \varphi(y'))$, $v_1'(y') = u_1(y', \varphi(y'))$, mientras que el vector $\lambda(y(x)) = \left(\frac{\partial F_1}{\partial l}, \ldots, \frac{\partial F_n}{\partial l}\right)$, $x \in S_0$, además, en S_0 se tiene

$$\frac{\partial F_n}{\partial l} = \frac{\partial F}{\partial l} \neq 0.$$

Ante todo mostremos que el valor del vector ∇v en la superficie Σ se determina unívocamente mediante las funciones v_0 y v_1'. Efectivamente, las derivadas $v_{y_i}|_{\Sigma}$, $i = 1, \ldots, n-1$, se calculan de (8): $v_{y_i}|_{\Sigma} = v_{0y_i}$, $i = 1, \ldots, n-1$, y en virtud de (5') se tiene

$$v_{y_n}|_{\Sigma} = v_1(y'), \tag{9}$$

donde $v_1(y') = \frac{1}{\frac{\partial F}{\partial l}}\left(v_1'(y') - \sum_{i=1}^{n-1} v_{0y_i}\frac{\partial F_i}{\partial l}\right)$.

Es evidente que las condiciones (8), (5') y las (8), (9) son equivalentes.

Examinemos ahora los valores que toman en Σ las segundas derivadas de la función $v(y)$. Señalemos primeramente que en virtud de las igualdades (8) y (9), los valores que toman en Σ todas las segundas derivadas de la función $v(y)$, a excepción de la derivada $v_{y_n y_n}$, se determinan unívocamente mediante las funciones v_0 y v_1. Para determinar el valor que toma sobre Σ la derivada $v_{y_n y_n}$, emplearemos la ecuación (1'). Partiendo de (1') y teniendo en cuenta (7), obtenemos:

$$(A(x(y))\nabla_x F(x(y)),\ \nabla_x F(x(y)))\, v_{y_n y_n} =$$
$$= f_1(y) - \sum_{i,j=1}^{n-1} \beta_{ij} v_{y_i y_j} - \sum_{i=1}^{n-1} \beta_{in} v_{y_i y_n} - \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_{y_i} - \beta v. \tag{1''}$$

Si en la superficie S_0 la función $(A(x)\nabla F,\ \nabla F) \neq 0$, entonces la función $(A(x(y))\nabla_x F(x(y)),\ \nabla_x F(x(y)))$ será distinta de cero en Σ, y, por consiguiente en V (consideramos que el entorno U es suficientemente pequeño). La ecuación (1'') en V se escribirá en este caso así:

$$v_{y_n y_n} = \sum_{i,j=1}^{n-1} \gamma_{ij} v_{y_i y_j} + \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_{in} v_{y_i y_n} + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i v_{y_i} + \gamma v + h. \tag{10}$$

Haciendo en (10) $y_n = 0$, obtendremos el valor que la derivada $v_{y_n y_n}$ toma sobre $\sum$.

Así pues, si $(A(x)\nabla F, \nabla F) \neq 0$ sobre S_0, en dicha superficie se determinan unívocamente todas las derivadas de la función $u(x)$ hasta el segundo orden inclusive.

Si en cambio en algún punto $\tilde{x} \in S_0$ $(A(\tilde{x})\nabla F(\tilde{x}), \nabla F(\tilde{x})) = 0$, entonces en el correspondiente punto $\tilde{y}$ tenemos: $(A(x(\tilde{y}))\nabla_x F(x(\tilde{y})), \nabla_x F(x(\tilde{y}))) = 0$. En este caso la igualdad (1") en el punto $\tilde{y}$ es la que vincula los valores ya determinados de $v(\tilde{y})$, $v_{y_i}(\tilde{y})$, $v_{y_i y_j}(\tilde{y})$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, n-1$. De este modo, los valores que toman en el punto $\tilde{y}$ la función v_0 y sus derivadas hasta el segundo orden, así como también los de la función v_1 y de sus derivadas de primer orden y, por consiguiente, los valores en el punto $\tilde{x}$ de las funciones u_0 y u_1, y de las correspondientes derivadas de éstas, están entrelazados mediante cierta correlación, es decir, no pueden ser, en el caso general, arbitrarios.

El punto x de la superficie S de la clase C^1, dada por la ecuación $F = 0$ (F es una función de valores reales, $\nabla F \neq 0$ en S), se llama *punto característico* para la ecuación (1), si en él

$$(A(x)\nabla F(x), \nabla F(x)) = 0.$$

La superficie S se llama *característica* para la ecuación (1), si todos sus puntos son característicos.

En este párrafo estudiaremos el problema de Cauchy para la ecuación (1), es decir, el problema en que se busca una solución de dicha ecuación que satisfaga las condiciones (4) y (5) con ciertas funciones dadas u_0 y u_1, cuando la superficie S está privada de puntos característicos.

El caso en que la superficie S contiene puntos característicos es mucho más complicado. Ya fue mostrado que si el punto $x^0 \in S$ es característico, existen las funciones (suaves) u_0 y u_1, tales que en ningún entorno de este punto no existe solución (de $C^2(U)$) suave de la ecuación (1) que en la superficie $S_0 = S \cap U$ satisfaga las condiciones (4) y (5). Es fácil convencerse de que siendo U^+ una de las partes en las que S_0 divide U (consideramos que el entorno U es una bola de radio suficientemente pequeño y con centro en x^0), en $C^2(U^+ \cup S_0)$ tampoco existe solución que satisfaga las condiciones (4) y (5) en la superficie S_0. Si, no obstante, la solución suave existe, ésta puede ser no una única.

Sea, por ejemplo, $n = 2$. En un círculo U con el centro en el origen de coordenadas examinemos la ecuación

$$u_{x_1 x_2} = f(x),$$

para la cual la recta $x_2 = 0$ es característica (a este tipo de ecuaciones puede reducirse, al cambiar las variables independientes, la así llamada ecuación de onda $u_{x_1x_1} - u_{x_2x_2} = f_1$). Es fácil comprobar que para la existencia en U (de $C^2(U)$) de una solución suave de dicha ecuación que satisfaga las condiciones $u\,|_{x_2=0} = u_0(x_1)$, $u_{x_2}\,|_{x_2=0} = u_1(x_1)$, es necesario y suficiente que se cumpla la condición $\frac{du_1(x_1)}{dx_1} = f(x_1, 0)$. Además, si esta condición está cumplida, la solución se representa en la forma

$$u(x_1, x_2) = \int_0^{x_1} d\xi_1 \int_0^{x_2} f(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_2 + u_0(x_1) + g(x_2),$$

donde g es una función arbitraria, diferenciable continuamente dos veces, que satisface las condiciones $g(0) = 0$, $\frac{dg(0)}{dx_2} = u_1(0)$.

Si la superficie S es característica, pueden surgir tales circunstancias cuando el problema para la ecuación (1) debe plantearse por analogía con el de Cauchy para una ecuación ordinaria no de segundo orden, sino de primer orden. Así, por ejemplo, en el capítulo VI estudiaremos un problema (problema de Cauchy) relacionado con la ecuación (sea, como antes, $n = 2$) de conducción de calor

$$u_{x_1x_1} - u_{x_2} = f(x)$$

para la cual la recta $x_2 = 0$ es característica. El problema citado consiste en la búsqueda de la solución de la ecuación en el semiplano $x_2 > 0$, que satisfaga sólo la condición (4): $u\,|_{x_2=0} = u_0(x_1)$.

Pasemos ahora al estudio del problema (1), (4), (5) para el caso en que la superficie S está privada de puntos característicos. Sean Q un dominio n-dimensional y S una superficie $(n-1)$-dimensional que se encuentra en Q y, siendo definida por la ecuación (3), divide Q en dos dominios disjuntos Q^+ y Q^-, es decir, $Q \setminus S = Q^+ \cup Q^-$, $Q^+ \cap Q^- = \varnothing$. Supongamos que en el dominio Q está definida la ecuación (1) (es decir, en Q se conocen los coeficientes y el término independiente de la ecuación (1)), en la superficie S están dadas dos funciones, $u_0(x)$ y $u_1(x)$, y un campo vectorial $l(x) = (l_1(x), \ldots, l_n(x))$, $|l(x)| > 0$ en S, que no tiene ningún punto común con la superficie S. Partimos de la suposición de que S no tiene los puntos característicos de la ecuación (1), es decir,

$$(A(x)\nabla F, \Delta F) \neq 0 \text{ en } S. \tag{11}$$

Hemos de hallar la función $u(x)$ que pertenece a $C^2(Q)$ y satisface la ecuación (1) en Q y las condiciones iniciales (4) y (5) sobre S. Llamaremos esta operación problema de Cauchy no característico. Las funciones dadas, es decir, coeficientes y el término independiente de la ecuación (1), la función F de (3), la función-vector l y las funciones u_0 y u_1 se denominan datos del problema.

Supongamos que los datos del problema (1), (4), (5) son indefinidamente diferenciables: los coeficientes y el término independiente de la ecuación (1), así como también la función $F(x)$ de (3), pertenecen a $C^\infty(\bar{Q})$, mientras que las funciones $l_1(x), \ldots, l_n(x), u_0(x)$ $u_1(x)$ pertenecen a $C^\infty(\bar{S})$ (es decir, las funciones $l_1(x(y)), \ldots$ $\ldots, u_1(x(y))$, en las que $x = x(y)$ es una aplicación, dada por la fórmula (6), de cierto entorno U de un punto arbitrario $x^0 \in S$ en el entorno V del origen de coordenadas, son indefinidamente diferenciables en el dominio $(n-1)$-dimensional $\sum = V \cap \{y' \in R_{n-1}, y_n = 0\}$). Supongamos, además, que en Q existe una solución indefinidamente diferenciable $u(x)$ del problema (1), (4), (5).

Como se ha señalado más arriba, sobre la superficie S se determinan unívocamente, en términos de los datos del problema, todas las derivadas de la solución $u(x)$ hasta el segundo orden inclusive. Demostremos ahora que en dicha superficie se determinan unívocamente, también en términos de los datos del problema, todas las derivadas de cualquier orden de la función $u(x)$. Ya que en el caso que se considera la aplicación (6) del entorno U del punto arbitrario $x^0 \in S$ en el entorno V del origen de coordenadas se define con las funciones $F_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$, indefinidamente diferenciables en $\bar{U}$, entonces como resultado de la aplicación (6) el problema (1), (4), (5) (lo que se entiende como la búsqueda de una solución de la ecuación (1) en el dominio U, que satisfaga los datos iniciales $u|_{S_0} = u_0(x)$, $\frac{\partial u}{\partial l}|_{S_0} = u_1(x)$, donde $S_0 = U \cap S$) en el dominio U se sustituya por el problema equivalente (8)—(10) para la función $v(y)$ en el dominio V con los datos indefinidamente diferenciables. Ya que en U existe la solución indefinidamente diferenciable $u(x)$ del problema (1), (4), (5), el problema (8)—(10) en V también tiene en éste una solución $v(y) = u(x(y))$, indefinidamente diferenciable. Para demostrar esta afirmación basta establecer que todas las derivadas $D_y^\alpha v(y)$ en $\sum$ se determinan unívocamente en términos de los datos del problema (8)—(10).

Para cualesquiera $\alpha' = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$, $|\alpha'| \geqslant 0$, los valores de las derivadas $D^{(\alpha', 0)}v(y)$ y $D^{(\alpha', 1)}v(y)$ en la superficie $\sum$ se determinan inmediatamente de las condiciones (8) y (9):

$$D^{(\alpha', 0)}v|_{\sum} = D^{\alpha'}v_0, \qquad D^{(\alpha', 1)}v|_{\sum} = D^{\alpha'}v_1.$$

Designemos por v_α el valor que toma la función $\frac{1}{\alpha!}D^\alpha v$ ($\alpha! = \alpha_1! \ldots \alpha_n!$) en el origen de coordenadas:

$$v_\alpha = \frac{1}{\alpha!}D^\alpha v(0), \quad |\alpha| \geqslant 0. \tag{12}$$

En este caso, $v_{\alpha',0}$ y $v_{\alpha',1}$, $|\alpha'|\geqslant 0$, quedan unívocamente determinadas en términos de las funciones v_0 y v_1:

$$v_{\alpha',0}=\frac{1}{(\alpha')!}D^{\alpha'}v_0|_{y'=0}, \tag{13}$$

$$v_{\alpha',1}=\frac{1}{(\alpha')!}D^{\alpha'}v_1|_{y'=0} \tag{14}$$

$((\alpha')!=\alpha_1!\ \ldots\ \alpha_{n-1}!)$

Para determinar en $\sum$ la derivada $D^{(\alpha',2)}v(y)$, $|\alpha'|\geqslant 0$, emplearemos la ecuación (10). Derivando (10) respecto a $y_1, \ldots, y_{n-1}$, y haciendo $y_n=0$, obtenemos

$$D^{(\alpha',2)}v|_{\Sigma}=D^{(\alpha',0)}H_1|_{\Sigma},\quad |\alpha'|\geqslant 0,$$

donde la función $H_1(y)$ se define en V por la fórmula

$$H_1(y)=\sum_{i,j=1}^{n-1}\gamma_{ij}(y)v_{y_iy_j}+\sum_{i=1}^{n-1}\gamma_{in}(y)v_{y_iy_n}+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\gamma_i(y)v_{y_i}+\gamma(y)v+h(y)$$

(en la cual a título de $v(y)$ figura la solución del problema (8)—(10)). La función $D^{(\alpha',0)}H_1|_\Sigma$ es una función (lineal, con coeficientes conocidos) de las magnitudes $D^{(\beta',0)}v|_\Sigma$ y $D^{(\gamma',1)}v|_\Sigma$ ya determinadas para $0\leqslant|\beta'|\leqslant|\alpha'|+2, 0\leqslant|\gamma'|\leqslant|\alpha'|+1$. Por eso, todas las derivadas $D^{(\alpha',2)}v(y)$, $|\alpha'|\geqslant 0$, están determinadas en $\sum$ unívocamente en términos de los datos del problema y, en particular,

$$v_{\alpha',2}=(2!\,(\alpha')!)^{-1}D^{(\alpha',0)}H_1(y)|_{y_n=0},\quad |\alpha'|\geqslant 0.$$

Supongamos que para cierto $k\geqslant 2$ en $\sum$ ya están unívocamente determinadas, según los datos del problema, todas las derivadas $D^{(\alpha',k-1)}v(y)$, $|\alpha'|\geqslant 0$. Hallemos la derivada $D^{(\alpha',k)}v(y)|_\Sigma$, $|\alpha'|\geqslant 0$. Para ello derivemos en V la ecuación (10) α_1 veces respecto a $y_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ veces respecto a y_{n-1}, y $k-2$ veces respecto a y_n, y luego hagamos $y_n=0$.

Como resultado obtendremos

$$D^{(\alpha',k)}v(y)|_{\Sigma}=D^{(\alpha',k-2)}H_1(y)|_{\Sigma}.$$

Aquí, $D^{(\alpha',k-2)}H_1|_\Sigma$ es una función (lineal, con coeficientes conocidos) respecto de las magnitudes ya determinadas $D^{(\beta',i)}v|_\Sigma$, $0\leqslant i\leqslant k-1$ $(0\leqslant|\beta'|\leqslant|\alpha'|+2$ para $0\leqslant i\leqslant k-2$ y $0\leqslant|\beta'|\leqslant|\alpha'|+1$, para $i=k-1)$. Por eso, sobre $\sum$ se determinan unívocamente, en terminos de los datos del problema, todas las derivadas $D^{(\alpha', k)}v$, $|\alpha'| \geqslant 0$, en particular,

$$v_{\alpha', k} = ((\alpha')!\, k!)^{-1} D^{(\alpha', k-2)} H_1(y)|_{y=0}. \tag{15}$$

La afirmación queda demostrada.

Observación. Sea $v(y)$ una función arbitraria indefinidamente diferenciable en el dominio V. Examinemos la siguiente función indefinidamente diferenciable en V:

$$H(y) \equiv v_{y_n y_n} - \sum_{i,\, j=1}^{n-1} \gamma_{ij} v_{y_i y_j} - \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_{in} v_{y_i y_n} - \sum_{i=1}^{n} \gamma_i v_{y_i} - \gamma v - h. \tag{16}$$

De los razonamientos arriba empleados se desprende que si los valores de la función $v(y)$ y de todas sus derivadas satisfacen las condiciones (12), en las que los números v_α, $|\alpha| \geqslant 0$, están definidos por las igualdades (13)—(15), entonces

$$D^\alpha H(y)|_{y=0} = 0 \text{ para todo } \alpha,\ |\alpha| \geqslant 0. \tag{17}$$

Así pues, hemos mostrado que si la superficie S está privada de puntos característicos, los datos del problema definen unívocamente en S todas las derivadas de la solución indefinidamente diferenciable del problema (1), (4), (5). Por consiguiente, en la clase de funciones, definidas unívocamente por sus valores y por los valores de todas sus derivadas en S, el problema (1), (4), (5) tiene una única solución. Una de tales clases es la de funciones analíticas. Más abajo en este párrafo será mostrado que en la clase de funciones analíticas el problema (1), (4), (5) con datos analíticos es resoluble.

Observemos que a diferencia de una ecuación ordinaria, la condición de que en esta situación tan general los datos del problema sean analíticos (si no se impone a los coeficientes de la ecuación (1) limitaciones adicionales) es en cierto sentido necesaria para que el problema pueda ser resuelto. En determinadas condiciones una ecuación en derivadas parciales con coeficientes indefinidamente diferenciables y un término independiente puede, en general, no tener soluciones. He aquí un ejemplo, proporcionado por G. Levi, que demuestra esta afirmación.

Ejemplo 1. La ecuación diferencial

$$u_{x_1 x_3} + i u_{x_2 x_3} + 2i(x_1 + i x_2) u_{x_3 x_3} = f(x_3) \tag{18}$$

no tiene soluciones, que puedan diferenciarse continuamente dos veces, en ningún entorno del origen de coordenadas (del espacio R_3), si la función de valores reales $f(x_3)$ no es analítica.

Para demostrar esta afirmación basta, evidentemente, comprobar que la ecuación

$$u_{x_1} + i u_{x_2} + 2i(x_1 + i x_2) u_{x_3} = f(x_3) \tag{19}$$

no tiene soluciones diferenciables continuamente en ningún entorno del origen de coordenadas.

Supongamos, al contrario, que para algunos $R > 0$ y $H > 0$ en el cilindro $Q = \{x_1^2 + x_2^2 < R^2, \ |x_3| < H\}$ existe una solución $u(x)$ de la ecuación (19) con la función $f(x_3)$ de valores reales no analítica en el intervalo $|x_3| < H$ y que esta solución pertenece a $C^1(\overline{Q})$. Entonces, la función $u_1(\rho, \varphi, x_3) = u(\rho \cos\varphi, \rho \operatorname{sen}\varphi, x_3)$ en el paralelepípedo $\Pi = \{0 < \rho < R, \ 0 < \varphi < 2\pi, \ |x_3| < H\}$ será la solución de la ecuación

$$u_{1\rho}e^{i\varphi} + i\frac{u_{1\varphi}}{\rho}e^{i\varphi} + 2i\rho e^{i\varphi}u_{1x_3} = f(x_3),$$

siendo $u_1 \in C^1(\overline{\Pi})$ y $u_1(\rho, 0, x_3) \equiv u_1(\rho, 2\pi, x_3)$. Integrando esta igualdad (con ρ y x_3 fijados) respecto a $\varphi \in (0, 2\pi)$, llegamos a la conclusión de que en el rectángulo $K_1 = \{0 < \rho < R, \ |x_3| < H\}$ la función

$$u_2(\rho, x_3) = \int_0^{2\pi} u_1(\rho, \varphi, x_3)\, e^{i\varphi}\, d\varphi$$

$u_2(\rho, x_3) \in C^1(\overline{K}_1)$, satisface la ecuación

$$u_{2\rho} + \frac{u_2}{\rho} + 2i\rho u_{2x_3} = 2\pi f(x_3).$$

Por eso, la función

$v(r, x_3) = \sqrt{r}\, u_2(\sqrt{r}, x_3)$, perteneciente a $C^1(K_2) \cap C(\overline{K}_2)$, donde K_2 es el rectángulo $\{0 < r < R^2, \ |x_3| < H\}$, será en K_2 la solución de la ecuación

$$v_r + iv_{x_3} = \pi f(x_3),$$

o, lo que es lo mismo, de la ecuación

$$\left(v(r, x_3) + i\pi \int_0^{x_3} f(\xi)\, d\xi\right)_r + i\left(v(r, x_3) + i\pi \int_0^{x_3} f(\xi)\, d\xi\right)_{x_3} = 0.$$

Mas, la última ecuación es la condición de Cauchy—Riemann para la función

$$w(r, x_3) = v(r, x_3) + i\pi \int_0^{x_3} f(\xi)\, d\xi.$$

Por consiguiente, la función $w(r, x_3)$ es analítica en K_2 y en $\overline{K}_2$ es la función continua de la variable compleja $r + ix_3$, $w(r, x_3) = g(r + ix_3)$. Como $\operatorname{Re} g\,|_{r=0} = 0$, resulta, de acuerdo con el principio de simetría, que la función $g(r+ix_3)$ admite una prolongación analítica al rectángulo $K_3=\{|r|<R^2,\ |x_3|<H\}$, y, en particular, en el segmento $\{r=0,\ |x_3|<H\}$ es una función analítica respecto de x_3. Pero, $g|_{r=0}=i\pi\int_0^{x_3} f(\xi)\,d\xi$ por lo que la función $f(x_3)$ también es analítica para $|x_3|<H$, lo que contradice a la suposición.

Observemos que el plano $x_1=0$, por ejemplo, no contiene puntos característicos para la ecuación (18). De este modo, cualesquiera que sean las funciones iniciales, el problema de Cauchy para la ecuación (18) (con datos iniciales dados en el plano $x_1=0$) no tiene soluciones en ningún entorno que contenga el origen de coordenadas.

2. **Funciones analíticas de varias variables.** Sean Q un dominio n-dimensional del espacio R_n, y $g(x)$, una función de valores complejos definida en Q.

La función $g(x)$ se llama *analítica en el punto* $x^0\in Q$, si en cierto entorno U de este punto se representa por una serie de potencias absolutamente convergente

$$g(x)=\sum_{\alpha_1=0}^{\infty}\sum_{\alpha_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{\alpha_n=0}^{\infty} g_{\alpha_1\ldots\alpha_n}(x_1-x_1^0)^{\alpha_1}\ldots(x_n-x_n^0)^{\alpha_n}=$$
$$=\sum_{\alpha} g_\alpha(x-x^0)^\alpha, \qquad (20)$$

donde $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, $(x-x^0)^\alpha=(x_1-x_1^0)^{\alpha_1}\ldots(x_n-x_n^0)^{\alpha_n}$.

La función $g(x)$ se denomina *analítica en un dominio*, si es analítica en cada uno de sus puntos.

Supongamos que la función $g(x)$ es analítica en el punto $x^0\in Q$. Entonces, en el cubo $K_R(x^0)=\{|x_i-x_i^0|<R,\ i=1,\ldots,n\}$ se representará, para cierto $R>0$, por la serie (20) absolutamente convergente (en $K_R(x^0)$). Ya que una serie de potencias absolutamente convergente en $K_R(x^0)$ converge uniformemente, junto con todas las derivadas, en cualquier subdominio estrictamente interior K del cubo $K_R(x^0)$, $K\Subset K_R(x^0)$, $g(x)\in C^\infty(\overline{K})$ y, por consiguiente, $g(x)\in C^\infty(K_R(x^0))$. Además, es obvio que $g_\alpha=\frac{1}{\alpha!}D^\alpha g(x^0)$, donde $\alpha!=\alpha_1!\ldots\alpha_n!$, esto es, la serie (20) es la de Taylor de la función $g(x)$ en el punto x^0. De aquí se despende que una función analítica en el dominio Q se define unívocamente en todo el dominio Q mediante su propio valor y los valores de todas sus derivadas en un punto arbitrario de Q, en particular, si en algún punto de Q ella se anula junto con todas sus derivadas, entonces $g(x)\equiv 0$ en Q.

Mostremos que si *la función* $g(x)$ *es analítica en el punto* $x^0\in Q$, *será también analítica en cierto entorno de este punto.* Para ello es suficiente demostrar que si $K_R(x^0)$ es un cubo en el que la función $g(x)$ está representada por la serie (20) (absolutamente convergente), entonces $g(x)$ es analítica en el cubo $K_{R/4}(x^0)$.

De la convergencia absoluta en $K_R(x^0)$ de la serie (20) se deduce que para todo $\rho \in (0, R)$

$$\sum_\alpha |g_\alpha| \rho^{|\alpha|} < \infty. \tag{21}$$

Tomemos un punto arbitrario $x^1 \in K_{R/4}(x^0)$. Entonces, para todo $x \in K_{R/8}(x^1)$ tenemos

$$g(x) = \sum_\alpha g_\alpha \Big(\sum_{p_1=0}^{\alpha_1} C_{\alpha_1}^{p_1} (x_1 - x_1^1)^{p_1} (x_1^1 - x_1^0)^{\alpha_1 - p_1} \times \dots$$

$$\dots \times \Big(\sum_{p_n=0}^{\alpha_n} C_{\alpha_n}^{p_n} (x_n - x_n^1)^{p_n} (x_n^1 - x_n^0)^{\alpha_n - p_n} \Big) =$$

$$= \sum_\alpha \sum_{p_1=0}^{\alpha_1} \dots \sum_{p_n=0}^{\alpha_n} g_\alpha C_{\alpha_1}^{p_1} \dots C_{\alpha_n}^{p_n} \times$$

$$\times (x_1 - x_1^1)^{p_1} \dots (x_n - x_n^1)^{p_n} (x_1^1 - x_1^0)^{\alpha_1 - p_1} \dots (x_n^1 - x_n^0)^{\alpha_n - p_n}.$$

Ya que en todo $x \in K_{R/8}(x^1)$, para cualesquiera $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $p = (p_1, \dots, p_n)$, $p_i \leqslant \alpha_i$, $i = 1, \dots, n$, se tiene:

$$|g_\alpha C_{\alpha_1}^{p_1} \dots C_{\alpha_n}^{p_n} (x_1 - x_1^1)^{p_1} \dots (x_n^1 - x_n^0)^{\alpha_n - p_n}| \leqslant$$

$$\leqslant |g_\alpha| 2^{|\alpha|} \left(\frac{R}{8}\right)^{|p|} \left(\frac{R}{4}\right)^{|\alpha| - |p|} = |g_\alpha| \left(\frac{R}{2}\right)^{|\alpha|} \frac{1}{2^{|p|}}$$

y como, en virtud de (21), la serie

$$\sum_\alpha \sum_p |g_\alpha| \left(\frac{R}{2}\right)^{|\alpha|} \frac{1}{2^{|p|}} = 2^n \sum_\alpha |g_\alpha| \left(\frac{R}{2}\right)^{|\alpha|} < \infty,$$

la función $g(x)$ se representa en $K_{R/8}(x^1)$ por una serie absolutamente convergente

$$g(x) = \sum_p g'_p (x - x^1)^p,$$

donde

$$g'_p = \sum_{\alpha_1 = p_1}^{\infty} \dots \sum_{\alpha_n = p_n}^{\infty} g_\alpha C_{\alpha_1}^{p_1} (x_1^1 - x_1^0)^{\alpha_1 - p_1} \dots C_{\alpha_n}^{p_n} (x_n^1 - x_n^0)^{\alpha_n - p_n}.$$

Por consiguiente, la función $g(x)$ es analítica en el punto x^1 y, por lo tanto, debido a la arbitrariedad de $x^1 \in K_{R/4}(x^0)$, en $K_{R/4}(x^0)$. La afirmación queda demostrada.

Una función de valores reales $g(x) = \sum\limits_{\alpha} \tilde{g}_\alpha (x - x^0)^\alpha$, analítica en el punto x^0, se llama *mayorante* de la función $g(x)$ (de 18)) en el punto x^0, si para todos los α, $|\alpha| \geqslant 0$, $|g_\alpha| \leqslant \tilde{g}_\alpha$.

Sea $\{g_\alpha, |\alpha| \geqslant 0\}$ una sucesión numérica compleja para la cual existe una sucesión numérica real $\{\tilde{g}_\alpha, |\alpha| \geqslant 0\}$ tal que para cualquier α, $|\alpha| \geqslant 0$, tenemos $|g_\alpha| \leqslant \tilde{g}_\alpha$ y la serie $\sum\limits_{\alpha} \tilde{g}_\alpha (x - x^0)^\alpha$ es absolutamente convergente en cierto entorno del punto x^0. Es evidente que en este caso la función $g(x) = \sum\limits_{\alpha} g_\alpha (x - x^0)^\alpha$ es analítica en el punto x^0 y la función $\tilde{g}(x) = \sum\limits_{\alpha} \tilde{g}_\alpha (x - x^0)^\alpha$ será su mayorante en el punto x^0.

Es también obvio que cualquier función analítica en el punto x^0 tiene en este punto su mayorante. A título de mayorante de la función $g(x)$ de (20) se puede tomar, por ejemplo, la función $\sum\limits_{\alpha} |g_\alpha| (x - x^0)^\alpha$. La mayorante de la función $g(x)$ de (20) puede también construirse de la manera siguiente. Supongamos que para cierto $R > 0$ la serie (20) converge absolutamente en el cubo $K_R(x^0)$. Tomemos algún ρ en el intervalo $(0, R)$. En virtud de (21), existe tal M positivo que $|g_\alpha| \cdot \rho^{|\alpha|} \leqslant M$, es decir, $|g_\alpha| \leqslant M/\rho^{|\alpha|}$ para todo $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Esto significa que en el punto x^0 la función $\tilde{g}(x) = \sum\limits_{\alpha} \frac{M(x - x^0)^\alpha}{\rho^{|\alpha|}} = \frac{M}{\left(1 - \frac{x_1 - x_1^0}{\rho}\right) \ldots \left(1 - \frac{x_n - x_n^0}{\rho}\right)}$ será la mayorante de la función $g(x)$. También será la mayorante de $g(x)$ en el punto x^0, para cualquier $N \geqslant 1$, la función

$$\tilde{g}(x) = \frac{M}{1 - \frac{(x_1 - x_1^0) + \ldots + (x_{n-1} - x_{n-1}^0) + N(x_n - x_n^0)}{\rho}}$$

dado que para todo $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ se cumple la desigualdad $\frac{MN^{\alpha_n}(|\alpha|)!}{\rho^{|\alpha|}\alpha!} \geqslant |g_\alpha|$.

3. Teorema de Kovalévskaya. Estudiaremos aquí el problema de Cauchy en la clase de funciones analíticas, o sea, consideraremos las soluciones del problema (1), (4), (5), analíticas en el dominio Q o en alguno de sus subdominios Q' que contiene la superficie S. Vamos a suponer que los datos del problema (1), (4), (5) son analíticos, es decir, que en Q los coeficientes y el término independiente de la ecuación (1), así como también la función F de (3) (que define la ecuación de la superficie S) son analíticos, mientras que las funciones $l_1(x), \ldots, l_n(x)$, $u_0(x)$, $u_1(x)$ son analíticas en S (esto es, las funciones $l_1(x(y)), \ldots, l_n(x(y))$, $u_0(x(y))$, $u_1(x(y))$ son analíticas en el dominio $(n-1)$ —dimensional $\sum = V \cap \{y' \in R_{n-1}, y_n = 0\}$, siendo $x(y)$ la representación, dada por la fórmula (6), de un entorno U del punto arbitrario $x^0 \in S$ en el entorno V del origen de coordenadas). Ha de recordarse que la solución del problema, los coeficientes y el término independiente de la ecuación (1), así como las funciones iniciales se expresan en valores complejos; las coordenadas $l_1(x), \ldots, l_n(x)$ del vector $l(x)$ y la función $F(x)$ tienen valores reales. Se supone que la superficie S está privada de puntos característicos para la ecuación (1).

Demostremos, en primer lugar, el teorema sobre la existencia y unicidad de la solución de este problema.

TEOREMA 1 (teorema de Kovalévskaya). *Supongamos que los datos del problema* (1), (4), (5) *son analíticos y la superficie S no tiene puntos característicos para la ecuación* (1). *Entonces, para cualquier punto $x^0 \in S$ existe un entorno U_{x^0} de este punto en el cual el problema tiene solución analítica y en ningún entorno del mismo punto no puede haber más de una solución analítica del problema.*

Recordemos (véase el punto 1) que por el problema (1), (4), (5) en el dominio U_{x^0} se entiende un problema que tiene por fin hallar en U_{x^0} una solución $u(x)$ de la ecuación (1) que satisfaga las condiciones iniciales

$$u|_{S_0} = u_0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{S_0} = u_1, \quad \text{donde} \quad S_0 = S \cap U_{x^0}.$$

Además, se supone que el entorno U_{x^0} es tan pequeño que la superficie S_0 la divide en dos dominios disjuntos.

Sea x^0 un punto arbitrario de la superficie S. Examinemos la representación biunívoca (6) de un entorno suficientemente pequeño U de este punto en el entorno V del origen de coordenadas, o sea de la imagen del punto x^0. Como los datos del problema (1), (4), (5) y las funciones $F_i(x)$, $i = 1, \ldots, n-1$ son analíticos, el problema de Cauchy (1), (4), (5) en el dominio U se transforma en el problema equivalente (8)—(10) (en el dominio V) con datos analíticos. Para demostrar el teorema 1 basta mostrar que el origen de coordenadas cuenta con tal entorno V en el que existe solución analítica $v(y)$ del problema (8)—(10) y que esta solución es única.

Ante todo demostremos la unicidad de la solución. Supongamos que en un entorno V_1 del origen de coordenadas existe la solución analítica $v(y)$ del problema (8)—(10). Ya que $v(y) \in C^\infty(V_1)$, de los razonamientos expuestos en el punto 1 se deduce que en la superficie $\sum$ los datos del problema definen unívocamente los valores de todas las derivadas $D^\alpha v$, $|\alpha| \geqslant 0$. En particular, son unívocamente definidos todos los valores de $D^\alpha v(0)$, $|\alpha| \geqslant 0$. Por lo tanto (véase el punto 2), la solución $v(y)$ está unívocamente definida mediante los dados del problema en el dominio V_1. La unicidad queda demostrada.

Procedamos a la demostración de la existencia. Ante todo notemos que es suficiente demostrar la existencia de tal función $v(y)$, analítica en el origen de coordenadas, es decir que debido a las propiedades de funciones analíticas (véase el punto 2) ésta será también analítica en cierto entorno V del origen de coordenadas, que es la solución del problema (8)—(10) en V.

Según los datos del problema (8)—(10), las ecuaciones (12)—(15) (véase el p. 1) definen (unívocamente) los números v_α, $|\alpha| \geqslant 0$. Mostremos que la serie de potencias

$$\sum_{\alpha} v_\alpha y^\alpha, \tag{22}$$

escrita formalmente, representa en sí una función analítica en el origen de coordenadas. La suma de esta serie (designémosla $v(y)$), absolutamente convergente en un entorno V del origen de coordenadas, será precisamente la solución buscada.

Efectivamente, de (13) se desprende que el valor de la función $v(y', 0)$, analítica respecto a y', y los valores de todas sus derivadas respecto a $y_1, \ldots, y_{n-1}$ coinciden, cuando $y' = 0$, con los valores correspondientes de la función $v_0(y')$ que es analítica respecto a y'. Por consiguiente, en $\sum = V \cap \{y' \in R_{n-1}, y_n = 0\}$ tiene lugar la identidad $v(y', 0) \equiv v_0(y')$. Análogamente, de (14) obtenemos que en $\sum$, $v_{y_n}(y', 0) \equiv v_1(y')$. El hecho de que la función $v(y)$ satisface en V la ecuación (10), puede comprobarse del modo siguiente. Examinemos la función $H(y)$ que es analítica en V y está definida por la igualdad (16) en la cual $v(y)$ se ha sustituida por la función analítica examinada (22). De acuerdo con la observación en el punto 1 y gracias a la debida elección de los números v_α, $|\alpha| \geqslant 0$, tienen lugar las igualdades (17), es decir, la función $H(y)$ y todas sus derivadas son nulas en el origen de coordenadas. Por lo tanto, la función $H(y)$, analítica en V, es idénticamente igual a cero ($H(y) \equiv 0$). Lo último implica que en V la función $v(y)$ satisface la ecuación (10).

Así pues, hemos de demostrar que la serie (22) es absolutamente convergente en algún entorno del origen de coordenadas. Es suficiente mostrar para ello (véase el p. 2) que en el origen de coordenadas existe una mayorante para la serie citada.

El problema de Cauchy (en V) con datos analíticos

$$\tilde{v}_{y_n y_n} = \sum_{i,j=1}^{n-1} \tilde{\gamma}_{ij} \tilde{v}_{y_i y_j} + \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{\gamma}_{in} \tilde{v}_{y_i y_n} + \sum_{i=1}^{n} \tilde{\gamma}_i \tilde{v}_{y_i} + \tilde{\gamma} \tilde{v} + \tilde{h}, \tag{$\widetilde{10}$}$$

$$\tilde{v}|_{y_n=0} = \tilde{u}_0(y'), \tag{$\tilde{8}$}$$

$$\tilde{v}_{y_n}|_{y_n=0} = \tilde{u}_1(y') \tag{$\tilde{9}$}$$

lo llamaremos problema que mayora el problema (8)—(10), siempre que los datos indicados son mayorantes en el origen de coordenadas de los datos correspondientes del problema (8)—(10).

Si el problema $(\widetilde{8})$—$(\widetilde{10})$ tiene solución analítica en el origen de coordenadas, a saber:

$$\widetilde{v}(y) = \sum_{\alpha} \widetilde{v}_\alpha y^\alpha, \qquad (\widetilde{22})$$

ésta es la mayorante en el origen de coordenadas para la serie (22), y, por lo tanto, la serie (22) representa en sí una función analítica en el origen de coordenadas.

La demostración de esta afirmación consiste en la comprobación de que las desigualdades $|v_\alpha| \leqslant \widetilde{v}_\alpha$ son válidas para cualquier α, $|\alpha| \geqslant 0$. Según la definición de problema mayorante, las funciones $\widetilde{u}_0$ y $\widetilde{u}_1$ son mayorantes en el origen de coordenadas de las funciones u_0 y u_1, respectivamente. Por consiguiente (véase (13) y (14)), para todos los α', $|\alpha'| \geqslant 0$, $|v_{\alpha', 0}| \leqslant \widetilde{v}_{\alpha', 0}$ y $|v_{\alpha', 1}| \leqslant \widetilde{v}_{\alpha', 1}$.

Supongamos que para cierto $k \geqslant 1$ han sido ya demostradas las desigualdades $|v_{\alpha', s}| \leqslant \widetilde{v}_{\alpha', s}$ para cualquier s, $0 \leqslant s \leqslant k-1$, y cualquier α', $|\alpha'| \geqslant 0$. Mostremos que en este caso también $|v_{\alpha', k}| \leqslant \widetilde{v}_{\alpha', k}$, $|\alpha'| \geqslant 0$. En virtud de (15) tenemos

$$v_{\alpha', k} = \sum_{|\beta'| \leqslant |\alpha'|+1} c_{\beta', k-1} v_{\beta', k-1} + \sum_{s=0}^{k-2} \sum_{|\beta'| \leqslant |\alpha'|+2} c_{\beta', s} v_{\beta', s} + h_{\alpha', k},$$

y

$$\widetilde{v}_{\alpha', k} = \sum_{|\beta'| \leqslant |\alpha'|+1} \widetilde{c}_{\beta', k-1} \widetilde{v}_{\beta', k-1} + \sum_{s=0}^{k-2} \sum_{|\beta'| \leqslant |\alpha'|+2} \widetilde{c}_{\beta', s} \widetilde{v}_{\beta', s} + \widetilde{h}_{\alpha', k},$$

donde

$$h_{\alpha', k} = \frac{1}{(\alpha')!\, k!} D^{(\alpha', k)} h(0),$$

$$\widetilde{h}_{\alpha', k} = \frac{1}{(\alpha')!\, k!} D^{(\alpha', k)} \widetilde{h}(0),$$

y las constantes $c_{\beta', s}$ son combinaciones lineales con coeficientes no negativos de los valores que en el origen de coordenadas toman las derivadas de los coeficientes de la ecuación (10), mientras que $\widetilde{c}_{\beta', s}$ son las mismas combinaciones lineales de las derivadas correspondientes (¡no negativas!) de los coeficientes de la ecuación $(\widetilde{10})$. Como el problema $(\widetilde{8})$—$(\widetilde{10})$ es mayorante para el (8)—(10), entonces $|h_{\alpha', k}| \leqslant \widetilde{h}_{\alpha', k}$ y $|c_{\beta', s}| \leqslant \widetilde{c}_{\beta', s}$. Por consiguiente, $|v_{\alpha', k}| \leqslant \widetilde{v}_{\alpha', k}$.

De este modo, para demostrar que la serie (22) es absolutamente convergente en cierto entorno del origen de coordenadas, es suficiente construir el problema mayorante $(\widetilde{8})-(\widetilde{10})$ que tenga en el origen de coordenadas una solución analítica. Al construir el problema mayorante, será más cómodo que las condiciones iniciales (8) y (9) sean homogéneas:

$$v\,|_{y_n=0}=0 \tag{8_0}$$

$$v_{y_n}\,|_{y_n=0}=0 \tag{9_0}$$

Observemos que para demostrar la existencia de la solución analítica del problema (8)—(10) basta demostrar que existe la solución analítica $w(y)$ para el siguiente problema con condiciones iniciales homogéneas:

$$w_{y_ny_n}-\sum_{i,\,j=1}^{n-1}\gamma_{ij}w_{y_iy_j}-\sum_{i=1}^{n-1}\gamma_{in}w_{y_iy_n}-\sum_{i=1}^{n}\gamma_iw_{y_i}-\gamma w-h'=0,$$
$$w\,|_{y_n=0}=0,$$
$$w_{y_n}\,|_{y_n=0}=0,$$

donde

$$h'=h-w'_{y_ny_n}+\sum_{i,\,j=1}^{n-1}\gamma_{ij}w'_{y_iy_j}+\sum_{i=1}^{n-1}\gamma_{in}w'_{y_iy_n}+\sum_{i=1}^{n}\gamma_iw'_{y_i}+\gamma\omega',$$
$$w'(y)=v_0(y')+y_nv_1(y').$$

Efectivamente, es fácil advertir que si w es una solución analítica del problema citado, $v=w+w'$ será la solución analítica del problema (8)—(10).

Por consiguiente, las condiciones iniciales (8) y (9) pueden considerarse homogéneas, es decir, es suficiente construir un problema mayorante para el problema (8_0), (9_0), (10). Como los coeficientes y el término independiente de la ecuación (10) son analíticos en el origen de coordenadas, entonces (véase el punto 2) a título de ecuación $(\widetilde{10})$ del problema mayorante se puede tomar la ecuación

$$\widetilde{v}_{y_ny_n}=\frac{M}{1-\dfrac{y_1+\ldots+y_{n-1}+Ny_n}{\rho}}\times$$
$$\times\left(\sum_{i,\,j=1}^{n-1}\widetilde{v}_{y_iy_j}+\sum_{i=1}^{n-1}\widetilde{v}_{y_iy_n}+\sum_{i=1}^{n}\widetilde{v}_{y_i}+\widetilde{v}+1\right) \tag{$\widetilde{\widetilde{10}}$}$$

para ciertos $\rho>0$, $M>0$ y $N\geqslant 1$ arbitrario. Examinemos las soluciones $\widetilde{v}=Y(\eta)$ de la ecuación $(\widetilde{\widetilde{10}})$, que sólo dependen de

$\frac{y_1+\ldots+y_{n-1}+Ny_n}{\rho}=\eta$. Todas ellas son soluciones de la ecuación ordinaria

$$Y''=\frac{AY'+B(Y+1)}{a-\eta}, \tag{23}$$

en la que $A=\frac{M\rho(n-1+N)}{N^2}$, $B=\frac{M\rho^2}{N^2}$, $a=1-\frac{M(n-1)^2}{N^2}-$ $-\frac{(n-1)M}{N}$. Elijamos N tan grande, que el número a sea positivo, $0<a<1$.

Tomemos la solución $Y_0(\eta)$ de la ecuación (23) que satisface las condiciones iniciales homogéneas $Y_0(0)=Y_0'(0)=0$. Los coeficientes de la ecuación (23) son analíticos para $\eta=0$ (incluso cuando $|\eta|<a$). Por eso, no es difícil convencerse de que la función $Y_0(\eta)$ es también analítica en cero*). Ya sabemos que todas las derivadas de la función $\frac{1}{a-\eta}$ son positivas en el punto $\eta=0$. Así pues, en virtud de (23)

$$\frac{d^kY_0(0)}{d\eta^k}\geqslant 0 \quad \text{para cualquier } k=0,\ 1,\ \ldots$$

De este modo, la función $\tilde{v}(y)$, $=Y_0\left(\frac{y_1\ldots+y_{n-1}+Ny_n}{\rho}\right)$, analítica en el origen de coordenadas, es la solución de la ecuación $(\tilde{\tilde{10}})$ y todas sus derivadas en el origen de coordenadas son no negativas. Hemos, pues, construido la solución analítica del problema de Cauchy, la que mayora en el origen de coordenadas el problema (8_0), (9_0), (10). El teorema queda demostrado.

Del teorema 1 se deduce la siguiente afirmación.

---

*) He aquí el procedimiento más fácil para convencerse de esto. Consideremos una ecuación

$$\tilde{Y}''=\frac{1}{a-\eta}\left(A\tilde{Y}'+\frac{B(\tilde{Y}+1)}{a-\eta}\right), \tag{$\tilde{23}$}$$

cuyos coeficientes mayoran los coeficientes correspondientes de la ecuación (23) (dado que $0<a<1$). La ecuación $(\tilde{23})$ es la de Euler para la función $\tilde{Y}+1$. La solución de la ecuación $(\tilde{23})$ que satisface las condiciones iniciales $\tilde{Y}(0)=$ $=\tilde{Y}'(0)=0$ es $\tilde{Y}_0(\eta)=\frac{1}{\sigma_1-\sigma_2}\left[\sigma_1(1-\eta/a)^{\sigma_2}-\sigma_2(1-\eta/a)^{\sigma_1}\right]-1$, en la que $\sigma_1=[1-A+\sqrt{(1-A)^2+4B}]/2$ y $\sigma_2=[1-A-\sqrt{(1-A)^2+}$ $\overline{+4B}]/2$. Esta solución es analítica en cero y mayora en el punto $\eta=0$ la función $Y_0(\eta)$.

TEOREMA 2. *Supongamos que los datos del problema* (1), (4), (5) *son analíticos y la superficie S no tiene puntos característicos. Entonces, existe un dominio Q' ($Q' \subset Q$), que contiene la superficie S, en el cual este problema tiene una solución analítica, y en ningún dominio, que contenga la superficie S, no puede haber más que una solución analítica de dicho problema.*

Ante todo indiquemos que la afirmación sobre la unicidad de la solución se deduce inmediatamente del teorema 1 y de las propiedades de las funciones analíticas.

Demostremos la existencia de la solución. Del teorema 1 se desprende que para todo punto x^0 de la superficie S existe un entorno en el cual el problema (1), (4), (5) se resuelve de manera unívoca. No es difícil ver que haciendo disminuir cada uno de los entornos U_{x^0}, $x^0 \in S$, se puede obtener un cubrimiento $\{U'_{x^0}, x^0 \in S\}$ de la superficie S que posee la siguiente propiedad: si la intersección de dos entornos cualesquiera no es vacía, será un conjunto abierto en el cual cada componente conexa contiene los puntos de S (es decir, esta intersección se representa como la unión de una cantidad a lo sumo numerable de dominios disjuntos cada uno de los cuales contiene puntos de S).

En efecto, examinemos en U_{x^0} una bola $\{|x - x^0| < r_0\}$ de radio $r_0 = r_0(x^0) > 0$ lo suficientemente pequeño para que el ángulo formado por las normales a S en dos puntos cualesquiera de la intersección de la bola con la superficie S, sea menor que $\pi/4$. A título de U'_{x^0} tomemos el dominio $\{x: x = x^1 + tn(x^1),\ x^1 \in S \cap \{|x - x^0| < r_0/4\},\ t \in (-\delta_0, \delta_0)\}$, donde $n(x^1)$ es una normal a S en el punto x^1; además, vamos a considerar que $\delta_0 = \delta_0(x^0) < r_0/4$ es tan pequeño que por cada punto de este dominio pasa una sola normal a la superficie $S \cap \{|x - x^0| < r_0\}$ (es decir, para todo punto $x \in U'_{x^0}$ existe sólo un punto $x^1(x)$, perteneciente a $S \cap \{|x - x^0| < r_0\}$ tal que x pertenezca a la recta $\{x: x = x^1 + n(x^1)t,\ t \in R_1\}$). Es evidente que el cubrimiento $\{U'_{x^0}, x^0 \in S\}$ de la superficie S es el que buscamos.

Puesto que para todo $x^0 \in S$ se tiene $U'_{x^0} \subset U'_{x^0}$, en el U'_{x^0} existe la única solución analítica del problema (1), (4), (5); designémosla mediante $u_{x_0}(x)$. Señalemos que si x^0 y x^1 son dos puntos arbitrarios de la superficie S y si, además, $U'_{x^0} \cap U'_{x^1} \neq \varnothing$, entonces en $U'_{x^0} \cap U'_{x^1}$ tenemos $u_{x^0}(x) \equiv u_{x^1}(x)$. Por consiguiente, en el dominio $Q' = \bigcup_{x^0 \in S} U'_{x^0}$, $Q' \subset Q$, la función analítica $u(x)$ puede determinarse, para $x \in U'_{x^0}$, por la igualdad $u(x) = u_{x^0}(x)$. La función $u(x)$ es la solución analítica buscada de la ecuación (1), (4), (5) en Q'. El teorema queda demostrado.

En caso de que la superficie S no contenga puntos característicos, el teorema de Kovalévskaya nos muestra que el problema de Cauchy para una ecuación en derivadas parciales de segundo orden que en el punto 1 fue planteado por analogía con el problema de Cauchy para la ecuación ordinaria de segundo orden, es realmente análogo a éste último en determinado sentido. El teorema de Cauchy, conocido en la teoría de ecuaciones ordinarias, afirma que la ecuación ordinaria (2) con coeficientes analíticos en el intervalo $a < x < b$ y un término independiente tiene en cierto entorno del punto x^0, en el que se dan las condiciones iniciales $a < x^0 < b$, una solución analítica única que satisface estas condiciones iniciales. El teorema de Kovalévskaya es una generalización del teorema de Cauchy con arreglo al caso de ecuaciones en derivadas parciales: si la superficie S, en la cual vienen dadas las condiciones iniciales, no tiene puntos característicos y los datos del problema (1), (4), (5) son analíticos, entonces en cierto «entorno» de la superficie S el problema (1), (4), (5) tiene una solución analítica única.

Sin embargo, no existe la analogía completa entre el problema de Cauchy para las ecuaciones ordinarias y el mismo problema para las ecuaciones en derivadas parciales, ni mucho menos entre la teoría de las ecuaciones ordinarias y la de las ecuaciones en derivadas parciales: en este último caso la situación es mucho más compleja.

En el punto 1 hemos mostrado que si la superficie S tiene puntos característicos, la existencia de la solución analítica (e incluso una solución que sea continuamente diferenciable dos veces) del problema de Cauchy no puede ser garantizada: si el punto $x^0 \in S$ es característico para la ecuación (1), existen funciones iniciales u_0 y u_1 (suaves e incluso analíticas) de tal género que en ningún entorno U de este punto no existe la solución (de $C^2(U)$) del problema (1), (4), (5). Se ha señalado, además, que si la superficie S es característica, pueden surgir tales circunstancias en las cuales el problema de Cauchy debe plantearse por analogía con una ecuación ordinaria de primer orden (por ejemplo, en el capítulo VI estudiaremos el problema de Cauchy en relación con la ecuación $u_{x_1x_1} - u_{x_2} = f(x)$, para la cual la recta $x_2 = 0$ es una característica; según veremos, el problema consiste en la búsqueda de la solución de esta ecuación en el semiplano $x_2 > 0$ que satisfaga una condición inicial, a saber, $u|_{x_2=0} = u_0(x_1)$). Como ilustra el siguiente ejemplo de Kovalévskaya, en este caso tampoco se garantiza la existencia de la solución analítica, aunque los datos del problema son analíticos.

Ejemplo 2. No existe en el origen de coordenadas una solución analítica de la ecuación

$$u_{x_1x_1} - u_{x_2} = 0,$$

que satisfaga la condición inicial

$$u\Big|_{x_2=0} = \frac{1}{1+x_1^2}.$$

Se comprueba inmediatamente que si la solución analítica de este problema existe en el origen de coordenadas:

$$u(x_1, x_2) = \sum_{\alpha_1, \alpha_2} u_{\alpha_1, \alpha_2} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2},$$

entonces, los coeficientes u_{α_1, α_2} tienen la forma $u_{2s, k} = \frac{(2s+2k)!}{(2s)!\,k!}(-1)^{k+s}$ y $u_{2s+1, k} = 0$, para $s \geqslant 0$, $k \geqslant 0$. Pero, en este caso la serie escrita no puede ser convergente en ningún entorno del origen de coordenadas, dado que diverge, por ejemplo, en cualquier punto $(0, x_2)$ para $x_2 \neq 0$.

Como es sabido, la solución del problema de Cauchy para la ecuación ordinaria (2) depende continuamente de los datos iniciales. El ejemplo de Hadamard, que se da más abajo, muestra que una ecuación en derivadas parciales no posee, en general, esta propiedad.

EJEMPLO 3. En el círculo $Q = \{x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ examinemos el problema de Cauchy

$$u_{x_2 x_2} = -u_{x_1 x_1},$$

$$u|_{x_2=0} = u_{n,0} \equiv e^{-\sqrt{n}} e^{inx_1},$$

$$u_{x_2}|_{x_2=0} = u_{n,1} \equiv 0,$$

donde n es número natural (es evidente que la recta $x_2 = 0$ no tiene puntos característicos para la ecuación $u_{x_2 x_2} = -u^{x_1 x_1}$). Es fácil comprobar que la solución de este problema (única en la clase de funciones analíticas) tiene la forma $u = u_n(x) = e^{-\sqrt{n}}$ ch $nx_2 e^{inx_1}$. Por consiguiente, para cualquier punto $x = (x_1, x_2)$ del círculo Q que no se encuentre en la recta inicial $x_2 = 0$, tenemos: $|u_n(x)| \to \infty$ cuando $n \to \infty$, a pesar de que $u_{n,0}(x_1) \to 0$ ($|u_{n,0}| = e^{-\sqrt{n}}$) e, incluso cualquiera que sea $k \geqslant 1$, $\frac{d^k u_{n,0}}{dx_1^k} \to 0$ cuando $n \to \infty$ de una manera uniforme en $[-1, 1]$.

Además, es bien sabido que cualquier ecuación ordinaria (2) con coeficientes continuos en un intervalo determinado y un término independiente siempre tiene soluciones (por todo el intervalo). En cuanto se refiere a las ecuaciones en derivadas parciales que hemos considerado hasta ahora en una situación tan general, una afirmación análoga no tiene lugar: como muestra el ejemplo de Levi (citado en el punto 1), existen ecuaciones de segundo orden en derivadas parciales que no tienen ni una sola solución en ningún entorno de cierto punto; además, no hay ninguna clase de condiciones referentes a la suavidad de los coeficientes (incluso la naturaleza analítica de ellos) que garanticen la existencia de la solución, sea el término independiente tan suave como se quiera (incluso si es indefinidamente diferenciable). Por lo tanto, al estudiar soluciones no analíticas de una ecuación lineal de segundo orden en derivadas parciales necesitamos condiciones adicionales relacionadas con la estructura de la ecuación. En el párrafo que sigue vamos a destacar ciertas clases de ecuaciones que examinaremos a continuación.

§ 2. Clasificación de las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden

En el dominio n-dimensional Q examinemos una ecuación diferencial lineal de segundo orden en derivadas parciales

$$\mathscr{L}u=\sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}(x)\,u_{x_ix_j}+\sum_{i=1}^{n} a_i(x)\,u_{x_i}+a(x)\,u=f(x) \qquad (1)$$

Sean los coeficientes $a_{ij}(x)$, $i, j = 1, \ldots, n$, de valores reales y supongamos que las soluciones de la ecuación (1) pertenecen a $C^2(Q)$. La matriz $A(x) = \| a_{ij}(x) \|$, compuesta por los coeficientes de las derivadas superiores del operador $\mathscr{L}$, puede considerarse simétrica. En efecto,

$$\sum a_{ij}u_{x_ix_j}=\sum a'_{ij}u_{x_ix_j}+\sum a''_{ij}u_{x_ix_j},$$

donde $a'_{ij}=\frac{1}{2}(a_{ij}+a_{ji})$, $a''_{ij}=\frac{1}{2}(a_{ij}-a_{ji})$. Puesto que $u_{x_ix_j}=u_{x_jx_i}$, se tiene que $\sum a''_{ij}u_{x_ix_j}\equiv 0$; por eso $\sum a_{ij}u_{x_ix_j}\equiv\sum a'_{ij}u_{x_ix_j}$, siendo la matriz $\| a'_{ij}(x)\|$ simétrica.

Sea x^0 un punto arbitrario de Q y sean $\lambda_1(x^0), \ldots, \lambda_n(x^0)$ los valores propios (evidentemente reales) de la matriz $A(x^0)$. Designemos con $n_+=n_+(x^0)$ el número de los valores propios positivos; con $n_-=n_-(x^0)$, el número de los valores propios negativos; con $n_0=n_0(x^0)$, $n=n_++n_-+n_0$, el número de valores nulos.

La ecuación (1) se denomina *ecuación de tipo elíptico en el punto* x^0 (o, simplemente, *elíptica en el punto* x^0), si $n_+=n$, ó $n_-=n$. Una ecuación se llama *elíptica en el conjunto* E, $E\subset Q$, si es elíptica en todo punto de este conjunto. Ejemplo de ecuación elíptica en R_n es la de Poisson

$$\Delta u=f,$$

donde $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\ldots+\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ es el operador de Laplace.

La ecuación (1) se denomina *hiperbólica en el punto* $x^0\in Q$ (*ecuación de tipo hiperbólico* en x^0) si $n_+=n-1$ y $n_-=1$, ó si $n_+=1$ y $n_-=n-1$. Si la ecuación es hiperbólica en todo punto del conjunto E, $E\subset Q$, se llama *hiperbólica en* E. Ejemplo de ecuación hiperbólica en todo el espacio R_n de las variables $x_1, \ldots, x_n$, es la ecuación de onda

$$u_{x_1x_1}+\ \ldots\ +u_{x_{n-1}x_{n-1}}-u_{x_nx_n}=f.$$

La ecuación (1) se denomina *ultrahiperbólica en el punto* x^0, si $n_0 = 0$ y $1 < n_+ < n-1$. La ecuación (1) es *ultrahiperbólica en* E, $E \subset Q$, si es ultrahiperbólica en cada punto de E. La ecuación

$$u_{x_1x_1}+u_{x_2x_2}-u_{x_3x_3}-u_{x_4x_4}=f(x)$$

es ultrahiperbólica en todo el espacio R_4.

La ecuación (1) se denomina *parabólica* (o *ecuación de tipo parabólico*) *en el punto* $x^0 \in Q$, si $n_0 > 0$. La ecuación (1) se llama *parabólica en el conjunto* $E \subset Q$, si es parabólica en todo punto de E. Ejemplo de ecuación parabólica en todo el espacio R_n de las variables $x_1, \ldots, x_n$ es la ecuación de conducción de calor

$$u_{x_1x_1}+\ \ldots\ +u_{x_{n-1}x_{n-1}}-u_{x_n}=f(x).$$

Por supuesto, el tipo de ecuación no tiene que ser necesariamente el mismo para todos los puntos del dominio. Por ejemplo, la ecuación de Chaplíguin ($n=2$).

$$u_{x_1x_1}+T(x_1)\,u_{x_2x_2}=f(x),$$

donde la función $T(x_1)$ es positiva para $x_1 > 0$, negativa para $x_1 < 0$ e igual a cero para $x_1 = 0$, será elíptica para $x_1 > 0$, hiperbólica para $x_1 < 0$, y parabólica, para $x_1 = 0$.

Recordemos (véase el punto 1, § 1) que la superficie S, ubicada en Q y definida por la ecuación $F(x) = 0$ (la función de valores reales $F \in C^1(Q)$ y $|\nabla F| \neq 0$ en S), se llama característica para la ecuación (1), si en todos los puntos $x \in S$

$$(A(x)\nabla F,\ \nabla F)=0. \tag{2}$$

Si la ecuación (1) es elíptica en Q, la matriz $A(x)$ será positiva o negativamente definida en cualquier punto $x \in Q$. Esto significa que la ecuación (2) sólo puede tener lugar cuando $|\nabla F| = 0$. Por consiguiente, las ecuaciones elípticas no tienen superficies características (todavía más, no existe ninguna superficie S que contenga un solo punto característico de la ecuación elíptica).

Siendo la ecuación (1) hiperbólica en Q, se puede mostrar que por cualquier punto del dominio Q se puede trazar una superficie característica. Por ejemplo, en el caso de la ecuación de onda $u_{x_1x_1}+\ldots+u_{x_{n-1}x_{n-1}}=u_{x_nx_n}$, la ecuación (2) tiene la forma

$$F_{x_1}^2+\ \ldots\ +F_{x_{n-1}}^2-F_{x_n}^2=0 \tag{2'}$$

Esta ecuación se satisface, en particular, por la función $(x - x_0, m) = (x_1 - x_1^0) m_1 + \ldots + (x_n - x_n^0) m_n$, donde x^0 es un punto arbitrario de R_n, y el vector $m = (m_1, \ldots, m_n)$, $|m| = 1$, está subordinado a la condición $m_1^2 + \ldots + m_{n-1}^2 = m_n^2$. La ecuación (2') también queda satisfecha por la función $(x_1 - x_1^0)^2 + \ldots + (x_{n-1} - x_{n-1}^0)^2 - (x_n - x_n^0)^2$, donde x^0 es un punto arbitrario de R_n. Por lo tanto, el plano $(x - x^0, m) = 0$ y la superficie cónica $(x_1 - x_1^0)^2 + \ldots + (x_{n-1} - x_{n-1}^0)^2 = (x_n - x_n^0)^2$ son características de la ecuación de onda. Para la ecuación de conducción de calor $u_{x_1 x_1} + \ldots + u_{x_{n-1} x_{n-1}} = u_{x_n}$ la ecuación (2) tiene la forma

$$F_{x_1}^2 + \ldots + F_{x_{n-1}}^2 = 0.$$

Es evidente que cualquier solución de esta ecuación tiene la forma $F = \Phi(x_n)$, donde Φ es una función arbitraria continuamente diferenciable ($\Phi' \neq 0$). Por eso, las características de la ecuación de conducción de calor son los planos $x_n = \text{const}$.

Sea x^0 un punto del dominio Q. Designemos mediante $y = y(x)$ ($y_i = y_i(x_1, \ldots, x_n)$, $i = 1, \ldots, n$) una transformación que representa biunívocamente cierto entorno U del punto x^0 en el entorno V que corresponde al punto y^0, $y^0 = y(x^0)$, y mediante $x = x(y)$, una transformación inversa a la primera. Supondremos, además, que las funciones $y_i(x) \in C^2(\overline{U})$, $i = 1, \ldots, n$, y que la matriz de Jacobi $J(x) = \left\| \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right\|$ de la transformación $y = y(x)$ no está degenerada, es decir, en $\overline{U}$ el jacobiano de la transformación es distinto de cero ($\det J(x) \neq 0$). Designaremos la función $u(x(y))$ por $v(y)$. Puesto que $u_{x_i} = \sum_{k=1}^{n} v_{y_k} y_{kx_i}$, $u_{x_i x_j} = \sum_{k,s=1}^{n} v_{y_k y_s} y_{kx_i} y_{sx_j} + \sum_{k=1}^{n} v_{y_k} y_{kx_i x_j}$, entonces, después del cambio de variables la ecuación (1) tomará la forma

$$\sum_{k,s=1}^{n} \tilde{a}_{ks}(x(y)) v_{y_k y_s} = F(y, v, \nabla v), \tag{3}$$

donde $\tilde{a}_{ks}(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) y_{kx_i} y_{sx_j}$, y F es una función que no depende de las segundas derivadas de v. Puesto que las matrices $\tilde{A}(x) = \|\tilde{a}_{ks}(x)\|$ y $A(x) = \|a_{ij}(x)\|$ están ligadas por la ecuación $\tilde{A}(x) = JAJ^*$, ambas matrices, de acuerdo con el conocido teorema de Algebra, tendrán igual número de valores propios positivos, negativos y nulos. Esto significa que en todo punto $y \in V$ la ecuación (3) será del mismo tipo que la (1) en el correspondiente punto $x \in U$. De este modo, la clasificación de las ecuaciones de segundo orden, expuesta más arriba, es invariante respecto a las transformaciones suaves biunívocas no degeneradas de las variables independientes. Esta circunstancia puede ser aprovechada para simplificar la ecuación (1).

Tomemos un punto arbitrario $x^0 \in Q$. Sabemos que para la matriz $A(x^0)$ existe otra matriz degenerada $T = T(x^0) = \| t_{ij} \|$, tal que

$$TA(x^0)\,T^* = \Lambda(x^0) = \left\| \begin{array}{ccccccccc} \overbrace{+1 & & }^{n_+} & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & +1 & & & & & & \\ & & & \overbrace{-1 & & }^{n_-} & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & \overbrace{0 & & }^{n_0} & \\ & & & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & & & 0 \end{array} \right\|$$

Realicemos la sustitución lineal de las variables independientes $y = T(x^0)\,x$. Como la matriz de Jacobi de esta sustitución es igual a T, entonces, como resultado de la transformación, la ecuación (1) se transformará en la (2), en la que la matriz de los coeficientes de derivadas superiores es igual a $TA(x)\,T^*$. Esto significa que para $x = x^0$ la ecuación (3) tiene la forma

$$v_{y_1y_1} + \ldots + v_{y_{n_+}y_{n_+}} - v_{y_{n_++1}y_{n_++1}} - \ldots - v_{y_{n_++n_-}y_{n_++n_-}} = F_1,$$

donde la función F_1 no depende de las segundas derivadas de la función v. Esta se llama *forma canónica* de la ecuación (1) en el punto x^0.

De este modo para cualquier punto $x = x^0 \in Q$ puede indicarse una transformación lineal no singular de las variables independientes que para $x = x^0$ reduce la ecuación (1) a la forma canónica. Como la transformación depende sólo de los valores de los coeficientes que tienen en (1) las derivadas superiores para $x = x^0$, entonces en el caso cuando estos coeficientes son constantes en Q, la transformación lineal determinada reduce la ecuación (1) a una forma canónica en todo punto del dominio Q (dentro del dominio Q).

§ 3. Planteamiento de algunos problemas

En este párrafo vamos a examinar algunos problemas físicos que conducen a los problemas para ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.

1. Problemas de equilibrio y movimiento de una membrana.

Consideremos un problema que tiene por objeto encontrar la posición de equilibrio de una membrana (película elástica fina), que se encuentra bajo la acción de cierto sistema de fuerzas.

Supongamos que en cualquier posición admisible la membrana es una superficie, ubicada en el espacio $(x, u) = (x_1, x_2, u)$, que se proyecta unívocamente sobre cierto dominio Q del plano x_1Ox_2 y que se define por la ecuación $u = u(x)$, $x \in Q$, en la que $u(x)$ es una función de la clase $C^1(\overline{Q})$. Convengamos en lo siguiente: si $u = \varphi(x)$, $x \in Q$, caracteriza una posición admisible de la membrana, cualquier otra posición $u = u(x)$ se obtendrá de la posición $u = \varphi(x)$, desplazándose cada punto de la membrana paralelamente al eje Ou.

Supongamos que la fuerza exterior que actúa sobre la membrana es paralela al eje Ou y tiene una densidad continua $f_1(x, u)$ igual a $f(x) - a(x)u$ (la membrana se encuentra bajo la acción de la fuerza exterior de densidad $f(x)$, $x \in Q$, y la fuerza de resistencia del medio elástico cuya densidad, igual a $-a(x)u$, es proporcional al desplazamiento y de signo inverso al de éste; $a(x) \geqslant 0$ es el coeficiente de elasticidad del medio). El trabajo de la fuerza indispensable para desplazar la membrana de la posición $\varphi(x)$ a la $u(x)$, será igual a:

$$\int\limits_Q \int\limits_{\varphi(x)}^{u(x)} f_1(x, u)\,du\,dx = \int\limits_Q \Big[f(x)(u(x) - \varphi(x)) - \\ - \frac{a(x)}{2}(u^2(x) - \varphi^2(x)) \Big]\,dx.$$

Pero la membrana es, además, accionada por la fuerza interior de elasticidad. El trabajo de ésta para desplazar la membrana de la posición $\varphi(x)$ a la $u(x)$ es

$$-\int\limits_Q k(x)\left[\sqrt{1 + |\nabla u|^2} - \sqrt{1 + |\nabla \varphi|^2}\right] dx$$

(el trabajo de esta fuerza reducido al elemento $(x_1, x_1 + \Delta x_1) \times \times (x_2, x_2 + \Delta x_2)$ de Q es proporcional a la variación del área de la superficie de aquella parte de la membrana que se proyecta sobre el citado elemento; el coeficiente $k(x) > 0$ se llama tensión de la membrana).

Si en los puntos del contorno de la membrana está aplicada una fuerza cuya densidad lineal se expresa por $g_1(x, u) = g_1(x) - \sigma_1(x)u$ ($\sigma_1(x) \geqslant 0$ es el coeficiente de la fijación elástica del contorno), el trabajo de esta fuerza necesario para desplazar la membrana de la posición $\varphi(x)$ a la $u(x)$ es igual a

$$\int\limits_{\partial Q} \Big[g_1(x)(u(x) - \varphi(x)) - \frac{\sigma_1(x)}{2}(u^2(x) - \varphi^2(x)) \Big]\,dS.$$

De este modo, la energía potencial de la membrana en la posición $u(x)$ será

$$U(u)=U(\varphi)+\int_Q \Big[k(x)\,(\sqrt{1+|\nabla u|^2}-\sqrt{1+|\nabla\varphi|^2})+$$
$$+\frac{a}{2}(u^2-\varphi^2)-f(u-\varphi)\Big]dx+\int_{\partial Q}\Big[\frac{\sigma_1}{2}(u^2-\varphi^2)-g_1(u-\varphi)\Big]dS,$$

donde $U(\varphi)$ es la energía potencial de la membrana en la posición φ.

Con el fin de simplificar el problema supongamos que el gradiente de la función $u(x)$ es pequeño en todas las posiciones que puede ocupar la membrana y despreciemos los términos del orden $|\nabla u|^4$. En este caso la energía potencial de la membrana en la posición u se expresa del modo siguiente

$$U(u)=U(\varphi)+\int_Q \Big[\frac{k}{2}(|\nabla u|^2-|\nabla\varphi|^2)+$$
$$+\frac{a}{2}(u^2-\varphi^2)-f(u-\varphi)\Big]dx+\int_{\partial Q}\Big[\frac{\sigma_1}{2}(u^2-\varphi^2)-g_1(u-\varphi)\Big]dS.$$

Si u es la posición de equilibrio de la membrana, de acuerdo con el principio de los posibles desplazamientos, el polinomio (respecto a t)

$$P(t)=U(u+tv)=$$
$$=U(u)+t\Big[\int_Q (k\nabla u\nabla v+auv-fv)\,dx+\int_{\partial Q}(\sigma_1 uv-g_1 v)\,dS\Big]+$$
$$+\frac{t^2}{2}\Big[\int_Q (k|\nabla v|^2+av^2)\,dx+\int_{\partial Q}\sigma_1 v^2\,dS\Big]$$

tiene, para $t=0$, un punto estacionario, cualquiera que sea v dentro de los límites admisibles. Por consiguiente, $\frac{dP(0)}{dt}=0$, es decir, para todo $v\in C^1(\overline{Q})$ la función $u(x)$, que describe la posición de equilibrio de la membrana, satisface la siguiente identidad integral:

$$\int_Q (k\nabla u\nabla v+auv)\,dx+\int_{\partial Q}\sigma_1 uv\,dS=\int_Q fv\,dx+\int_{\partial Q} g_1 v\,dS. \qquad (1)$$

Si el contorno de la membrana está inmóvil (sujeción rígida), todas las posiciones admisibles de la membrana satisfacen la condición

$$u|_{\partial Q}=\varphi|_{\partial Q}. \qquad (2)$$

En este caso la energía potencial de la membrana para una posición arbitraria u es igual (siempre que se desprecian los términos del orden $|\nabla u|^4$) a

$$U(u) = U(\varphi) + \int_Q \left[\frac{k}{2}(|\nabla u|^2 - |\nabla\varphi|^2) + \frac{a}{2}(u^2 - \varphi^2) - f(u - \varphi)\right] dx.$$

Sea u la posición de equilibrio de una membrana fijada rígidamente. Entonces, para toda $v \in C^1(\overline{Q})$ que satisfaga la condición

$$v|_{\partial Q} = 0, \tag{3}$$

la función $u + tv$ satisfará la condición (2), cualquiera que sea t. Por lo tanto, para todas las v de este género el polinomio

$$P(t) = U(u + tv) = U(u) + t\int_Q (k\nabla u\nabla v + auv - fv)\,dx + \\ + \frac{t^2}{2}\int_Q (k|\nabla v|^2 + av^2)\,dx$$

tiene mínimo cuando $t = 0$. Esto significa que para todos los $v \in C^1(\overline{Q})$ que satisfacen la condición (3), la función $u(x)$, que describe a posición de la membrana fijada rígidamente, satisface la identidad integral

$$\int_Q (k\nabla u\nabla v + auv)\,dx = \int_Q fv\,dx. \tag{4}$$

En el capítulo V mostraremos que en el caso de que las funciones k, a, σ_1, f, g_1 (e incluso $\varphi_{\partial Q}$, si la membrana está fijada rígidamente) estén sujetas a ciertas limitaciones, las identidades integrales (1) y (4) determinan las únicas funciones $u(x)$, siempre que se cumpla la condición (2). Además demostraremos también que si el contorno ∂Q es suficientemente suave, las funciones $u(x)$ pertenecen al espacio $C^2(\overline{Q})$.

De inmediato, en lugar de las condiciones integrales (1) y (4) hallemos las condiciones locales a las cuales debe satisfacer la función buscada $u(x)$, suponiendo que $u(x) \in C^2(\overline{Q})$, $k(x) \in C^1(\overline{Q})$, $k(x) \geqslant k_0 > 0$, $a(x) \in C(\overline{Q})$, $\sigma_1(x) \in C(\partial Q)$, $g_1 \in C(\partial Q)$, $\varphi \in C(\partial Q)$.

Como, según la fórmula de Ostrogradski, para cualquier $v \in C^1(\overline{Q})$

$$\int_Q k\nabla u\nabla v\,dx = -\int_Q v\,\mathrm{div}(k\nabla u)\,dx + \int_{\partial Q} k\frac{\partial u}{\partial n} v\,dS,$$

las identidades (1) y (4) pueden ser de nuevo escritas, respectivamente, de la forma

$$\int_Q (\mathrm{div}(k\nabla u) - au + f)\,v\,dx - \int_{\partial Q}\left(k\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma_1 u - g_1\right) v\,dS = 0 \tag{1'}$$

y

$$\int\limits_{Q} (\operatorname{div}(k\nabla u) - au + f)\, v\, dx = 0. \tag{4'}$$

Dado que la función $\operatorname{div}(k\nabla u) - au + f$ es continua, de la identidad (4') se desprende la igualdad

$$\operatorname{div}(k\nabla u) - au + f = 0, \quad x \in Q, \tag{5}$$

la cual, junto con la condición límite (2), nos proporciona las condiciones locales buscadas a las cuales debe satisfacer la función $u(x)$, si la membrana está rígidamente fijada. El problema de hallar la solución de la ecuación (5) que satisfaga la condición límite (2), se llama *primer problema de contorno* (*problema de Dirichlet*) para la ecuación (5).

Ya que en la (1') $v(x)$ es una función arbitraria de $C^1(\overline{Q})$, entonces, en particular, cuando v satisfacen la condición (3), obtenemos que $u(x)$ también satisface, en este caso, la ecuación (5). Por consiguiente, la identidad (1') puede escribirse de nuevo del modo siguiente:

$$\int\limits_{\partial Q} \left(k\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma_1 u - g_1\right) v\, dS = 0.$$

Puesto que para cualquier función de $C^1(\partial Q)$ existe una prolongación a Q, perteneciente a $C^1(\overline{Q})$ (véase p. 2, § 4, cap. III), de la última identidad se desprende la condición límite

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u\Big|_{\partial Q} = g \tag{6}$$

donde $\sigma = \sigma_1/k \geqslant 0$, $g = g_1/k$.

El problema en que se busca la solución de la ecuación (5), que satisfaga la condición límite (6), se llama *tercer problema de contorno* para la ecuación (5). Cuando $\sigma \equiv 0$, el tercer problema de contorno lleva el nombre del *segundo problema de contorno* (*problema de Neumann*). La condición límite tiene en este caso la forma

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial Q} = g. \tag{7}$$

De este modo, la posición de equilibrio de la membrana se describe por la solución de la ecuación (5) que satisface cierta condición límite. La ecuación (5) es de tipo elíptico y se llama *ecuación de equilibrio de la membrana*.

Examinemos ahora el problema del movimiento de la mebrana.

Sea que la función $u(x, t)$ caracteriza la posición de la membrana en el instante t de tiempo. Entonces, las funciones $u_t(x, t)$ y

$u_{tt}(x, t)$ (se supone que estas derivadas existen) determinan la velocidad y la aceleración de la membrana en el punto $x \in Q$. La posición y la velocidad de la membrana en el instante (inicial) $t = t_0$ están prefijadas, es decir,

$$u|_{t=t_0} = \psi_0(x), \quad x \in \overline{Q}, \tag{8}$$

$$u_t|_{t=t_0} = \psi_1(x), \quad x \in \overline{Q}. \tag{9}$$

Las condiciones (8) y (9) se llaman iniciales.

De acuerdo con el principio de d'Alembert, la ecuación de movimiento de la membrana es la ecuación de equilibrio (5) en la cual $f(x)$ está sustituida por la función $-\rho(x) u_{tt} + f(x, t)$:

$$\operatorname{div}(k\nabla_x u) - au + f(x, t) - \rho(x) u_{tt} = 0, \qquad x \in Q, \ t > t_0. \tag{10}$$

(Aquí, $-\rho(x) u_{tt}$ es la densidad de la fuerza de inercia en el punto x; $\rho(x) > 0$, la densidad de la membrana en el punto x, y $f(x, t)$ es la densidad de la fuerza exterior dependiente, en general, de t).

Igual que en el caso estático, las condiciones límites tienen la forma (2), (6) ó (7) (según sea el régimen dado en el contorno ∂Q) y se cumplen para todos los valores de tiempo $t \geqslant t_0$ que se consideran. Los problemas en que se busca la solución de la ecuación (10) para las condiciones (2), (8), (9); (7), (8), (9); (6), (8), (9) se llaman, respectivamente, *primero, segundo y tercer problemas mixtos* de la ecuación (10).

De este modo, el movimiento de la membrana se describe por la solución de la ecuación (10) que satisface las condiciones iniciales y ciertas condiciones límites. La ecuación (10) es hiperbólica (en un espacio tridimensional) y se denomina *ecuación de movimiento de la membrana*.

En el caso de una membrana extendida infinitamente ($Q = R_2$), la función $u(x, t)$, que describe el movimiento de ésta, satisface las condiciones iniciales (8) y (9) y es una solución de la ecuación (10) para todos los $x \in R_2$ y $t > t_0$. Aquí decimos que $u(x, t)$ es una solución *del problema inicial (problema de Cauchy)* para la ecuación (10).

Si los coeficientes en las ecuaciones (10) y (5) son constantes: $k(x) \equiv k$, $\rho(x) \equiv \rho$ y $a(x) \equiv 0$, entonces las ecuaciones se llaman, respectivamente, *de onda*:

$$\frac{1}{a^2} u_{tt} - \Delta u = \frac{f(x, t)}{k}, \quad x \in Q, \quad t > t_0, \quad a = \sqrt{\frac{k}{\rho}}, \tag{10'}$$

y *de Poisson*

$$\Delta u = -\frac{f(x)}{k}, \quad x \in Q. \tag{5'}$$

En el caso de una variable espacial la ecuación (10′) tiene la forma

$$\frac{1}{a^2} u_{tt} - u_{xx} = \frac{f(x, t)}{k}, \quad x \in (\alpha, \beta), \quad t > t_0. \tag{10'}$$

Esta ecuación describe el movimiento de una cuerda dispuesta sobre el intervalo (α, β). Cuando $x = (x_1, x_2, x_3)$, la ecuación

$$\frac{1}{a^2} u_{tt} - \Delta u = \frac{f(x, t)}{k}, \quad x \in Q, \quad t > t_0. \tag{10''}$$

describe el movimiento del gas en el dominio Q (la función $u(x, t)$ caracteriza, por ejemplo, pequeñas desviaciones de la presión del gas, respecto a la presión constante, que se observan en el punto $x \in Q$ en el momento t). El número a, en este caso, es la velocidad de propagación del sonido en el gas.

2. **Problema de difusión del calor.** Supongamos que una sustancia que se encuentra en el dominio tridimensional Q se caracteriza por la densidad $\rho(x) > 0$, la capacidad calorífica $c(x) > 0$ y por el coeficiente de conductibilidad térmica $k(x) > 0$. Designemos mediante $u(x, t)$ la temperatura en el punto $x \in Q$ en el momento t. Sea que la temperatura en el momento inicial $t = t_0$ es conocida:

$$u(x, t)|_{t=t_0} = \psi_0(x), \quad x \in Q; \tag{11}$$

se requiere determinarla para $t > t_0$.

Sea Q' un subdominio de Q. En conformidad con la ley de Newton la cantidad de calor que pasa por el contorno ∂Q al dominio Q' durante el intervalo de tiempo (t_1, t_2), $t_0 \leqslant t_1 < t_2$, es igual a

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\partial Q'} k(x) \frac{\partial u}{\partial n} dS,$$

donde n es una normal a $\partial Q'$, exterior respecto de Q'

Si en el dominio Q hay fuentes de calor de la densidad conocida $f(x, t)$, el incremento de la cantidad de calor en Q' durante el tiempo (t_1, t_2) será igual a

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{Q'} f(x, t)\, dx + \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\partial Q'} k(x) \frac{\partial u}{\partial n} dS$$

y, por tanto, la ecuación del balance térmico en Q' tiene la forma

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\partial Q'} k(x) \frac{\partial u}{\partial n} dS + \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{Q'} f(x, t)\, dx =$$

$$= \int_{Q'} c(x) \rho(x) (u(x, t_2) - u(x, t_1))\, dx.$$

Tomando en consideración que $u(x, t_2) - u(x, t_1) = \int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{\partial u}{\partial t} dt$, y valiéndose de la fórmula de Ostrogradski, obtenemos

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int\limits_{Q'} \left[c(x)\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(k(x)\nabla u) - f(x, t) \right] dx = 0.$$

Si la función integrando es continua en Q, en virtud de la arbitrariedad del dominio Q' y del intervalo (t_1, t_2) la última igualdad es equivalente a la ecuación diferencial

$$c(x)\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(k(x)\nabla u) = f(x, t), \quad x \in Q, \quad t_1 > t_0. \tag{12}$$

Esta es una ecuación del tipo parabólico (en el espacio de cuatro dimensiones x_1, x_2, x_3, t). Cuando las funciones $c(x)$, $\rho(x)$ y $k(x)$ son constantes, la ecuación (12) se llama *ecuación de conducción del calor*:

$$\frac{1}{a^2} u_t - \Delta u = \frac{f(x, t)}{c\rho}, \tag{12'}$$

en la que $a^2 = \frac{k}{c\rho}$.

Subrayemos que la ecuación (12) sólo es válida para los puntos interiores del dominio Q y sólo cuando $t > t_0$. El compartamiento de la función $u(x, t)$ para $t = t_0$ se prefija por la condición inicial (11), y tiene que ser dado adicionalmente para $x \in \partial Q$. Se impone por las condiciones de un problema físico concreto que establece la ligazón térmica entre Q y el medio exterior.

En el caso más sencillo se da la temperatura $u(x, t)$ en el contorno ∂Q:

$$u|_{\partial Q} = f_0(x, t) \tag{13}$$

para todos los valores de t que se consideran. Entonces, la temperatura será descrita por la solución $u(x, t)$ de la ecuación (12), que satisface las condiciones (11) y (13).

Si se conoce la densidad $q_0(x, t)$ del flujo térmico que pasa por el contorno ∂Q, la condición límite, de acuerdo con la ley de Newton, tendrá la forma

$$k(x)\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\partial Q} = q_0(x, t). \tag{14}$$

Si se conoce la temperatura $u_0(x, t)$ del medio fuera del dominio Q, mientras que la densidad del flujo térmico $q_0(x, t)$ por el contorno ∂Q es proporcional a la diferencia de temperaturas $u|_{\partial Q}$ y $u_0|_{\partial Q}$, entonces, la condición límite adquiere la forma

$$k\frac{\partial u}{\partial n} + k_1 u\bigg|_{\partial Q} = k_1 u_0\bigg|_{\partial Q}, \tag{15}$$

donde $k_1(x) > 0$ es el coeficiente de intercambio de calor entre el cuerpo en cuestión y el medio.

Los problemas en que se determinan las soluciones de la ecuación (12) en las condiciones (11), (13); (11), (14); (11), (15) se llaman, respectivamente, *primero*, *segundo* y *tercer problemas mixtos* para la ecuación (12).

En el caso en que la sustancia llena todo el espacio R_3, $Q = R_3$, la temperatura $u(x, t)$ satisface la ecuación (12) cuando $t > t_0$, y la condición (11), cuando $t = t_0$. En este caso suele decirse que $u(x, t)$ es una solución *del problema inicial* (*problema de Cauchy*) para la ecuación (12).

PROBLEMAS DEL CAPITULO I

1. Supóngase que una superficie S de la clase C^2 divide el dominio Q en dos dominios disjuntos, Q^+ y Q^-, y que la función $u(x)$ pertenece a $C^1(Q) \cap \cap C^2(Q^+ \cup S) \cap C^2(Q^- \cup S)$, satisfaciendo en Q^+ y Q^- la ecuación lineal de segundo orden

$$\sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, u_{x_i} + a(x)\, u = f(x) \tag{1}$$

con coeficientes continuos en Q y un término idependiente. Demuéstrese que si para cualquier entorno $U_x{}^0$ de cierto punto $x^0 \in S$, la función $u(x)$ no pertenece a $C^2(U_{x^0})$, entonces x^0 es un punto característico para la ecuación (1).

2. Supóngase que en el dominio bidimensional Q está dada una ecuación lineal de segundo orden (1) con coeficientes analíticos y un término independiente y que, además, las rectas L_1 y L_2, que se cortan en un punto $x^0 \in Q$, son características para esta ecuación. Demuéstrese que el problema (problema de Goursat) de búsqueda de la solución $u(x)$ de la ecuación (1), que satisfaga las condiciones $u|_{L_1} = u_1$, $u|_{L_2} = u_2$ con funciones analíticas u_1 y u_2, tiene en cierto entorno del punto x^0 una solución única en la clase de funciones analíticas $(u_1(x^0) = u_2(x^0))$.

3. Sea dada en un dominio Q una ecuación lineal de segundo orden con coeficientes continuos. Demuéstrese que:

— si la ecuación es elíptica (o hiperbólica) en algún punto de Q, será elíptica (o hiperbólica) también en algún entorno de este punto;

— si en Q existen dos puntos y la ecuación es elíptica en uno de ellos e hiperbólica en otro, entonces en Q habrá un punto en el que la ecuación sea parabólica

LITERATURA ADICIONAL PARA EL CAPITULO I

I. N. Vékua, Funciones analíticas generalizadas, Fismatguiz, 1959 (en ruso).

V. S. Vladímirov, Ecuaciones de la física matemática, «Naúka», 1971 (en ruso).

V. S. Vladímirov, Métodos de la teoría de funciones de varias variables complejas, «Naúka», 1964 (en ruso).

I. G. Petróvski, Conferencias sobre las ecuaciones en derivadas parciales, Fismatguiz, 1961 (en ruso).

S. L. Sóbolev, Ecuaciones de la física matemática, Fismatguiz, 1954 (en ruso).

A. Tijonov, A. Samarsky, Ecuaciones de la física matemática, Editorial MIR.

CAPITULO II. INTEGRAL DE LEBESGUE Y ALGUNOS PROBLEMAS DEL ANALISIS FUNCIONAL

§ 1. Integral de Lebesgue

El concepto de integral y el de función integrable, estrechamente relacionados entre sí, constituyen las nociones principales del análisis matemático. Estos conceptos, en el proceso de su desarrollo, han sufrido considerables cambios, como lo exigían las ciencias aplicadas y las propias matemáticas. Si la resolución de unos problemas requería sólo saber integrar funciones continuas o incluso analíticas, para resolucionar otros problemas se necesitaba ampliar estos conjuntos y, a veces, considerar un conjunto de todas las funciones integrables según Riemann. Es más, para la descripción matemática de algunos fenómenos resulta insuficiente «rico» inclusive el conjunto de funciones integrables según Riemann. Es natural que dicho conjunto resultó también insuficiente para las mismas matemáticas.

En particular, se logra describir aproximadamente algunos procesos por medio de una sucesión de funciones «buenas» $f_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, respecto de la cual sólo podemos afirmar que es convergente en cierto sentido integral. Así por ejemplo, la sucesión $f_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, puede poseer una de las siguientes propiedades: $\int |f_k - f_m|\, dx \to 0$ cuando $m, k \to \infty$ (lo fundamental de la sucesión radica en la media), $\int (f_k - f_m)^2\, dx \to 0$ (lo fundamental está en la media cuadrática) o, en los casos más complejos, tienden a cero las integrales que contienen derivadas de las funciones (lo fundamental según la energía). Estas propiedades (en particular, en el segundo caso donde se trata de lo fundamental en la media cuadrática) de por sí pueden no garantizar la convergencia en el sentido común, es decir, la sucesión puede no converger en ningún punto. No obstante, se puede mostrar (lo haremos más abajo) que existe una función, única en cierto sentido, hacia la que esta sucesión converge (en la media cuadrática). En el caso general la función citada no es integrable según Riemann, por lo que en la definición de convergencia la integral se debe entender en un sentido más amplio, es decir, en el sentido de Lebesgue:

1. Conjunto de medida nula. Un conjunto $E \subset R_n$ se llama *conjunto de medida* (n-dimensional) *nula*, si se puede cubrirlo con un sistema numerable de cubos abiertos (n-dimensionales) en el que la suma de volumenes (volumen sumario) es tan pequeña como se quiera, es decir, respecto de cualquier $\varepsilon > 0$ existe un sistema numerable de cubos $K_1, K_2, \ldots$, tal que sea $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$, y el volumen sumario de los cubos

$\sum_{i=1}^{\infty} |K_i| < \varepsilon$, donde $|K_i|$ es el volumen del cubo K_i, $i = 1, 2, \ldots$.

De la definición se desprende directamente que un conjunto compuesto de un número numerable de puntos es un conjunto de medida nula. La intersección y la unión de un número numerable de conjuntos de medida nula es un conjunto de medida nula. Las superficies suaves de k-ésima dimensión, $k < n$, es también un conjunto de medida nula.

A continuación nos será útil el criterio siguiente.

LEMA 1. *El conjunto E es un conjunto de medida nula, si, y sólo si, para él existe tal cubrimiento por un sistema numerable de cubos de volumen sumario finito, con el que cada punto resulta ser cubierto por un conjunto infinito de estos cubos.*

Supongamos, al principio, que el cubrimiento de que se trata en el lema 1 existe. Excluyendo de éste un número finito de cubos de volumenes máximos, se puede conseguir que el volumen sumario del cubrimiento restante sea tan pequeño como se quiera. Esto certifica que E es un conjunto de medida nula. Viceversa, si E es un conjunto de medida nula, se puede cubrirlo por un número numerable de cubos cuyo volumen sumario sea inferior a 2^{-k}, cualquiera que sea el número entero $k \geqslant 1$. El cubrimiento necesario se obtendrá al reunir estos cubrimientos respecto de $k = 1, 2, \ldots$

Si alguna propiedad se cumple para todos los puntos x de cierto conjunto G, a excepción, quizás, del conjunto de medida nula, se dice que esta propiedad se cumple *en casi todo punto* $x \in G$ (en c.t.p) o *casi siempre*. Así, por ejemplo, la función de Dirichlet $\chi(x)$, que es igual a 1 en los puntos cuyas coordenadas son todas racionales y es nula en todos los demás puntos, es igual a cero en c.t.p. de R_n o casi siempre en R_n.

Sea Q un dominio del espacio R_n. A la par de las funciones definidas por doquier en Q (es decir, funciones que asumen un valor finito en cada punto de Q) examinaremos también las funciones definidas en casi todo punto de Q (casi siempre en Q), es decir, funciones cuyos valores no están definidos en los conjuntos de medida nula, con la particularidad de que las funciones $f + g$, $f \cdot g$ (f y g están definidas casi siempre) están definidas en aquellos puntos en los que están definidas ambas funciones f y g.

2. Funciones medibles. Sea Q un dominio del espacio R_n. La sucesión de funciones $f_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, (definidas casi en todo punto de Q) se llama *convergente* en casi todo punto de Q, si casi para todos los $x^0 \in Q$ la sucesión numérica de valores de estas funciones tiene en el punto x^0 un límite (finito). La función $f(x)$ se llama *límite de la sucesión, convergente en casi todo punto*, $f_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots, f_k(x) \to f(x)$ casi siempre en Q cuando $k \to \infty$, si para casi todos los $x^0 \in Q$ se tiene $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x^0) = f(x^0)$. Es obvio que si las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son los límites para cierta sucesión de funciones convergente en casi todo punto, ellas coinciden en casi todo punto.

La función $f(x)$ se llama *medible* en Q, si es el límite para una sucesión de funciones de $C(\overline{Q})$, convergente en casi todo punto.

Indiquemos algunas propiedades obvias de las funciones medibles.

De la definición se desprende que la función $f(x)$, perteneciente a $C(\overline{Q})$, es medible. Una función arbitraria $f(x)$ de $C(Q)$ es también medible, dado que puede ser representada en forma del límite para una sucesión de funciones de $C(\overline{Q})$ convergente en Q: $f(x) = \lim\limits_{\delta\to 0} f(x)\,\zeta_\delta(x)$, donde $\zeta_\delta(x)$ es una función cortante para el dominio Q (véase el cap I).

Una combinación lineal arbitraria de funciones medibles es una función medible; si f_1 y f_2 son medibles, la función $f_1 \cdot f_2$, es medible como también será medible la función $\frac{f_1}{f_2}$, siempre que se suponga adicionalmente que $f_2(x) \neq 0$ en casi todo punto. Junto con f es también medible la función $|f|$. Las funciones $\max\limits_{i\leqslant k}(f_i(x))$ y $\min\limits_{i\leqslant k}(f_i(x))$ son medibles, si lo son $f_1, \ldots, f_k$. En el punto 7 demostraremos que si una sucesión de funciones medibles converge en casi todo punto hacia cierta función, esta última es también medible. Por eso, si las funciones $\sup\limits_k (f_k(x)) = \lim\limits_{k\to\infty} \max\limits_{i\leqslant k}(f_i(x))$ y $\inf\limits_k (f_k(x)) = \lim\limits_{k\to\infty} \min\limits_{i\leqslant k}(f_i(x))$ son finitas en casi todo punto, serán medibles, siendo medibles $f_1, f_2, \ldots$

La derivada de una función medible, si es que existe en casi todo punto, es medible.

3. **Sucesiones monótonas de funciones.**

Examinaremos con frecuencia sucesiones monótonas no decrecientes (no crecientes) en casi todo punto de Q, $f_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, de funciones medibles, es decir, sucesiones para las cuales en casi todo punto de Q tienen lugar las igualdades $f_{k+1}(x) \geqslant f_k(x)$ ($f_{k+1}(x) \leqslant f_k(x)$), cualquiera que sea $k \geqslant 1$. Si esta sucesión de funciones es acotada en casi todo punto (es decir, para casi todos los $x^0 \in Q$ la sucesión numérica $f_k(x^0)$, $k = 1, 2, \ldots$, es acotada), será convergente hacia cierta función en casi todo punto. Introduzcamos las siguientes designaciones: $f_k \uparrow f$ en casi todo punto para $k \to \infty$, si la sucesión es monótona no decreciente, y $f_k \downarrow f$ en casi todo punto para $k \to \infty$, si la misma es monótona no creciente.

Designemos con $\Lambda_1 = \Lambda_1(Q)$ el conjunto de todas las funciones cada una de las cuales es límite casi siempre (en Q) para una sucesión monótona no decreciente de funciones de $C(\overline{Q})$ con una sucesión acotada (por arriba) de integrales (de Riemann).

Sea $f(x)$ una función arbitraria de Λ_1 y sea $f_k(x), \ldots k = 1, 2, \ldots$ una sucesión monótona no decreciente de funciones continuas en $\overline{Q}$, convergente casi siempre hacia $f(x)$, con una sucesión acotada de integrales. La cota exacta superior del conjunto $\left\{ \int_Q f_k(x)\,dx,\ k = 1, 2, \ldots \right\}$ se denomina integral de Lebesgue de la función $f(x) \in \Lambda_1$:

$$(L)\int_Q f\,dx = \sup_k \int_Q f_k(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} \int_Q f_k(x)\,dx. \qquad (1)$$

Demostremos que si la función $f(x)$ pertenece a la clase Λ_1, entonces para toda sucesión monótona no decreciente $f_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, de funciones de $C(\overline{Q})$, convergente casi siempre hacia $f(x)$, la sucesión de integrales es acotada y para cualesquiera dos sucesiones $f_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, y $f'_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, que poseen estas propiedades, $\sup_k \int_Q f'_k\,dx = \sup_k \int_Q f_k\,dx$, es decir, la integral de Lebesgue (de la función de Λ_1) no depende de la elección de la sucesión de aproximación.

Antes de demostrar esta afirmación mostremos que si $f_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, es una sucesión arbitraria de funciones de $C(\overline{Q})$ tal que $f_k \uparrow f$ casi siempre cuando $k \to \infty$ y $f(x) \geqslant 0$ en casi todo punto, entonces $\sup_k \int_Q f_k\,dx \geqslant 0$.

Supongamos que $f_k(x) \uparrow f(x)$ en casi todo punto para $k \to \infty$. Tomemos arbitrariamente un $\varepsilon > 0$. Un conjunto E de puntos en los cuales o bien f_k, $k = 1, 2, \ldots$ no converge hacia la función f, o bien $f < 0$, es un conjunto de medida nula. Por eso, puede ser cubierto por un conjunto numerable de cubos abiertos $\{K_i,\ i = 1, 2, \ldots\}$ de volumen sumario menor que ε. Designemos con K la unión de todos los cubos de este cubrimiento. Para todo punto $x^0 \in \overline{Q} \setminus f_k(x^0) \uparrow f(x^0) \geqslant 0$ cuando $k \to \infty$, por lo que existe $N = N(x^0)$ tal que $f_N(x^0) > -\varepsilon$. Como la función $f_N(x) \in C(\overline{Q})$, la última desigualdad se cumplirá también en la intersección $U_{x^0} \cap \overline{Q}$ del conjunto $\overline{Q}$ con algún cubo abierto U_{x^0} con centro en el punto x^0. A causa de que la sucesión es monótona en $U_{x^0} \cap \overline{Q}$, tienen también lugar las desigualdades $f_k(x) > -\varepsilon$, cualquiera que sea $k \geqslant N$. La totalidad de conjuntos abiertos

$\{U_x,\ x\in\overline{Q}\setminus K\}\cup\{K_i,\ i=1,\ 2,\ \ldots\}$ cubre el conjunto $\overline{Q}$, y como este último es cerrado, se puede extraer del citado cubrimiento un subcubrimiento finito $U_{x^1},\ \ldots,\ U_{x^l},\ K_{i_1},\ \ldots,\ K_{i_s}$. Designemos por K' la unión $\bigcup_{j=1}^{s} K_{i_j}$. Dado que $|K'|<\varepsilon$, y, además, existe tal N_0 que para todos los $x\in\overline{Q}\setminus K'\subset(\bigcup_{j=1}^{l} U_{x_j})\cap\overline{Q}f_k(x)>-\varepsilon$ cualquiera que sea $k\geqslant N_0$, entonses para tales k

$$\int_Q f_k(x)\,dx=\int_{Q\setminus K'} f_k(x)\,dx+\int_{K'} f_k(x)\,dx\geqslant$$
$$\geqslant-\varepsilon|Q|-|A_1|\varepsilon=\varepsilon(-|A_1|-|Q|),$$

donde $|Q|$ es el volumen de Q y $A_1=\min\limits_{x\ni\overline{Q}} f_1(x)$. Por ser arbitrario $\varepsilon>0$, de esta desigualdad se obtiene la desigualdad requerida.

Sean $f(x)$ una función arbitraria de Λ_1 y $f_k(x)$, $k=1,\ 2,\ \ldots$ $\ldots$, $f_k\uparrow f$ en casi todo punto cuando $k\to\infty$, una sucesión de funciones de $C(\overline{Q})$ para la cual la sucesión de integrales es acotada. Tomemos una sucesión arbitraria $f_k'(x)$, $k=1,\ 2,\ \ldots$, de funciones pertenecientes a $C(\overline{Q})$, tal que $f_k'(x)\uparrow f(x)$ en casi todo punto cuando $k\to\infty$. Mostremos que

$$\lim_{k\to\infty}\int_Q f_k'\,dx=\lim_{k\to\infty}\int_Q f_k\,dx.$$

Examinemos la sucesión f_k-f_m', $k=1,\ 2,\ \ldots$, siendo m arbitrario. Ya que para $k\to\infty$ $f_k-f_m'\uparrow f-f_m'\geqslant0$ en casi todo punto de Q, entonces $\lim\limits_{k\to\infty}\int_Q(f_k-f_m')\,dx=\lim\limits_{k\to\infty}\int_Q f_k\,dx-\int_Q f_m'\,dx\geqslant0$. Por consiguiente, la sucesión $\int_Q f_m'\,dx$, $m=1,\ 2,\ \ldots$, es acotada y $\lim\limits_{m\to\infty}\int_Q f_m'\,dx\leqslant\lim\limits_{k\to\infty}\int_Q f_k\,dx$. Como la desigualdad inversa es, evidentemente, lícita, la afirmación queda demostrada.

Por analogía se demuestra que si las funciones f y g pertenecen a $\Lambda_1(Q)$ y $f(x)\geqslant g(x)$ en casi todo punto, entonces

$$(L)\int_Q f\,dx\geqslant(L)\int_Q g\,dx.$$

Efectivamente, sean $f_k(x)$, $k=1,\ 2,\ \ldots$, $f_k(x)\uparrow f(x)$ casi siempre cuando $k\to\infty$, y $g_k(x)$, $k=1,\ 2,\ \ldots$, $g_k(x)\uparrow g(x)$ casi siempre cuando $k\to\infty$, sucesiones de funciones de $C(\overline{Q})$. Para m

arbitrario, cuando $k \to \infty$, $f_k(x) - g_m(x) \uparrow f(x) - g_m(x) \geqslant f(x) - g(x) \geqslant 0$ casi siempre en Q, por esta razón $\lim\limits_{k\to\infty} \int\limits_Q (f_k - g_m)\,dx = \lim\limits_{k\to\infty} \int\limits_Q f_k\,dx - \int\limits_Q g_m\,dx \geqslant 0$, es decir. para cualquier m $\int\limits_Q g_m\,dx \leqslant \lim\limits_{k\to\infty} \int\limits_Q f_k\,dx$, y, por lo tanto, $\lim\limits_{m\to\infty} \int\limits_Q g_m\,dx \leqslant \lim\limits_{k\to\infty} \int\limits_Q f_k\,dx$, lo que se trataba de establecer.

De la definición se desprende directamente que si las funciones f_1 y f_2 pertenecen a Λ_1, entonces para cualesquiera constantes no negativas C_1 y C_2 la función $C_1f_1 + C_2f_2$ pertenece a Λ_1 y $(L) \int\limits_Q (C_1f_1 + C_2f_2)\,dx = C_1 (L) \int\limits_Q f_1\,dx + C_2 (L) \int\limits_Q f_2\,dx$; además, a la clase Λ_1 pertenecen también las funciones $\max(f_1(x), f_2(x))$ y $\min(f_1(x), f_2(x))$.

Tomemos un cubo que contiene el dominio Q y cuyas aristas son paralelas a los planos coordenados; por medio de planos paralelos a las aristas del cubo dividámoslo en un número finito de paralelepípedos. La intersección no vacía de un paralelepípedo abierto, obtenido como resultado de la división, con el dominio Q la llamaremos célula (de la división del dominio Q) y la totalidad de todas las células, división Π del dominio Q. La función medible $f(x)$ se llamará *escalonada en* Q, si asume un valor constante dentro de cada célula de cierta división Π del dominio Q.

Una integral de la función escalonada se comprenderá, por supuesto, como suma de los volúmenes de todas las células multiplicados por el valor de la función en la célula correspondiente.

LEMA 2. *Para toda sucesión monótona no decreciente $f_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, de funciones de $C(\overline{Q})$ existe una sucesión monótona no decreciente en casi todo punto $f'_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, de funciones escalonadas tal que casi siempre $f'_k(x) \leqslant f_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, y que en casi todo punto $f_k(x) - f'_k(x) \to 0$, cuando $k \to \infty$.*

Debido a la continuidad uniforme de la función $f_k(x)$ existe un número $\delta_k > 0$ tal que $|f_k(x') - f_k(x'')| < 2^{-k}$ para cualesquiera puntos $x', x'' \in \overline{Q}$, para los cuales $|x' - x''| < \delta_k$, $k = 1, 2, \ldots$ Designemos mediante Π_1 la división del dominio Q en la que el diámetro de la célula máximo es $\leqslant \delta_1$. La función escalonada $f'_1(x)$, que en cada célula K de la división Π_1 es igual al número $\min\limits_{x\in\overline{K}} f_1(x)$, posee la siguiente propiedad: $0 \leqslant f_1(x) - f'_1(x) \leqslant 2^{-1}$ para casi todos los $x \in Q$. A cuenta de la disminución de la división Π_1, construyamos otra división, Π_2, en la que el diámetro de la célula máximo es $\leqslant \delta_2$. La función escalonada $f_2'(x)$, que en cada célula K de la división Π_2 es igual al número $\min\limits_{x\in \overline{K}} f_2(x)$ satisface, para casi todos los $x \in Q$, las desigualdades $0 \leqslant f_2(x) - f_2'(x) \leqslant 2^{-2}$. Además, casi siempre en Q $f_2'(x) \geqslant f_1'(x)$. Continuando este proceso, obtendremos, para cualquier $k \geqslant 1$, la división Π_k del dominio Q y, junto con ella, una función escalonada $f_k'(x)$ que posee las siguientes propiedades: $0 \leqslant f_k(x) - f_k'(x) < 2^{-k}$, $f_k' \leqslant f_{k-1}'(x)$ para casi todos los $x \in Q$. Por consiguiente, en casi todo punto de Q $f_k'(x) \leqslant f_k(x)$ y casi siempre en Q existe y es igual a cero el límite de la sucesión $f_k(x) - f_k'(x)$, $k = 1, 2, \ldots$ El lema queda demostrado.

LEMA 2'. *Para toda sucesión monótona no decreciente en casi todo punto de Q $f_k'(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, de funciones escalonadas existe una sucesión monótona no decreciente $f_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, de funciones de $C(\overline{Q})$ tal que en casi todo punto $f_k(x) \leqslant f_k'(x)$, y en casi todo punto de Q $f_k'(x) - f_k(x) \to 0$ cuando $k \to \infty$.*

Es obvio que basta demostrar esta afirmación para el caso en que la función $f_1'(x) \geqslant 0$ en casi todo punto.

Examinemos una función $f_k'(x)$ (del hecho de que $f_1'(x) \geqslant 0$ en casi todo punto se desprende que casi siempre $f_k'(x) \geqslant 0$) y sea que la división, que a ella corresponde, Π_k' de cierto cubo que contiene el dominio Q (designemos por a_0 la longitud de la arista de este cubo) se compone de m_k células (cuando la división Π_k del dominio Q, correspondiente a la función f_k', está compuesto a lo sumo de m_k células). Tomemos $\delta_k = \min\left\{\frac{a_k}{2}, \frac{1}{2na_0^{n-1}m_k 2^k}\right\}$, donde a_k es la longitud de la menor de las aristas de todos los paralelepípedos que forman las células de la división Π_k', y sea $\zeta_{\delta_k}^p(x)$, $0 \leqslant \zeta_{\delta_k}^p(x) \leqslant 1$ una función cortante δ_k (véase la introducción, capítulo I) para la p-ésima célula de la división Π_k' (δ_k está elegida de tal manera que el volumen sumario de la intersección de los paralelepípedos, en los que $\sum\limits_{p=1}^{m_k} \zeta_{\delta_k}^p(x) < 1$, con el dominio Q no supere a 2^{-k}).

Designemos por $\psi_k(x)$ la función $f_k'(x)\cdot \sum\limits_{p=1}^{m_k} \zeta_{\delta_k}^p(x)$. Es fácil ver que las funciones $\psi_k(x) \in C(\overline{Q})$, $\psi_k(x) \leqslant f_k'(x)$ casi siempre, y en casi todo punto $f_k'(x) - \psi_k(x) \to 0$, cuando $k \to \infty$. Entonces, las funciones $f_k(x) = \max\limits_{m\leqslant k} \psi_m(x)$, continuas en $\overline{Q}$, satisfacen casi siempre las desigualdades $f_k(x) \leqslant f_k'(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, y en casi todo punto $f_k'(x) - f_k(x) \to 0$ cuando $k \to \infty$. El lema queda demostrado.

De los lemas 2 y 2' se deduce directamente la siguiente afirmación.

TEOREMA 1. *Para que la función $f(x)$ pertenezca a $\Lambda_1(Q)$ es necesario y suficiente que exista la sucesión (convergente en casi todo punto hacia esta función y, además, monótona no decreciente en casi todo punto) $f_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, de funciones escalonadas con una sucesión acotada de integrales. En este caso* $(L) \int\limits_Q f\,dx = \sup\limits_k \int\limits_Q f_k\,dx$.

LEMA 3. *Una sucesión monótona no decreciente de funciones de $C(\overline{Q})$ con una sucesión acotada de integrales converge en casi todo punto de Q.*

Del lema 2 se desprende que para demostrar el lema 3 es suficiente establecer la validez de la afirmación siguiente: si la sucesión f_k, $k = 1, 2, \ldots$, de funciones escalonadas no es monótona decreciente en casi todo punto y la sucesión de sus integrales es acotada, entonces la sucesión f_k, $k = 1, 2, \ldots$, converge en casi todo punto de Q.

Cubramos el contorno ∂Q ($\partial Q \in C^1$, véase el capítulo I, Introducción) por un número finito de cubos cerrados $K_1, \ldots, K_l$, cuyo volumen sumario es suficientemente pequeño, de tal modo que el conjunto $Q' = Q \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{l} K_i$ sea un dominio. Está claro que es suficiente mostrar que la sucesión f_k, $k = 1, 2, \ldots$, monótona no decreciente, de funciones escalonadas converge en casi todo punto del poliedro Q'.

Examinemos una función arbitraria $f_k(x)$ de esta sucesión, suponiendo que Π_k es una división del poliedro Q' que corresponde a dicha función.

Designemos por S la unión de las aristas de todos los poliedros que entran siquiera en una de las divisiones Π_k, $k = 1, 2, \ldots$, y por $\mathscr{E}$, la totalidad de todos aquellos puntos x del conjunto $Q' \setminus S$ en los que la sucesión numérica $f_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, no está acotada. Como S es un conjunto de medida nula, será suficiente mostrar que $\mathscr{E}$ es un conjunto de medida nula.

Tomemos $\varepsilon > 0$ arbitrario y sea $\mathscr{E}_{k,\varepsilon}$ un conjunto compuesto (de un número finito) de células de la división Π_k en las que $f_k(x) \geqslant 1/\varepsilon$. Puesto que $C \geqslant \int\limits_{Q'} f_k(x)\,dx \geqslant -|A_1||Q'| + \frac{1}{\varepsilon}|\mathscr{E}_{k,\varepsilon}|$, donde A_1 es el valor mínimo de los que asume la función $f_1(x)$ en las células de la división Π_1 ($f_k(x) \geqslant A_1$ en casi todo punto de Q'), entonces $|\mathscr{E}_{k,\varepsilon}| \leqslant \varepsilon(C + |A_1||Q|)$. Dado que $\mathscr{E} \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \mathscr{E}_{k,\varepsilon} = \mathscr{E}_{1,\varepsilon} \cup \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} (\mathscr{E}_{k+1,\varepsilon} \setminus \mathscr{E}_{k,\varepsilon})$, el conjunto $\mathscr{E}$ está cubierto por un sistema numerable de poliedros, no siendo el volumen sumario de éstos superior a $\varepsilon(C + |A_1||Q|)$, ya que, en virtud de la monotonía en casi todo punto de la sucesión $f_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, de funciones escalonadas,

$\mathscr{E}_{1,\varepsilon} \cup \bigcup\limits_{k=1}^{N-1} (\mathscr{E}_{k+1,\varepsilon} \setminus \mathscr{E}_{k,\varepsilon}) \subset \overline{\mathscr{E}}_{N,\varepsilon}$, cualquiera que sea $N \geqslant 1$, y, por consiguiente

$$|\mathscr{E}_{1,\varepsilon}| + \sum_{k=1}^{N-1} |\mathscr{E}_{k+1,\varepsilon} \setminus \mathscr{E}_{k,\varepsilon}| \leqslant |\mathscr{E}_{N,\varepsilon}| \leqslant \varepsilon (C + |A_1|\,|Q|).$$

Pero, en este caso, el conjunto $\mathscr{E}$ puede ser cubierto también por un sistema numerable de cubos abiertos cuyo volumen sumario sea menor que $2\varepsilon\,(C + |A_1|\,|Q|)$. El lema está demostrado.

4. **Funciones integrables según Lebesgue.** Una función de valores reales $f(x)$, dada en un dominio, se llama integrable según Lebesgue en el dominio Q, si puede ser representada en la forma

$$f(x) = f'(x) - f''(x), \tag{2}$$

donde f' y f'' son funciones de $\Lambda_1(Q)$; con ello, una integral de Lebesgue de la función f por el dominio Q se determina por la igualdad

$$(L)\int_Q f\,dx = (L)\int_Q f'\,dx - (L)\int_Q f''\,dx. \tag{3}$$

Mostremos que la integral de Lebesgue de la función f no depende del modo de representar esta función en forma de la diferencia entre dos funciones de $\Lambda_1(Q)$. En efecto, supongamos que a la par con (2) tiene lugar también la igualdad $f = \tilde{f}' - \tilde{f}''$, donde $\tilde{f}'$ y $\tilde{f}''$ pertenecen a $\Lambda_1(Q)$. Entonces, en casi todo punto tenemos $f' + \tilde{f}'' = \tilde{f}' + f'' \in \Lambda_1$ y (véase p. 3) $(L)\int\limits_Q f'dx + (L)\int\limits_Q \tilde{f}''dx = (L)\times \times \int\limits_Q \tilde{f}'\,dx + (L)\int\limits_Q f''\,dx$, por lo que $(L)\int\limits_Q f\,dx = (L)\int\limits_Q \tilde{f}'\,dx - (L)\times \times \int\limits_Q \tilde{f}''\,dx$.

Designemos por $\Lambda = \Lambda(Q)$ el conjunto de todas las funciones que son integrables en Q según Lebesgue. De la definición de $\Lambda(Q)$ se infiere que la función $C_1 f_1 + C_2 f_2 \in \Lambda(Q)$, si $f_i(x) \in \Lambda(Q)$ y C_i son constantes arbitrarias, $i = 1, 2$. Con ello

$$(L)\int_Q (C_1 f_1 + C_2 f_2)\,dx = C_1 (L)\int_Q f_1\,dx + C_2 (L)\int_Q f_2\,dx.$$

Una función integrable según Lebesgue es absolutamente integrable según Lebesgue, puesto que si $f = f' - f''$, donde f' y f'' pertenecen a Λ_1, entonces la función $|f| = \max(f', f'') - \min(f', f'')$ pertenece a Λ. Como la función f es integrable según Lebesgue, también serán integrables según Lebesgue las funciones

$$f^+(x) = \max(f(x), 0) = \frac{f(x) + |f(x)|}{2},$$

$$f^-(x) = -\min(f(x), 0) = \frac{|f(x)| - f(x)}{2},$$

mientras que la integrabilidad de las funciones f_1 y f_2 se desprende la integrabilidad de las funciones

$$\max(f_1(x), f_2(x)) = \frac{1}{2}(|f_1 - f_2| + f_1 + f_2),$$

$$\min(f_1(x), f_2(x)) = \frac{1}{2}(f_1 + f_2 - |f_1 - f_2|).$$

Si la función $f(x)$ es integrable según Lebesgue y es no negativa casi siempre, entonces

$$(L)\int_Q f\,dx \geqslant 0. \tag{4}$$

Esta desigualdad proviene inmediatamente de los resultados del punto anterior, dado que las funciones f' y f'' (pertenecientes a Λ_1) en la representación (2) de la función f satisfacen, por condición, la desigualdad $f'(x) \geqslant f''(x)$ casi siempre en Q.

De (4) se deduce que para cualesquiera dos funciones f_1 y f_2 de $\Lambda(Q)$, que satisfacen casi siempre la desigualdad $f_1(x) \leqslant f_2(x)$, es válida la desigualdad

$$(L)\int_Q f_1\,dx \leqslant (L)\int_Q f_2\,dx \tag{5}$$

y, en particular, para toda función $f \in \Lambda(Q)$ tiene lugar la desigualdad

$$\left|(L)\int_Q f\,dx\right| \leqslant (L)\int_Q |f|\,dx. \tag{6}$$

Demostremos ahora el teorema de que el conjunto $\Lambda(Q)$ es «cerrado» respecto a los pasos límites monótonos.

TEOREMA 2 (B. Levi). *Una sucesión monótona casi siempre de funciones $f_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, interables según Lebesgue en Q con una sucesión acotada de integrales casi siempre en Q converge hacia la función $f(x)$ que es integrable según Lebesgue, entonces*

$$\lim_{k\to\infty}(L)\int_Q f_k\,dx = (L)\int_Q f\,dx. \tag{7}$$

Es suficiente demostrar el teorema para una sucesión monótona no decreciente. Cuando la sucesión es monótona no creciente el problema se reduce al anterior, es decir, basta cambiar el signo de todas las funciones. Además, sin menoscabar la generalidad de razonamientos, podemos considerar que las funciones $f_k(x) \geqslant 0$, $k = 1, 2, \ldots$ casi siempre (de lo contrario, en lugar de la sucesión $f_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, deberíamos considerar la sucesión $f_k(x) - f_1(x)$, $k = 1, 2, \ldots$ compuesta por funciones negativas en casi todo punto).

Designemos con C la expresión $\sup\limits_k \int\limits_Q f_k\, dx$.

Supongamos primero que $f_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, es una sucesión monótona no decreciente casi siempre de funciones de Λ_1 con una sucesión acotada de integrales de Lebesgue. Mostremos que esta sucesión converge en casi todo punto hacia la función $f(x)$ de Λ_1, con la particularidad de que aquí tiene lugar la igualdad (7).

Para cada $k \geqslant 1$ tomemos una sucesión $f_{km}(x)$, $m = 1, 2, \ldots$, de funciones de $C(\overline{Q})$, $f_{km}(x) \uparrow f_k(x)$ casi siempre en Q cuando $m \to \infty$. Las funciones $\varphi_m(x) = \max\limits_{i \leqslant m} (f_{im}(x))$, $m = 1, 2, \ldots$, pertenecen a $C(\overline{Q})$ y poseen las siguientes propiedades:

a) $\varphi_m(x) \leqslant \varphi_{m+1}(x)$,

b) $f_{km}(x) \leqslant \varphi_m(x) \leqslant f_m(x)$ para $k \leqslant m$

(la segunda desigualdad en b) se cumple, por supuesto, casi siempre),

c) $\int\limits_Q \varphi_m(x)\, dx \leqslant (L) \int\limits_Q f_m\, dx \leqslant C$,

d) $\int\limits_Q f_{km}(x)\, dx \leqslant \int\limits_Q \varphi_m(x)\, dx$ para $k \leqslant m$.

De a), c) y el lema 3 se infiere que cuando $m \to \infty$, $\varphi_m \uparrow f$ en casi todo punto de Q, donde f es una función de Λ_1, con la particularidad de que $\lim\limits_{m\to\infty} \int\limits_Q \varphi_m\, dx = (L) \int\limits_Q f\, dx$. Pasando al límite para $m \to \infty$ en la desigualdad izquierda de b) y haciendo uso de la desigualdad derecha de b), obtenemos que casi siempre en Q $\varphi_k(x) \leqslant \leqslant f_k(x) \leqslant f(x)$ para todo k, de donde fluye que $f_k(x) \uparrow f(x)$ casi siempre en Q cuando $k \to \infty$. Pasando en c) y d) al límite para $m \to \infty$, resulta que para cualquier k, $(L) \int\limits_Q f_k\, dx \leqslant (L) \int\limits_Q f\, dx \leqslant \leqslant \lim\limits_{m\to\infty} (L) \int\limits_Q f_m\, dx$, es decir $(L) \int\limits_Q f\, dx = \lim\limits_{m\to\infty} \int\limits_Q f_m\, dx$. De este modo queda demostrada la afirmación del teorema cuando $f_k \in \Lambda_1(Q)$.

Sea, ahora $f_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, una sucesión arbitraria monótona no decreciente de funciones (integrables según Lebesgue) no negativas casi siempre en Q con una sucesión acotada de integrales. Puesto que

$$f_k(x) = \sum_{i=1}^{k} g_i(x), \quad k = 1, 2, \ldots,$$

donde $g_1(x) = f_1(x)$, $g_s(x) = f_s(x) - f_{s-1}(x)$, $s = 2, 3, \ldots$, son funciones no negativas casi siempre e integrables según Lebesgue, entonces para demostrar nuestra afirmación basta mostrar que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)$, formada de funciones no negativas e integrables según Lebesgue, en la cual la sucesión de integrales de sus sumas parciales es acotada, converge casi siempre hacia una función integrable según Lebesgue y dicha serie puede integrarse término a término.

Notemos que para $k = 1, 2, \ldots$, en la representación $g_k(x) = g_k'(x) - g_k''(x)$, donde g_k' y g_k'' pertenecen a Λ_1, puede considerarse que $g_k''(x) \geqslant 0$ en casi todo punto y $(L)\int_Q g_k'' \, dx < 2^{-k}$ (para poder hacerlo, en cierta representación $g_k = \tilde{g}_k' - \tilde{g}_k''$, $\tilde{g}_k' \in \Lambda_1$, $\tilde{g}_k'' \in \Lambda_1$, será suficiente sustituir las funciones $\tilde{g}_k'$ y $\tilde{g}_k''$ por las funciones $g_k' = \tilde{g}_k' - \Phi_k$, $g_k'' = \tilde{g}_k'' - \Phi_k$, donde $\Phi(x)$ es una función continua en $\overline{Q}$ ($\Phi_k(x) \leqslant \tilde{g}_k''(x)$ casi por doquier) que satisface la condición $(L)\int_Q \tilde{g}_k'' \, dx - \int_Q \Phi_k \, dx < 2^{-k}$); con ello, $g_k'(x) \geqslant g_k''(x) \geqslant 0$ en casi todo punto. Así pues, para cualquier $k = 1, 2, \ldots$

$$\sum_{s=1}^{k} g_s(x) = \sum_{s=1}^{k} g_s'(x) - \sum_{s=1}^{k} g_s''(x),$$

con la particularidad de que $(L)\int_Q \sum_{s=1}^{k} g_s''(x) \, dx < 1$, $(L)\int_Q \sum_{s=1}^{k} g_s'(x) \, dx = \int_Q \sum_{s=1}^{k} g_s(x) \, dx + (L)\int_Q \sum_{s=1}^{k} g_s''(x) \, dx \leqslant C + 1$. Según lo demostrado más arriba, la sucesión de funciones de Λ_1 $\sum_{s=1}^{k} g_s'(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, converge casi siempre hacia cierta función $f'(x)$ de Λ_1, mientras que la sucesión $\sum_{s=1}^{k} g_s''(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, converge hacia la función $f''(x)$ de Λ_1, con la particularidad de que $(L)\int_Q \sum_{s=1}^{k} g_s' \, dx \to (L)\int_Q f' \, dx$ y $(L)\int_Q \sum_{s=1}^{k} g_s'' \, dx \to (L)\int_Q f'' \, dx$, cuando $k \to \infty$. Como, en este caso, en casi todo punto $\sum\limits_{s=1} g_k(x) \to f' - f''$, para $k \to \infty$, entonces la función f, igual a $f' - f''$, es integrable según Lebesgue y $(L)\int\limits_Q \sum\limits_{k=1}^{m} g_k\,dx \to (L)\int\limits_Q f\,dx$ cuando $m \to \infty$. El teorema está demostado.

Del teorema 2 se desprende la siguiente afirmación.

COROLARIO. *Si* $f_k(x) \in \Lambda(Q)$, $k = 1, 2, \ldots$, *y la serie* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (L)\int\limits_Q \times$ $\times |f_k|\,dx$ *converge, entonces en casi todo punto de* Q *la serie* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *es absolutamente convergente* $\Big($*es decir, casi siempre converge la sucesión* $\sum\limits_{k=1}^{m} |f_k(x)|$, $m = 1, 2, \ldots\Big)$, *y además,* $f(x) =$ $= \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x) \in \Lambda(Q)$ y $(L)\int\limits_Q f(dx) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (L)\int\limits_Q f_k\,dx$.

Haciendo uso del teorema de Levi demostremos el siguiente teorema.

TEOREMA 3. *Para que la función* $f(x)$, *casi siempre no negativa e integrable según Lebesgue en* Q, *sea nula en casi todo punto, es necesario y suficiente que* $(L)\int\limits_Q f\,dx = 0$.

Si $f(x) = 0$ en casi todo punto de Q, entonces $f \in \Lambda_1(Q)$ y la sucesión $f_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, de funciones, idénticamente iguales a cero en Q, posee la propiedad de que $f_k \uparrow f$ en casi todo punto de Q cuando $k \to \infty$. Según la definición esto significa que $(L)\int\limits_Q f\,dx = 0$.

A la inversa, sea $(L)\int\limits_Q f\,dx = 0$. Entonces, $(L)\int\limits_Q kf\,dx = 0$ para cualquier k. Por consiguiente, según dice el teorema de Levi, una sucesión $kf(x)$, $k = 1, 2 \ldots$, monótona no decreciente casi siempre, converge en casi todo punto hacia una función (finita casi siempre), lo que sólo es posible cuando $f = 0$ en casi todo punto. El teorema está demostrado.

5. Comparación de las integrales de Riemann y de Lebesgue. Si una función $f(x)$ es integrable según Riemann (recordemos que la integral de Riemann se define sólo para funciones acotadas), entonces, como sabemos, existen dos sucesiones de funciones escalonadas f'_k, f''_k, $k = 1, 2, \ldots$ (para cada $k = 1, 2, \ldots$, a las dos funciones corresponde la división Π_k del dominio Q), f'_k, $k = 1, 2, \ldots$, es monótona no decreciente en casi todo punto, f''_k, $k = 1, 2, \ldots$, es monótona no creciente en casi todo punto, $f'_k(x) \leqslant f(x) \leqslant f''_k(x)$ en casi todo punto, $k = 1, 2, \ldots$, tales que las sucesiones de sus integrales (sumas de Darbu superiores e inferiores) tienen un límite común igual a la integral de Riemann de la función f. De acuerdo al teorema 2, la sucesión monótona no creciente casi siempre $f''_k - f'_k$, $k = 1, 2, \ldots$, de funciones escalonadas no negativas en casi todo punto con una sucesión acotada de integrales converge casi siempre hacia cierta función no negativa en casi todo punto, perteneciente a $\Lambda(Q)$, cuya integral lebesguiana es igual cero.

En virtud del teorema 3 esta función es nula en casi todo punto. Por eso, cuando $k \to \infty$, $f'_k(x) \uparrow f(x)$ en casi todo punto (y $f''_k(x) \downarrow f(x)$ en casi todo punto). Por consiguiente, *si la función $f(x)$ es integrable según Riemann, será también integrable según Lebesgue, y sus integrales de Riemann y de Lebesgue coinciden*. Es más, está demostrado que la función $f(x)$ es integrable según Riemann en el caso, y sólo en el caso, cuando las funciones $f(x)$ y $-f(x)$ pertenecen a $\Lambda_1(Q)$.

Por ello, en lo sucesivo omitiremos el símbolo L ante el signo de la integral, entendiendo siempre la integral como la lebesguiana y el integrando, como función de $\Lambda(Q)$.

El conjunto de funciones acotadas contenidas en $\Lambda(Q)$ es más amplio que el de funciones integrables según Riemann, dado que, por ejemplo, la función de Dirichlet $\chi(x) \in \Lambda(Q)$ es acotada y no se integra según Riemann.

Luego, al construir la integral lebesguiana de la función $f(x)$ no se suponía que ésta era acotada, por ejemplo, la función no acotada $|x|^{-\alpha}$ pertenece a $\Lambda(|x| < 1)$, si $0 < \alpha < n$. En el curso de «Análisis matemático» se considera cómo la integral de Riemann se generaliza para funciones no acotadas (integral impropia). No es difícil mostrar que la función $f(x)$, absolutamente integrable según Riemann (en sentido impropio), pertenece a $\Lambda(Q)$ y su integral lebesguiana coincide con la integral impropia de Riemann.

Ha de notarse que en los dominios cuya dimensión no es menor que 2, todas las funciones integrables según Riemann en sentido impropio son funciones absolutamente integrables de manera impropia. Por esta razón, sólo en el caso unidimensional de la existencia de la integral impropia de Riemann de cierta función, la integrabilidad de dicha función según Lebesgue puede no deducirse. La función $\frac{1}{x} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$, definida en $(0, 1)$, es un ejemplo de tal función.

6. Condiciones suficientes de integrabilidad según Lebesgue. Teorema de Levi. Ahora pasemos a establecer la relación existente entre la cualidad de una función de ser medible y la de ser integrable.

Por definición, una función integrable es medible. Sin embargo, no toda función medible es integrable, como por ejemplo, la función $|x|^{-\alpha}$, $\alpha > n$, en la bola $\{|x| < 1\}$. Establezcamos algunas condiciones suficientes para que una función sea integrable.

TEOREMA 4 (lema de Fatou). *Si la sucesión $f_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, de funciones no negativas, integrables en casi todo punto converge en casi todo punto hacia $f(x)$, y $\int_Q f_k\,dx \leqslant A$, $k = 1, 2, \ldots$, entonces $f(x)$ es integrable y $\int_Q f\,dx \leqslant A$.*

Consideremos para $m \leqslant k$ las funciones integrables $\psi_{mk}(x) = \min\limits_{m \leqslant i \leqslant k} (f_i(x))$. Ya que en casi todo punto $\psi_{mk}(x) \downarrow \psi_m(x) = \inf\limits_{i \geqslant m} (f_i(x))$ cuando $k \to \infty$, y en casi todo punto $0 \leqslant \psi_{mk}(x) \leqslant f_m(x)$, entonces, de la desigualdad (6) y del teorema de Levi se deduce que $\psi_m(x) \in \Lambda(Q)$ y $0 \leqslant \int_Q \psi_m(x)\,dx \leqslant \int_Q f_m(x)\,dx \leqslant A$. Lo afirmado por el teorema se desprende ahora del teorema de Levi, dado que en casi todo punto $\psi_m(x) \uparrow f(x)$ cuando $m \to \infty$.

Otra condición necesaria para que la función pertenezca al conjunto $\Lambda(Q)$ está indicada en la siguiente afirmación.

TEOREMA 5. *Si la función $f(x)$ es medible y en casi todo punto $|f(x)| \leqslant g(x)$, donde $g(x)$ es una función integrable, entonces $f(x)$ es también integrable.*

De este modo, una función medible con módulo integrable es integrable y, en particular (¡el dominio Q es acotado!), es integrable cualquier función medible acotada (es decir, $|f(x)| \leqslant$ const en casi todo punto de Q).

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 5. Como la función $f(x)$ es medible, existe una sucesión $f_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, de funciones integrables (en realidad, incluso continuas en Q), que converge hacia $f(x)$ casi siempre en Q. Una sucesión de funciones integrables $f_k'(x) = \max(-g(x), \min(f_k(x), g(x)))$, $k = 1, 2, \ldots$, también converge hacia $f(x)$ en casi todo punto, y, además, posee la propiedad: $|f_k'(x)| \leqslant g(x)$ en casi todo punto, $k = 1, 2, \ldots$ Entonces, la sucesión $f_k'(x) + g(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, se compone de funciones no negativas en casi todo punto, converge hacia $f + g$ en casi todo punto y para todo k $\int_Q (f_k' + g)\,dx \leqslant 2\int_Q g\,dx$. Según el lema de Fatou, $f + g \in \Lambda(Q)$, y, por lo tanto, también $f \in \Lambda(Q)$. El teorema está demostrado.

7. Teorema de Lebesgue sobre el paso al límite bajo el signo de integral. Uno de los resultados más importantes de la teoría de integración lebesguiana es el siguiente teorema de Lebesgue sobre la posibilidad de paso al límite bajo el signo de integral.

TEOREMA 6. (Teorema de Lebesgue). *Si una sucesión de funciones medibles $f_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, converge casi siempre en Q hacia cierta función $f(x)$, y en casi todo punto $|f_k(x)| \leqslant g(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, donde $g(x)$ es integrable, entonces $f(x)$ también es integrable y*

$$\lim_{k\to\infty} \int_Q f_k(x)\,dx = \int_Q f\,dx. \tag{7}$$

En virtud del teorema 5, las funciones $f_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, son integrables.

Consideremos las funciones medibles $\varphi_s(x) = \sup\limits_{k\geqslant s}(f_k(x))$ y $\psi_s(x) = \inf\limits_{k\geqslant s}(f_k(x))$, $s = 1, 2, \ldots$ Puesto que en casi todo punto $|\varphi_s(x)| \leqslant g(x)$ y $|\psi_s(x)| \leqslant g(x)$, $s = 1, 2, \ldots$, las funciones $\varphi_s(x)$ y $\psi_s(x)$, $s = 1, 2, \ldots$, son también integrables. Mas, $\varphi_s(x) \downarrow f(x)$, $\psi_s(x) \uparrow f(x)$ en casi todo punto cuando $s \to \infty$; por lo tanto, según el teorema de Levi, $f(x) \in \Lambda(Q)$ y $\int\limits_Q f\,dx = \lim\limits_{s\to\infty} \int\limits_Q \varphi_s\,dx = \lim\limits_{s\to\infty} \int\limits_Q \psi_s\,dx$. Ahora, la igualdad 7 se desprende de las desigualdades obvias $\psi_s(x) \leqslant f_s(x) \leqslant \varphi_s(x)$ en casi todo punto, $s = 1, 2, \ldots$ El teorema está demostrado.

La igualdad (7) puede no tener lugar, si la sucesión no es mayorada por la función integrable. Por ejemplo, una sucesión $f_k(x) = \frac{k^2|x|^k}{\sigma_n}(1-|x|)$, $k = 1, 2, \ldots$, en la que σ_n es el área de la superficie de una esfera unitaria en un espacio n-dimensional, dada en la bola $Q = \{|x| < 1\}$, converge a cero casi siempre en $\overline{Q}$, pero $\int\limits_Q f_k\,dx = \frac{k^2}{(k+n)(k+n+1)} \to 1$, cuando $k \to \infty$.

Del teorema de Lebesgue se deduce:

TEOREMA 7. *Supongamos que para cierto $s \geqslant 0$ la función $f(x, y)$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in Q \subset R_n$, $y = (y_1, \ldots, y_m) \in \overline{\Omega} \subset R_m$, pertenece, para casi todos los $x \in Q$, al espacio $C^s(\overline{\Omega})$ y para todos los $y \in \overline{\Omega}$ y $|\alpha| \leqslant s$ las funciones $D_y^\alpha f(x, y)$ son medibles y $|D_y^\alpha f(x, y)| \leqslant g(x)$ para casi todos los $x \in Q$, donde $g(x)$ es una finción integrable en Q. Entonces, $\int\limits_Q f(x, y)\,dx \in C^s(\overline{\Omega})$.*

Empleando el teorema de Lebesgue es fácil demostrar que el límite $f(x)$ de una sucesión convergente $f_k(x)$, $k = 1, \ldots 2$, de funciones medibles casi siempre es una función medible. Efectivamente, para cualquier $k=1, 2, \ldots$ la función $g_k(x)=\frac{f_k(x)}{1+|f_k(x)|}$ es medible y en casi todo punto $|g_k(x)|\leq 1$. Por eso, según el teorema de Lebesgue, la función $g(x)=\frac{f(x)}{1+|f(x)|}$, que es el límite de la sucesión $g_k(x)$, $k=1, 2, \ldots$, convergente en casi todo punto, es integrable en el dominio (acotado) Q y, por lo tanto, es medible. Por consiguiente, dado que $|g(x)|\neq 1$ en casi todo punto, será también medible la función $f(x)=\frac{g(x)}{1-|g(x)|}$.

8. Cambio de variables bajo el signo de la integral. En lo que se refiere al cambio de variables independientes, la integral de Lebesgue se comporta de modo análogo a la de Riemann.

Supongamos que la transformación

$$y=y(x)\quad (y_i=y_i(x_1, \ldots, x_n),\quad i=1, \ldots, n), \tag{8}$$

continuamente diferenciable en el dominio Q, representa biunívocamente el dominio Q en el dominio Q'. Mostremos primero que *esta transformación convierte un conjunto de medida nula en otro conjunto de medida nula.*

Efectivamente, sea E, $E\subset Q$, un conjunto de medida nula. Puesto que la unión de un número numerable de conjuntos de medida nula es un conjunto de medida nula, será suficiente mostrar que, realizándose la transformación (8), la imagen del conjunto $E_\delta=E\cap Q_\delta$ para cualquier $\delta>0$ suficientemente pequeño es un conjunto de medida nula.

Elijamos $\varepsilon>0$ de modo arbitrario. El conjunto E_δ puede ser cubierto por un sistema numerable de cubos cuyo volumen sumario sea menor que ε. Se puede considerar que todos los cubos de este cubrimiento tienen diámetros menores que $\delta/2$ y, por lo tanto, todos ellos pertenecen a $Q_{\delta/2}$. Puesto que cualquier cubo de diámetro d en este sistema se convierte, al realizarse la transformación (8), en un dominio de diámetro $d'\leq d\sqrt{n}\max\limits_{\substack{1\leq i\leq n\\ x\in\overline{Q}_{\delta/2}}}|\nabla y_i|=Cd$, la imagen del conjunto E_δ puede ser cubierta por un sistema numerable de cubos de volumen sumario menor que $C^n(\sqrt{n})^n\varepsilon$. La afirmación queda demostrada.

TEOREMA 8. *Supongamos que la transformación* (8), *continuamente diferenciable en* Q, *representa biunívocamente* Q *en el dominio* Q', *siendo el* jacobiano $J(x)$ *distinto de cero en* Q. *Para que la función* $f(y)$ *pertenezca a* $\Lambda(Q')$, *es necesario y suficiente que la función* $f(y(x))\,|J(x)|$ *pertenezca a* $\Lambda(Q)$. *En este caso*

$$\int\limits_{Q'} f(y)\,dy=\int\limits_{Q} f(y(x))\,|J(x)|\,dx. \tag{9}$$

La transformación inversa a (8) convierte biunívocamente Q' en Q, es continuamente diferenciable en Q' y tiene en Q' un jacobiano diferente de cero. Por esta razón es suficiente demostrar el teorema 8 sólo en una dirección. Aquí podemos limitarnos a considerar el caso en que la función $f(y) \in \Lambda_1(Q')$ y $f(y) \geqslant 0$ en casi todo punto.

Supongamos que $f(y)$ no es negativa en casi todo punto y pertenece a $\Lambda_1(Q')$ y sea $f_k(y)$, $k = 1, 2, \ldots$, una sucesión de funciones de $C(\overline{Q'})$ cada una de las cuales puede considerarse no negativa, $f_k(y) \uparrow f(y)$ en casi todo punto de Q' cuando $k \to \infty$. Analicemos la sucesión de funciones $f'_k(y) = f_k(y)\zeta(k\rho(y))$, $k = 1, 2, \ldots$, continuas en $\overline{Q'}$; a función $\zeta(t)$ en esta sucesión está definida en $[0, \infty]$ y es nula cuando $0 \leqslant t \leqslant 1/2$, es igual a $2t - 1$ cuando $1/2 < t < 1$, y es igual a la unidad para $t \geqslant 1$, mientras que $\rho(y)$ representa la distancia del punto $y \in Q'$ al contorno $\partial Q'$ ($\rho(y) \in C(\overline{Q'})$).

Es evidente que para cualquier k en casi todo punto de Q' $f'_k(y) \leqslant f_k(y) \leqslant f(y)$ $\Big($de lo cual se deduce que la sucesión $\int\limits_{Q} f'_k\,dy$, $k = 1, 2, \ldots$ es acotada$\Big)$ y $f'_k(y) \uparrow f(y)$ en casi todo punto de Q' cuando $k \to \infty$. Por consiguiente,

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{Q'} f'_k(y)\,dy = \int\limits_{Q'} f(y)\,dy$$

Debido a la continuidad de las funciones $f'_k(y)$ en Q' resulta que $\int\limits_{Q'} f'_k(y)\,dy = \int\limits_{Q} f'_k(y(x))\,|J(x)|\,dx$, $k = 1, 2, \ldots$ Por esto, la función $f(y(x))\,|J(x)|$, que en casi todo punto de Q es el límite de la sucesión $f_k(y(x))\,|J(x)|$, $k = 1, 2, \ldots$, (convergente monótona no decreciente) de funciones en $C(\overline{Q})$ con sucesión acotada de integrales, es integrable en Q y se cumple la igualdad (9). El teorema está demostrado.

OBSERVACIÓN. Del teorema 8 se deduce inmediatamente que si en el dominio Q tienen lugar las desigualdades $C_0 \leqslant |J(x)| \leqslant C_1$ (donde C_0 y C_1 son ciertas constantes positivas), la condición necesaria y suficiente para que la función $f(y)$ sea integrable en Q' es que sea integrable en Q la función $f(y(x))$. En este caso son válidas las desigualdades

$$C_0 \int\limits_{Q} |f(y(x))|\,dx \leqslant \int\limits_{Q} |f(y)|\,dy \leqslant C_1 \int\limits_{Q} |f(y(x))|\,dx. \qquad (10)$$

9. Conjuntos medibles. Integrales extendidas a los conjuntos medibles. Examinemos un subconjunto E del dominio Q. La función $\chi_E(x)$, igual a la unidad para $x \in E$ y nula para $x \in Q \setminus E$, lleva el nombre de *función característica* del conjunto E.

El conjunto E se llama *medible*, si es medible su función característica. *La medida* del conjunto medible E (mes E) se define por la igualdad

$$\operatorname{mes} E = \int\limits_Q \chi_E(x)\, dx \tag{11}$$

(la integral en el segundo miembro tiene sentido debido al teorema 5).

Si Q' es un subdominio del dominio Q, será medible, dado que $\chi_{Q'}(x) = \lim\limits_{\delta \to 0} \zeta_\delta(x)$, donde $\zeta_\delta(x)$ es una función cortante para el dominio Q'. En este caso mes $Q' = |Q'|$.

Los conjuntos de medida nula definidos en el punto 1 son medibles y ellos, y sólo ellos, tienen medida igual a cero (según la definición que acabamos de citar). Para demostrar esta afirmación, basta hacer uso del teorema 3, punto 6.

Si E es un subconjunto medible del dominio Q y $f(x)$, una función integrable en Q, según la definición, vamos a considerar esta función integrable también en E, con la particularidad de que la integral en E la definiremos por la fórmula

$$\int\limits_E f\, dx = \int\limits_Q f\chi_E\, dx \tag{12}$$

(la integral en el segundo miembro tiene sentido, como en el caso anterior, en virtud del teorema 5).

Siendo E un subdominio Q' del dominio Q, las nuevas definiciones de la integrabilidad y de la integral en Q' no contradicen, naturalmente (lo que se comprueba con facilidad), las definiciones correspondientes que fueron aceptadas antes (p. 4) inmediatamente para Q'.

10. Continuidad absoluta de una integral. Llamamos *continuidad absoluta de la integral de Lebesgue* a la siguiente propiedad.

TEOREMA 9. *Supongamos que la función $f(x)$ es integrable en Q. En este caso, para cualquier $\varepsilon > 0$ se puede indicar un $\delta > 0$ tal que para un conjunto medible arbitrario $E \subset Q$, mes $E < \delta$, se cumpla la desigualdad*

$$\left| \int\limits_E f\, dx \right| < \varepsilon. \tag{13}$$

Será suficiente demostrar este teorema para la función $f(x)$ de $\Lambda_1(Q)$, con la particularidad de que la función citada podemos considerarla no negativa en casi todo punto.

Tomemos arbitrariamente $\varepsilon > 0$ y escojamos una función $f_\varepsilon(x) \in C(\overline{Q})$ de tal modo que $f(x) \geqslant f_\varepsilon(x) \geqslant 0$ en casi todo punto de Q y que $0 \leqslant \int\limits_Q f\,dx - \int\limits_Q f_\varepsilon\,dx \leqslant \varepsilon/2$. Entonces, $\int\limits_E f\,dx = \int\limits_Q f\chi_E\,dx = \int\limits_Q (f-f_\varepsilon)\chi_E\,dx + \int\limits_Q f_\varepsilon\chi_E\,dx \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + M_\varepsilon$ mes E, donde $M_\varepsilon = \max\limits_{x\in\overline{Q}} f_\varepsilon(x)$. Por esto, para que se cumpla la desigualdad (13) basta tomar a título de δ el número $\varepsilon/(2M_\varepsilon)$. El teorema queda demostrado.

11. Relación existente entre integrales múltiples y reiteradas. Volvamos ahora al problema sobre la reducción de la integral múltiple de Lebesgue a las reiteradas y simultáneamente al problema de permutación de integrales.

Sea Q_n un dominio acotado n dimensional de las variables $x = (x_1, \ldots, x_n)$, y Q_m, un dominio acotado m-dimensional de las variables $y = (y_1, \ldots, y_m)$. En el dominio acotado $Q_{m+n} = Q_m \times Q_n$, perteneciente al espacio $(m+n)$-dimensional de las variables (x, y), examinemos la función $f(x, y)$.

TEOREMA 10 (Teorema de Fubini). Supongamos que la función $f(x, y)$ es integrable en Q_{m+n}. En este caso, $f(x, y)$ es integrable respecto a $y \in Q_m$ para casi todos los $x \in Q_n$, e integrable respecto a $x \in Q_n$ para casi todos los $y \in Q_m$; las funciones $\int\limits_{Q_m} f(x, y)\,dy$ y $\int\limits_{Q_n} f(x, y)\,dx$ son integrables respecto a $x \in Q_n$ y respecto a $y \in Q_m$, respectivamente, y

$$\iint\limits_{Q_{m+n}} f\,dx\,dy = \int\limits_{Q_n} dx \int\limits_{Q_m} f\,dy = \int\limits_{Q_m} dy \int\limits_{Q_n} f\,dx. \tag{14}$$

Por supuesto, es suficiente demostrar el teorema de Fubini (véase el punto 9) para el caso en que Q_n es un cubo $K_n = \{|x_i| < a, i = 1, \ldots, n\}$, Q_m es un cubo $K_m = \{|y_i| < a, i = 1, \ldots, m\}$ y Q_{m+n} es un cubo $K_{m+n} = \{|x_i| < a, |y_j| < a, i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m\}$, siendo siempre $a > 0$. Antes de proceder a esta demostración, demostremos la siguiente afirmación.

LEMA 4. *Sea E un conjunto de medida nula $(m+n)$-dimensional dispuesto en K_{m+n}, y sean $E_2(\overline{x})$ y $E_1(\overline{y})$ sus secciones, m-dimensional y n-dimensional, respectivamente, de este conjunto por los planos $x = \overline{x}$ e $y = \overline{y}$. Para casi todos los $x \in K_n$, el conjunto $E_2(x)$ tiene la medida nula m-dimensional y para casi todos los $y \in K_m$ el conjunto $E_1(y)$ tiene la medida nula n-dimensional.*

En virtud del lema 1 (p.1), el conjunto E puede ser cubierto por un sistema numerable de cubos (cuyo volumen sumario es finito) de tal modo que cada uno de sus puntos pertenezca a un número infinito de cubos. En este caso podemos considerar que las aristas de los cubos son paralelas a los planos coordenados. Una serie compuesta por las integrales de las funciones características $\chi_k(x, y)$ de estos cubos converge. Ya que $\int\limits_{K_{m+n}} \chi_k(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_{K} dx \int\limits_{K_m} \chi_k\,dy$, de acuerdo con el corolario de los teoremas (3) y (5) (punto 6), una serie de las integrales $\int\limits_{K_m} \chi_k(x, y)\,dy$ converge para casi todos los puntos x. Lo último significa que para casi todos los x el conjunto $E_2(x)$ resulta cubierto por un número numerable de cubos m-dimensionales de volumen sumario finito, con la particularidad de que cada punto del conjunto pertenece a un número infinito de cubos. El lema está demostrado.

Pasando a la demostración del teorema de Fubini, señalemos ante todo que podemos limitarnos al caso en que $f(x, y) \in \Lambda_1(K_{m+n})$.

Tomemos tal sucesión de funciones $f_k(x, y)$, $k = 1, 2, \ldots$, de $C(\overline{K}_{m+n})$ que $f_k(x, y) \uparrow f(x, y)$ casi siempre en K_{m+n}. Designemos con E un conjunto de medida nula $(m+n)$-dimensional tal que para todos los $(x, y) \in K_{m+n} \setminus E$ la sucesión $f_k(x, y)$ converge de manera monótona hacia $f(x, y)$.

Según la definición de la integral, para $k \to \infty$

$$\int\limits_{K_n} dx \int\limits_{K_m} f_k(f, y)\,dy = \int\limits_{K_{m+n}} f_k(x, y)\,dx\,dy \to \int\limits_{K_{m+n}} f\,dx\,dy.$$

De acuerdo con el teorema de Levi, la sucesión monótona de funciones $F_k(x) = \int\limits_{K_m} f_k(x, y)dy$, $k = 1, 2, \ldots$, pertenecientes a $C(\overline{K}_n)$, converge casi siempre en K_n hacia cierta función $F(x)$ integrable en K_n y

$$\int\limits_{K_n} F\,dx = \lim_{k\to\infty} \int\limits_{K_n} F_k(x)\,dx = \int\limits_{K_{m+n}} f\,dx\,dy. \tag{15}$$

Tomemos un punto arbitrario $\overline{x} \in K_n$ en el cual la sucesión numérica $F_k(\overline{x})$, $k = 1, 2, \ldots$, converge hacia $F(\overline{x})$ y el conjunto $E_2(\overline{x})$ (la intersección del conjunto E con el plano $x = \overline{x}$) tiene medida nula m-dimensional. En virtud del lema 4, el conjunto de puntos de K_n, privados de estas propiedades, tiene medida nula n-dimensional. La sucesión $f_k(\overline{x}, y)$, $k = 1, \ldots$, converge monótonamente hacia $f(\overline{x}, y)$ para todos los $y \in K_m \setminus E_2(\overline{x})$ (por lo tanto, en casi todo punto de K_m). El teorema de Levi afirma que $f(\overline{x}, y) \in \Lambda(K_m)$ y, cuando $k \to \infty$,

$$\int\limits_{K_m} f_k(\overline{x}, y)\,dy \uparrow \int\limits_{K_m} f(\overline{x}, y)\,dy. \tag{16}$$

Por consiguiente, las funciones $\int\limits_{K_m} f(x, y)\,dy$ y $F(x)$ coinciden casi siempre en K_n. El teorema queda demostrado.

En lo sucesivo emplearemos con frecuencia la siguiente afirmación que se deduce del teorema de Fubini.

COROLARIO. *Si la función $f(x, y)$, no negativa en casi todo punto, es medible en Q_{m+n} y en (14) existe una de las integrales reiteradas (es decir, por ejemplo, que para casi todos los x la función $f(x, y)$ es integrable respecto a y, mientras que la función $\int\limits_{Q_m} f\,dy$ es integrable respecto a x), entonces la función $f(x, y)$ es integrable en Q_{m+n} y, consecuentemente, existe la segunda integral reiterada y tiene lugar la igualdad* (14).

Para demostrar esta afirmación es suficiente comprobar que $f(x, y) \in \Lambda(Q_{m+n})$. La sucesión $f_k(x, y) = \min(f(x, y), k)$, $k = 1, 2, \ldots$, posee las siguientes propiedades: $f_k(x, y) \uparrow f(x, y)$ en casi todo punto de Q_{m+n},

$$\int\limits_{Q_{m+n}} f_k(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_{Q_n} dx \int\limits_{Q_m} f_k(x, y)\,dy \leqslant \int\limits_{Q_n} dx \int\limits_{Q_m} f\,dy$$

(aquí, la igualdad está escrita basándonos en el teorema de Fubini aplicado a la función $f_k(x, y)$ que es medible y acotada y, por consiguiente, integrable en Q_{m+n}. La pertenencia de la función $f(x, y)$ a $\Lambda(Q_{m+n})$ se deduce, seguidamente, del teorema de Levi.

12. Integrales de tipo potencial. Sea $\rho(x)$ una función medible y acotada en casi todo punto de Q, $|\rho(x)| \leqslant M$ casi siempre. En este caso para todo $x \in R_n$ está definida la función $u(x) = \int\limits_Q \frac{\rho(y)\,dy}{|x-y|^\alpha}$, $\alpha < n$, llamada *integral de tipo potencial.*

Mostremos que $u(x) \in C(R_n)$. Esto es obvio para $\alpha \leqslant 0$. Supongamos ahora que $\alpha > 0$. Notemos ante todo que para cualesquiera puntos x^0 y x, como también para cualquier $\delta > 0$, se verifica la desigualdad

$$|u(x^0) - u(x)| \leqslant \int\limits_Q |\rho(y)| \left| \frac{1}{|x^0-y|^\alpha} - \frac{1}{|x-y|^\alpha} \right| dy \leqslant$$

$$\leqslant M \int\limits_{|x^0-y|<\delta} \left(\frac{1}{|x^0-y|^\alpha} + \frac{1}{|x-y|^\alpha} \right) dy +$$

$$+ M \int\limits_{Q \cap (|x^0-y| > \delta)} \left| \frac{1}{|x^0-y|^\alpha} - \frac{1}{|x-y|^\alpha} \right| dy. \qquad (17)$$

Fijemos x^0 y tomemos arbitrariamente $\varepsilon>0$. Como para $\alpha\geqslant 0$ y $x\neq x^0$, tenemos:

$$\inf_{y\in(|x-y|<\delta)\cap(|x^0-y|>\delta)} \frac{1}{|x-y|^\alpha}=\frac{1}{\delta^\alpha}\geqslant \sup_{y\in(|x-y|>\delta)\cap(|x^0-y|<\delta)} \frac{1}{|x-y|^\alpha}$$

y, como

$$\operatorname{mes}\{(|x-y|<\delta)\cap(|x^0-y|>\delta\}=$$
$$=\operatorname{mes}\{(|x-y|>\delta)\cap(|x^0-y|<\delta)\},$$

entonces

$$\int\limits_{|x^0-y|<\delta}\frac{dy}{|x-y|^\alpha}\leqslant\int\limits_{|x^0-y|<\delta}\frac{dy}{|x^0-y|^\alpha}.$$

Por ello,

$$\int\limits_{x^0-y|<\delta}\left(\frac{1}{|x^0-y|^\alpha}+\frac{1}{|x-y|^\alpha}\right)dy\leqslant 2\int\limits_{|x^0-y|<\delta}\frac{dy}{|x^0-y|^\alpha}=\mathrm{const}\cdot\delta^{n-\alpha}$$

Por consiguiente, se puede hallar (y fijar) tal $\delta>0$, que el primer sumando en el segundo miembro (17) sea $<\varepsilon/2$.

La función $F(x,\ y)=\left|\frac{1}{|x^0-y|^\alpha}-\frac{1}{|x-y|^\alpha}\right|$ es continua en el conjunto cerrado $\Omega=\left\{|x-x^0|\leqslant\frac{\delta}{2},\ y\in\overline{Q}\cap(|y-x^0|\geqslant\right.$ $\left.\geqslant\delta)\right\}$ y $F(x,y)\Big|_{x=x^0}=0$. Por eso, puede encontrarse tal η, $0<\eta<$ $<\frac{\delta}{2}$, que $F(x,y)<\frac{\varepsilon}{2M|Q|}$ cuando $|x-x^0|<\eta$ para todos los $y\in\overline{Q}\cap(|y-x^0|\geqslant\delta)$.

Por lo tanto, cuando $|x-x^0|<\eta$, el segundo sumando del segundo miembro (17) tampoco supera de $\varepsilon/2$. De este modo, cuando $|x-x^0|<\eta$, será válida la desigualdad $|u(x^0)-u(x)|<\varepsilon$, es decir, la función $u(x)$ es continua.

Sea $n-\alpha>1$. Mostremos que en este caso $u(x)$ es continuamente diferenciable en R_n y que

$$u_{x_i}(x)=\int\limits_Q\rho(y)\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{|x-y|^\alpha}\right)dy=\alpha\int\limits_Q\rho(y)\frac{y_i-x_i}{|x-y|^{\alpha+2}}\,dy.$$

$$\text{Como }\left|\frac{y_i-x_i}{|x-y|^{\alpha+2}}\right|\leqslant\frac{1}{|x-y|^{\alpha+1}},\quad i=1,\ \ldots,\ n,$$

razonando de manera análoga a la expuesta más arriba para la función $u(x)$, se establece que las funciones

$$u_i(x)=\alpha\int\limits_Q\rho(y)\frac{y_i-x_i}{|x-y|^{\alpha+2}}\,dy,\qquad i=1,\ \ldots,\ n,$$

son continuas en R_n. Luego, de acuerdo con el teorema de Fubini, para cualquier i, $i = 1, \ldots, n$,

$$\int_{x_i^0}^{x_i} u_i(x)\,dx_i = \alpha \int_{x_i^0}^{x_i} dx_i \int_Q \rho(y) \frac{y_i - x_i}{|x-y|^{\alpha+2}}\,dy =$$

$$= \alpha \int_Q \rho(y)\,dy \int_{x_i^0}^{x_i} \frac{y_i - x_i}{|x-y|^{\alpha+2}}\,dx_i = \int_Q \rho(y)\,dy \int_{x_i^0}^{x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{|x-y|^{\alpha}}\right) dx_i =$$

$$= u(x) - u\left(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i^0, x_{i+1}, \ldots, x_n\right).$$

Por eso,

$$u_i(x) = u_{x_i}(x), \quad i = 1, \ldots, n.$$

La afirmación queda demostrada.

Del mismo modo se establece que si $n - \alpha > s$, donde s es un número entero, $u(x)$ tiene derivadas continuas de un orden hasta s inclusive y para cualquier $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $|\alpha| \leqslant s$,

$$D^{\alpha} u(x) = \int_Q \rho(y)\, D_x^{\alpha} \frac{1}{|x-y|^{\alpha}}\,dy.$$

Observemos que la función

$$u_1(x) = \int_Q \rho(y) \ln|x-y|\,dy,$$

llamada *potencial logarítmica*, es $(n-1)$ veces continuamente diferenciable en R_n y para cualquier α, $|\alpha| \leqslant n-1$,

$$D^{\alpha} u_1(x) = \int_Q \rho(y)\, D_x^{\alpha} \ln|x-y|\,dy.$$

13. Integral de Lebesgue de las funciones de valores complejos. Supongamos que la función $f(x)$, definida en el dominio Q, es de valores complejos

$$f(x) = \mathrm{Re}\, f(x) + i\, \mathrm{Im}\, f(x).$$

La función $f(x)$ se denomina medible en Q, si son medibles en Q las funciones $\mathrm{Re}\, f$ e $\mathrm{Im}\, f$. La función $f(x)$ se llama integrable en Q, si son integrables en Q las funciones $\mathrm{Re}\, f$ e $\mathrm{Im}\, f$. En este caso la integral de la función $f(x)$ se define por la igualdad

$$\int_Q f\,dx = \int_Q \mathrm{Re}\, f\,dx + i \int_Q \mathrm{Im}\, f\,dx.$$

Sabemos que $\frac{1}{2}(|\operatorname{Re} f| + |\operatorname{Im} f|) \leqslant |f| \leqslant |\operatorname{Re} f| + |\operatorname{Im} f|$; por ello, para que la función medible $f(x)$ sea integrable, es necesario y suficiente que sea integrable la función $|f(x)|$.

14. Integral de Lebesgue en una superficie $(n-1)$-dimensional. Sea S una superficie $(n-1)$-dimensional (de la clase C^1) y sea S_m, $m = 1, \ldots, N$, el cubrimiento de la superficie S con trazos simples, $S = \bigcup_{m=1}^{N} S_m$ (véase el cap. 1, Introducción). Cada trozo simple se describe por la ecuación

$$x_p = \varphi_m(x_1, \ldots, x_{p-1}, x_{p+1}, \ldots, x_n),$$
$$(x_1, \ldots, x_{p-1}, x_{p+1}, \ldots, x_n) \in D_m, \quad \varphi_m \in C^1(\overline{D}_m) \quad (18)$$

D_m es una proyección S_m en el plano de coordenadas $x_p = 0$, $1 \leqslant p = p(m) \leqslant n$, y representa un dominio $(n-1)$-dimensional con contorno de la clase C^1).

Con ayuda de la fórmula (18) se establece una correspondencia biunívoca entre los puntos $(x_1, \ldots, x_{p-1}, x_{p+1}, \ldots, x_n)$ del conjunto $\overline{D}_m$ y los puntos $(x_1, \ldots, x_{p-1}, x_p, \ldots, x_n)$ pertenecientes a $\overline{S}_m$: a cada punto $(x_1, \ldots, x_{p-1}, \varphi_m(x_1, \ldots, x_{p-1}, x_{p+1}, \ldots, x_n), x_{p+1}, \ldots, x_n) \in \overline{S}_m$ se le pone en correspondencia el punto $(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}, x_{p+1}, \ldots, x_n) \in \overline{D}_m$ (su proyección sobre el plano $x_p = 0$).

Supongamos que para cierto m, $m = 1, \ldots, N$, $\overline{S}_m$ contiene el conjunto E. Designemos con $\mathscr{E}$ la preimagen de E que pertenece a $\overline{D}_m$ para esta representación. Diremos que E es un conjunto de medida nula superficial, si $\mathscr{E}$ es un conjunto de la medida nula $(n-1)$-dimensional.

El conjunto E, perteneciente a S, se denomina conjunto de *medida nula superficial*, si cada uno de los conjuntos $E \cap S_m$, $m = 1, \ldots N$, es un conjunto de medida nula superficial.

Es fácil mostrar que la propiedad del conjunto $E \subset S$ de ser conjunto de las superficies de medida nula no dependa de cómo se escoge el cubrimiento $S_1, \ldots, S_N$ de la superficie S.

El concepto de conjunto de medida nula permite (análogamente al caso del dominio n-dimensional, véanse pp. 1—4) introducir el concepto de convergencia en casi todo punto en S y otro, relacionado con este último, de una función medible en S e integrable en esta superficie según Lebesgue.

Una función dada en S se llama *medible* (en S), si en casi todo punto de S es el límite de la sucesión convergente de funciones de $C(\overline{S})$.

Diremos que una función de valores reales $f(x)$ pertenece a la clase $\Lambda_1(S)$, si casi siempre en S es el límite de una sucesión monótona no decreciente y convergente $f_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, de funciones continuas en $\overline{S}$ con una sucesión acotada de integrales superficiales (según Riemann):

$\int\limits_S f_k(x)\,dS \leqslant C$, $k=1, 2, \ldots$. Una integral superficial (según Lebesgue) de la función $f(x)$ de la clase $\Lambda_1(S)$ se determina mediante la fórmula $\int\limits_S f\,dS = \sup\limits_k \int\limits_S f_k\,dS = \lim\limits_{k\to\infty} \int\limits_S f_k\,dS$.

Una función de valores reales $f(x)$ dada en S, se llama integrable según Lebesgue en S, si puede ser representada en la forma

$$f(x) = f'(x) - f''(x),$$

donde f' y f'' son funciones de $\Lambda_1(S)$; con ello, la integral de Lebesgue de la función f respecto a S se define por la fórmula

$$\int\limits_S f\,dS = \int\limits_S f'\,dS - \int\limits_S f''\,dS.$$

Sea f una función dada en S, y sea $S_1, \ldots, S_N$ cierto cubrimiento de la superficie S con trozos simples. Designemos mediante $f^m(x_1, \ldots, x_{p(m)-1}, x_{p(m)+1}, \ldots, x_n)$ la función $f(x_1, \ldots, x_{p(m)-1}, \varphi_m(x_1, \ldots, x_{p(m)-1}, x_{p(m)+1}, \ldots, x_n), x_{p(m)+1}, \ldots, x_n)$ que está dada en D_m.

Mostremos que *la función f es medible cuando, y sólo cuando, son medibles todas las funciones f^m, $m = 1, \ldots, N$; la función f es integrable en S cuando, y sólo cuando, es integrable en D_m, $m = 1, \ldots, N$, cada una de las funciones f^m, siendo en este caso*

$$\int\limits_S f\,dS = \sum_{m=1}^{N} \int\limits_{D'_m} f^m \cdot \sqrt{1+|\nabla\varphi_m|^2}\,dx_1 \ldots dx_{p(m-1)}\,dx_{p(m+1)}\,dx_n \quad (19)$$

donde $D'_1 = D_1$, y D'_m es una proyección de $S_m \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{m-1} \overline{S}_i$ sobre el plano $x_{p(m)} = 0$, siempre que $m > 1$.

Si f es medible (integrable), es evidente que es medible (integrable) cada una de las funciones f^m, $m = 1, \ldots, N$.

Mostremos que si son integrables todas las funciones f^m, $m = 1, \ldots, N$, será también integrable la función f (análogamente se deduce la afirmación acerca de la propiedad de ser medible); consideraremos, además (lo que no resta la generalidad de razonamientos), que $f^m \in \Lambda_1(D_m)$ y $f^m \geqslant 0$ casi siempre en D_m, $m = 1, \ldots, N$.

Para cada m, $m = 1, \ldots, N$, tomemos una sucesión monótona no decreciente f_k^m, $k = 1, 2, \ldots$, de funciones no negativas de $C(\overline{D}_m)$

que converge en casi todo punto (en D_m) hacia la función f^m. Examinemos la sucesión Π_k, $k=1, 2, \ldots$, de las divisiones del cubo $(n-1)$-dimensional K que contiene el dominio D_m: Π_1 es una división del cubo K en 2^{n-1} subcubos iguales de arista igual a la mitad de la arista del cubo K; la división Π_2 es el fraccionamiento de la división Π_1 para el cual cada célula (cubo) de Π_1 se divide en 2^{n-1} subcubos iguales, y así sucesivamente. Cualesquiera que sean $m=1, \ldots, N$ y $k=1, 2, \ldots$, designemos mediante $D'_{m,k}$ un conjunto cerrado compuesto por adherencias (de número finito) de todas las células de la división Π_k, que están contenidas en D'_m, y mediante $\tilde{f}^m_k$, una función continua en $\overline{D}_m$, que es nula en $D_m \setminus D'_{m,k}$ e igual en $D'_{m,k}$ a la función $f^m_k \cdot \zeta\,(k \cdot r_{m,k})$, donde $\zeta(t)=0$ cuando $0<t<\frac{1}{2}$, $\zeta(t)=2t-1$ cuando $\frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1$, $\zeta(t)=1$ cuando $t>1$ mientras que $r_{m,k}$ es la distancia del punto $(x_1, \ldots, x_{p(m)-1}, x_{p(m)+1}, \ldots, x_n) \in D'_{m,k}$ al contorno de $D'_{m,k}$. Es evidente que para cualquier m, $m=1, \ldots, N$, la sucesión $\tilde{f}^m_k$, $k=1, 2, \ldots$, converge hacia la función f^m sin decrecer de manera monótona en casi todo punto de D'_m.

Definemos la función $\tilde{\tilde{f}}{}^m_k$, $m=1, \ldots, N$, $k=1, 2, \ldots$, que es continua en S, de la manera siguiente:

$$\text{para } x \in S_m \quad \tilde{\tilde{f}}{}^m_k = \tilde{f}^m_k\,(x_1, \ldots, x_{p(m)-1}, x_{p(m)+1}, \ldots, x_n),$$

$$\text{para } x \in S \setminus S_m \quad \tilde{\tilde{f}}{}^m_k = 0;$$

y sea $f_k = \sum\limits_{m=1}^{N} \tilde{\tilde{f}}{}^m_k$, $k=1, 2, \ldots$. Está claro que cada una de las funciones f_k, $k=1, 2 \ldots$, es continua en $\overline{S}$ y

$$\int\limits_S f_k\,dS = \sum_{m=1}^{N} \int\limits_S \tilde{\tilde{f}}{}^m_k\,dS = \sum_{m=1}^{N} \int\limits_{S_m} \tilde{\tilde{f}}{}^m_k\,dS =$$

$$= \sum_{m=1}^{N} \int\limits_{D_m} \tilde{f}^m_k \sqrt{1+|\nabla\varphi_m|^2}\,dx_1 \ldots dx_{p(m)-1}\,dx_{p(m)+1} \ldots dx_n =$$

$$= \sum_{m=1}^{N} \int\limits_{D'_m} \tilde{f}^m_k \sqrt{1+|\nabla\varphi_m|^2}\,dx_1 \ldots dx_{p(m)-1}\,dx_{p(m)+1} \ldots dx_n. \qquad (20)$$

Además, $f_k \uparrow f$ en casi todo punto de S, cuando $k \to \infty$. En virtud de la integrabilidad en D'_m de la función $f^m \sqrt{1+|\nabla\varphi_m|^2}$ $m=1, \ldots, N$, de (20) se desprende que la sucesión $\int\limits_S f_k\,dS$,

$k=1, 2, \ldots,$ es acotada. Por lo tanto, la función f es integrable en S. Pasando en la igualdad (20) al límite para $k\to\infty$, obtendremos (19).

De lo demostrado se deduce inmediatamente que todas las propiedades establecidas arriba para el dominio n-dimensional son válidas también para las funciones medibles e integrables en S.

§ 2. Espacios lineales normados. Espacio de Hilbert

1. Espacios lineales. Se llama *espacio lineal* el conjunto $\mathcal{F}$, para cuyos elementos están definidas las operaciones de adición y multiplicación por los números reales (complejos) que no nos llevan fuera de $\mathcal{F}$ y que poseen las siguientes propiedades:

a) $f_1 + f_2 = f_2 + f_1$,
b) $(f_1 + f_2) + f_3 = f_1 + (f_2 + f_3)$,
c) en $\mathcal{F}$ existe un elemento o tal que para todo $f \in \mathcal{F}$ $0\cdot f = o$,
d) $(c_1 + c_2) f = c_1f + c_2f$,
e) $c(f_1 + f_2) = cf_1 + cf_2$,
f) $(c_1c_2) f = c_1 (c_2f)$,
g) $1\cdot f = f$

para cualesquiera $f, f_1, \ldots, \in \mathcal{F}$ y cualesquiera números reales (complejos) $c, c_1, \ldots$

En dependencia de por qué números, reales o complejos, se permiten multiplicar los elementos del espacio $\mathcal{F}$, este último se llama *espacio lineal real* o *complejo*. Para concretar, consideraremos en este capítulo sólo el caso de espacios lineales complejos. Las definiciones y los resultados correspondientes se extienden sin dificultades algunas al caso de espacios lineales reales.

Un subconjunto de espacio lineal $\mathcal{F}$, que por sí mismo es espacio lineal, se denomina *variedad lineal* ne el espacio $\mathcal{F}$.

Sea f_m, $m = 1, 2, \ldots$, un sistema numerable (o finito) de elementos del espacio lineal $\mathcal{F}$. Un conjunto de elementos del tipo $c_1f_1 + \ldots + c_kf_k$, cualesquiera que sean k y $c_1, \ldots, c_k$, arbitrarios y complejos, es una variedad lineal en el espacio $\mathcal{F}$ y se llama *variedad lineal tendida sobre los elementos* f_k, $k = 1, 2, \ldots$ Los elementos $f_1, \ldots, f_m$ de $\mathcal{F}$ se denominan *linealmente independientes*, si la igualdad $c_1f_1 + \ldots + c_mf_m = o$ es sólo posible para $c_1 = \ldots = c_m = 0$; en el caso contrario $f_1, \ldots, f_m$ son *linealmente dependientes*. Un conjunto infinito de elementos pertenecientes a $\mathcal{F}$ se llama linealmente independiente, si cualquiera de sus subconjuntos finitos es linealmente independiente.

Una variedad lineal es *de dimensión finita* (*n-dimensional*), cuando en ella existen n elementos independientes y la acumulación de cualesquiera $n+1$ elementos suyos es linealmente dependiente.

Una variedad lineal tendida sobre los elementos linealmente independientes f_k, $k = 1, \ldots, n$, de $\mathcal{F}$ es n-dimensional.

Una variedad lineal se llamará *de dimensión infinita*, si podemos hallar en ella un subconjunto linealmente independiente que conste de un número infinito de elementos.

2. Espacios lineales normados. Un espacio lineal $\mathcal{F}$ se denomina *normado*, si a cada uno de sus elementos f se le puede poner en correspondencia el número real $\| f \| = \| f \|_{\mathcal{F}}$ (*norma* f), con la particularidad de que esta correspondencia tenga las siguientes propiedades:

a) $\| cf \| = | c | \, \| f \|$, para c complejo y $f \in \mathcal{F}$ arbitrarios,

b) $\| f_1 + f_2 \| \leqslant \| f_1 \| + \| f_2 \|$, para cualesquiera $f_i \in \mathcal{F}$, $i = 1, 2$ (desigualdad triangular),

c) $\| f \| \geqslant 0$, siendo $\| f \| = 0$ sólo para $f = o$.

En el espacio lineal normado se puede defindr el concepto de *distancia* $\| f_1 - f_2 \|$ entre dos elementos f_1 y f_2, y junto con ésta, el de convergencia.

La sucesión f_m, $m = 1, 2, \ldots$, de elementos de $\mathcal{F}$ se llama *fundamental*, si $\| f_k - f_m \| \to 0$ cuando $k, m \to \infty$.

La sucesión f_m, $m = 1, 2, \ldots$, de elementos de $\mathcal{F}$ se llama *convergente hacia* $f \in \mathcal{F}$ ($f_m \to f$ cuando $m \to \infty$, o $\lim\limits_{m\to\infty} f_m = f$), si $\| f_m - f \| \to 0$ cuando $m \to \infty$.

Una sucesión no puede converger hacia dos elementos distintos, puesto que si $\| f_m - f \| \to 0$ y $\| f_m - g \| \to 0$, cuando $m \to \infty$, entonces $\| f - g \| = \| f - f_m + f_m - g \| \leqslant \| f_m - f \| + \| f_m - g \| \to 0$ cuando $m \to \infty$, es decir, $\| f - g \| = 0$, de donde $f = g$.

Si $f_m \to f$, entonces $\| f_m \| \to \| f \|$ (*continuidad de la norma*). Efectivamente, en virtud de la desigualdad triangular $\| f_m \| \leqslant \leqslant \| f_m - f \| + \| f \|$ y $\| f \| \leqslant \| f_m - f \| + \| f_m \|$. Por ello, $\| f_m \| - \| f \| \leqslant \| f_m - f \| \to 0$ cuando $m \to \infty$.

Si una sucesión es convergente ($f_m \to f$), también es fundamental, puesto que

$$\| f_k - f_m \| = \| f_k - f + f - f_m \| \leqslant \| f_k - f \| + \| f - f_m \| \to 0 \text{ cuando } k, m \to \infty.$$

La afirmación contraria, en el caso general, no tiene lugar.

El espacio lineal normado se llama *completo*, si para toda sucesión fundamental de sus elementos se puede hallar un elemento de este espacio hacia el cual la sucesión converge.

Un espacio lineal normado completo B se denomina *espacio de Banach*.

Una variedad lineal en el espacio de Banach B que es completa en la norma de B (y, consecuentemente, es de por sí un espacio de Banach de la misma norma) se llama *subespacio* del espacio B. La variedad lineal tendida sobre un número finito de elementos de B es un subespacio del espacio B.

Sea $\mathcal{M}$ una variedad lineal en B. El conjunto $\overline{\mathcal{M}}$ obtenido como resultado de la adición a $\mathcal{M}$ de los elementos límites de todas las sucesiones fundamentales de elementos pertenecientes a $\mathcal{M}$ (en el espacio B toda sucesión fundamental tiene un elemento límite) se llama *adherencia* (en B) de la variedad $\mathcal{M}$.

Es evidente que la adherencia $\overline{\mathcal{M}}$ de la variedad lineal $\mathcal{M}$ es una variedad lineal. Mostremos que es completa. Sea f_k, $k = 1, 2, \ldots$, una sucesión fundamental arbitraria de elementos de $\overline{\mathcal{M}}$, y sea $f = \lim\limits_{k\to\infty} f_k$. Cerciorémonos de que $f \in \overline{\mathcal{M}}$. De la definición de $\overline{\mathcal{M}}$ se deduce que para cualquier $k = 1, 2, \ldots$ existe un elemento $f'_k \in \mathcal{M}$ tal que $\| f'_k - f_k \| < 1/k$. Por esto,

$$\| f - f'_k \| = \| f - f_k + f_k - f'_k \| \leqslant \| f - f_k \| + 1/k \to 0$$

cuando $k \to \infty$, es decir, $f = \lim\limits_{k\to\infty} f'_k$. Lo último precisamente significa que $f \in \overline{\mathcal{M}}$.

Así pues, *la adherencia de una variedad lineal en B es un subespacio.*

La adherencia de una variedad lineal tendida sobre los elementos f_k, $k = 1, 2, \ldots$, se llama *subespacio tendido sobre los elementos indicados.*

El conjunto $\mathcal{M}' \subset B$ se llama acotado, si existe una constante C tal que $\| f \| \leqslant C$ para todo $f \in \mathcal{M}'$.

El conjunto $\mathcal{M}' \subset B$ se llama *siempre denso en B*, si para cualquier elemento $f \in B$ existe una sucesión f'_k, $k = 1, 2, \ldots$, de elementos de $\mathcal{M}'$ convergente hacia f. El espacio de Banach B se denomina *separable*, si existe en él un conjunto numerable siempre denso.

3. Producto escalar. Espacio de Hilbert. Diremos que en el espacio lineal H se ha introducido *un producto escalar*, si a cada par de elementos $h_1, h_2 \in H$ se le ha puesto en correspondencia un número complejo (h_1, h_2) (producto escalar de estos elementos) y que esta correspondencia tiene las siguientes propiedades

a) $(h_1, h_2) = \overline{(h_2, h_1)}$ (en particular, (h, h) es un número real),
b) $(h_1 + h_2, h) = (h_1, h) + (h_2, h)$,
c) $c(ch_1, h_2) = c(h_1, h_2)$, para todo c complejo,
d) $(h, h) \geqslant 0$, siendo $(h, h) = 0$ sólo para $h = o$.

Enunciemos la siguiente importante *desigualdad de Buniakovski*:

$$|(h_1, h_2)|^2 \leqslant (h_1, h_1)\cdot(h_2, h_2), \tag{1}$$

que se verifica para cualesquiera h_1 y h_2 de H. La desigualdad (1) se muestra a las claras, cuando $h_2 = o$. Sea $h_2 \neq o$. Siendo t arbitrario y complejo, $0 \leqslant (h_1 + th_2, h_1 + th_2) = (h_1, h_1) + t\,\overline{(h_1, h_2)} + \bar{t}\,(h_1, h_2) + |t|^2\cdot(h_2, h_2)$. Si $t = -\frac{(h_1, h_2)}{(h_2, h_2)}$, esta desigualdad toma la forma $(h_1, h_1) - \frac{|(h_1, h_2)|^2}{(h_2, h_2)} \geqslant 0$, que es equivalente a (1).

El producto escalar engendra en el espacio H la norma $\|h\| = \sqrt{(h, h)}$. Para la norma introducida de esta manera las propiedades a) y c) son evidentes. Con el fin de demostrar la propiedad b) (desigualdad triangular) emplearemos la desigualdad de Buniakovski

$$\|h_1+h_2\|^2 = \|h_1\|^2 + (h_1, h_2) + (h_2, h_1) + \|h_2\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \|h_1\|^2 + 2\|h_1\|\|h_2\| + \|h_2\|^2 = (\|h_1\| + \|h_2\|)^2.$$

Un espacio lineal continente en producto escalar, completo en la norma engendrada por el mencionado producto (es decir, que el espacio es de Banach en dicha norma), se llama *espacio de Hilbert.*

A la par con la convergencia (según la norma) resulta cómodo introducir en el espacio de Hilbert otro tipo de convergencia. La sucesión h_m, $m = 1, 2, \ldots$, de H se denomina *débilmente convergente* hacia el elemento $h \in H$, si $\lim\limits_{m\to\infty} (h_m, f) = (h, f)$ para cualquier elemento $f \in H$.

Mostremos que la sucesión no puede converger débilmente hacia distintos elementos de H. Supongamos que existen dos elementos h y $h' \in H$, para los cuales $\lim\limits_{m\to\infty} (h_m, f) = (h, f)$ y $\lim\limits_{m\to\infty} (h_m, f) = (h', f)$, cualquiera que sea $f \in H$. Entonces, para cada $f \in H$ se tiene $(h - h', f) = 0$, en particular, cuando $f = h - h'$, tenemos $(h - h', h - h') = 0$, es decir, $h = h'$.

Si la sucesión $h_m \in H$, $m = 1, 2, \ldots$, converge hacia $h \in H$, ella será también débilmente convergente hacia h. En efecto, $|(h_m, f) - (h, f)| = |(h_m - h, f)| \leqslant \|h_m - h\| \|f\| \to 0$ cuando $m \to \infty$.

4. Formas bilineales hermitianas y productos escalares equivalentes. Diremos que en el espacio de Hilbert H está definida una *forma bilineal hermetiana* W, si a cada par de elementos h_1 y h_2 de H se le ha puesto en correspondencia un número complejo $W(h_1, h_2)$ y que esta correspondencia posee las siguientes propiedades:

a) $W(h_1 + h_2, h) = W(h_1, h) + W(h_2, h)$,

b) $W(ch_1, h_2) = cW(h_1, h_2)$,

c) $W(h_1, h_2) = \overline{W(h_2, h_1)}$

para $h, h_1, h_2 \in H$ arbitrarios y c complejo y arbitrario.

Se llama *forma cuadrática* de la forma bilineal hermitiana $W(h_1, h_2)$ la función $W(h, h)$ definida en H. De la propiedad c) se desprende que la forma cuadrática de la forma bilineal hermitiana es de valores reales.

A título de ejemplo de la forma bilineal hermitiana dada en H sirve el producto escalar. La forma cuadrática correspondiente a esta forma bilineal es el cuadrado de la norma engendrada por el producto escalar.

Si la forma cuadrática de cierta forma bilineal hermitiana posee la propiedad de que $W(h, h) \geqslant 0$ para todo $h \in H$ y $W(h, h) = 0$

sólo cuando $h = o$, entonces la forma bilineal $W(h_1, h_2)$ puede considerarse como un (nuevo) producto escalar en H : $W(h_1, h_2) = (h_1, h_2)'$.

La norma (nueva) correspondiente se definirá en este caso por la igualdad $\| h \|' = \sqrt{W(h, h)}$.

La norma $\| \, \|'$ se denomina *equivalente* a la norma $\| \, \|$, si existen tales constantes $C_1 > 0$ y $C_2 > 0$ que para cualquier elemento $h \in E$ $\| h \|' \leqslant C_1 \| h \|$, $\| h \| \leqslant C_2 \| h \|'$. Los productos escalares $(,)$ y $(,)'$ se llaman equivalentes, si son equivalentes las normas engendradas por ellos.

Si la norma $\| \, \|'$ es equivalente a la norma $\| \, \|$, el conjunto H será espacio de Hilbert (es decir, completo) también en el producto escalar $(,)'$.

Efectivamente, supongamos que una sucesión de elementos h_k, $k = 1, 2, \ldots$, de H es fundamental según la norma $\| \, \|'$: $\| h_k - h_s \|' \to 0$ cuando $k, s \to \infty$. Puesto que $\| h_k - h_s \| \leqslant C_2 \| h_k - h_s \|'$, la sucesión citada es fundamental también en la norma $\| \, \|$. Como H es un espacio completo en la norma $\| \, \|$, existe un elemento $h \in H$ hacia el cual converge en esta norma la sucesión en consideración: $\| h_k - h \| \to 0$ para $k \to \infty$. Dado que $\| h_k - h \|' \leqslant C_1 \| h_k - h \|$, la sucesión es también convergente hacia h en la norma $\| \, \|'$. La afirmación queda demostrada.

5. Ortogonalidad. Sistemas ortonormales. Los elementos h_1 y $h_2 \in H$ se llaman *ortogonales* ($h_1 \perp h_2$), si $(h_1, h_2) = 0$. Un elemento h se llama *ortogonal al conjunto* $H' \subset H$, si $(h, h') = 0$ para todos los $h' \in H'$. Dos conjuntos H' y H'' de H se llaman ortogonales ($H' \perp H''$), si $(h', h'') = 0$ para cualesquiera $h' \in H'$, $h'' \in H''$.

Si $h \in H$ es ortogonal al conjunto H' siempre denso en H, entonces $h = o$. En efecto, sea h'_k, $k = 1, 2, \ldots$, una sucesión de elementos de H' y supongamos que $h'_k \to h$ cuando $k \to \infty$. Puesto que $(h'_k, h) = 0$ para todo $k \geqslant 1$ y la convergencia $(h'_k, h) \to \| h \|^2$ es débil, entonces $\| h \| = 0$, es decir, $h = o$.

Un elemento $h \in H$ se denomina *normado*, si $\| h \| = 1$. Un con junto $H' \subset H$ se llama *ortonormal* (*sistema ortonormal*), si todos sus elementos son normados y ortogonales a pares. Un conjunto ortonormal es, claro está, linealmente independiente.

Un conjunto numerable (o finito) de elementos linealmete independiente h_k, $k = 1, 2, \ldots$, puede transformarse en un conjunto numerable (o finito) ortonormal de la manera siguiente (método de Gram — Schmidt):

$$e_1 = \frac{h_1}{\| h_1 \|}, \quad e_2 = \frac{h_2 - (h_2, e_1) e_1}{\| h_2 - (h_2, e_1) e_1 \|}, \ldots,$$

$$e_n = \frac{h_n - (h_n, e_1) e_1 - \ldots - (h_n, e_{n-1}) e_{n-1}}{\| h_n - (h_n, e_1) e_1 - \ldots - (h_n, e_{n-1}) e_{n-1} \|}, \ldots,$$

(en virtud de la suposición de que el conjunto h_k, $k = 1, 2, \ldots$, es linealmente independiente para todo $n \geqslant 2$, $h_n - (h_n, e_1) e_1 - \ldots - (h_n, e_{n-1}) e_{n-1} \neq 0$.

6. Series de Fourier según un sistema ortonormal arbitrario. Sea f un elemento arbitrario de H y sea $e_1, \ldots, e_n, \ldots$ cierto sistema numerable ortonormal en H (si el espacio H es de dimensión finita, se debe tomar un sistema ortonormal formado por un número finito de elementos). Designemos por H_p el subconjunto tendido sobre los elementos $e_1, \ldots, e_p$ para cierto $p \geqslant 1$ y hallemos en H_p un elemento más próximo (en la norma del espacio H) al elemento f. Puesto que para ciertas constantes $c_1, \ldots, c_p$ un elemento arbitrario de H_p tiene la forma

$\sum_{r=1}^{p} c_r e_r$, el problema se reduce a la búsqueda de tales números $c_1, \ldots, c_p$, para los cuales alcanza su mínimo la magnitud $\delta^2_{H_p}(f; c_1, \ldots, c_p) = \| f - \sum_{r=1}^{p} c_r e_r \|^2$.

Introduzcamos los números $f_k (f, e_k)$, $k = 1, 2, \ldots$, llamados *coeficientes de Fourier* del elemento f según el sistema $e_1, e_2, \ldots$ Puesto que

$$\delta^2_{H_p}(f; c_1, \ldots, c_p) = \left(f - \sum_{r=1}^{p} c_r e_r,\ f - \sum_{r=1}^{p} c_r e_r\right) =$$

$$= \| f \|^2 - \sum_{r=1}^{p} c_r \bar{f}_r - \sum_{r=1}^{p} \bar{c}_r f_r + \sum_{r=1}^{p} | c_r |^2 =$$

$$= \sum_{r=1}^{p} | c_r - f_r |^2 - \sum_{r=1}^{p} | f_r |^2 + \| f \|^2,$$

la magnitud $\delta^2_{H_p}(f; c_1, \ldots, c_p)$ alcanza el mínimo sólo cuando $c_r = f_r$, $r = 1, \ldots, p$, y este mínimo (designémoslo mediante $\delta^2_{H_p}(f)$) es igual a $\| f \|^2 - \sum_{r=1}^{p} | f_r |^2$:

$$\delta^2_{H_p}(f) = \| f \|^2 - \sum_{r=1}^{p} | f_r |^2.$$

De este modo, dado f, para todos los $c_1, \ldots, c_p$, tiene lugar la desigualdad

$$\left\| f - \sum_{r=1}^{p} c_r e_r \right\| \geqslant \left\| f - \sum_{r=1}^{p} f_r e_r \right\|,$$

que expresa *la propiedad mínima* de los coeficientes de Fourier, con la particularidad de que la igualdad se logra sólo cuando $c_r = f_r$, $r = 1, \ldots, p$.

Designemos con f^p el único elemento que en el subespacio H_p es más próximo a f:

$$f^p = \sum_{r=1}^{p} f_r e_r.$$

En este caso

$$\| f - f^p \|^2 = \delta^2_{H_p}(f). \tag{3}$$

El elemento f^p se llama proyección del elemento f en el subespacio H_p.

De la ecuación (2) se deduce pue para cualquier elemento $f \in H$ y cualquier $p \geqslant 1$ tenemos $\sum_{r=1}^{p} |f_r|^2 \leqslant \| f \|^2$. Esto significa que la serie numérica $\sum_{r=1}^{\infty} |f_r|^2$ converge y tiene lugar *la desigualdad de Bessel*

$$\sum_{r=1}^{\infty} |f_r|^2 \leqslant \| f \|^2.$$

LEMA 1. *Sea f_k, $k = 1, 2, \ldots$, una sucesión de números complejos y sea e_k, $k = 1, 2, \ldots$, un sistema ortonormal en H. Para que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} f_k e_k$ sea convergente en la norma de H, es necesario y suficiente que la serie numérica $\sum_{r=1}^{\infty} |f_r|^2$ sea convergente.*

Sea $S_p = \sum_{r=1}^{p} f_r e_r$ una suma parcial de la serie $\sum_{r=1}^{\infty} f_r e_r$. Para $p > q$ tenemos la igualdad $\| S_p - S_q \|^2 = \| \sum_{q+1}^{p} f_r e_r \|^2 = \sum_{q+1}^{p} |f_r|^2$, de la cual se desprende que la convergencia de la serie $\sum |f_r|^2$ es necesaria y suficiente para que sea fundamental la sucesión de sumas parciales de la serie y, por este motivo, a causa de ser el espacio H completo, para la convergencia de esta serie. El lema está demostrado.

Sea f un elemento arbitrario de H y sean f_k, $k = 1, 2, \ldots$, sus coeficientes de Fourier según el sistema ortonormal e_k, $k = 1, 2 \ldots$ La serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k e_k$$

se denomina serie de Fourier del elemento f según el sistema e_k, $k = 1, 2, \ldots$

De la desigualdad de Bessel y del lema 1 se infiere

LEMA 2. *La serie de Fourier de un elemento arbitrario $f \in H$ según un sistema ortonormal arbitrario converge en la norma del espacio H.*

El lema 2 afirma la existencia del elemento $\tilde{f} \in H$, hacia el cual converge la serie de Fourier del elemento f. Naturalmente, surge una pregunta: ¿será válida la igualdad $\tilde{f} = f$ para todos los $f \in H$?

En el caso general, si no se hacen ningunas suposiciones adicionales respecto al sistema $e_1, e_2, \ldots$, a excepción de que sea ortonormal, la respuesta a esta pregunta será negativa.

7. Base ortonormal. De (2) se deduce que a medida que crece p la magnitud $\delta^2_{H_p}(f)$ sólo puede disminuir, cualquiera que sea $f \in H$. Por eso, a priori pueden presentarse dos casos:

a) para todos los $f \in H \delta^2_{H_p}(f) \to 0$ cuando $p \to \infty$,

b) existe un elemento $f \in H$ tal que para él $\delta^2_{H_p}(f) \to c > 0$ cuando $p \to \infty$.

En el caso a), debido a la igualdad (3), para todo $f \in H$ tiene lugar la correlación

$$f = \lim_{p \to \infty} \sum_{k=1}^{p} f_k e_k$$

o, lo que es lo mismo, la igualdad

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k e_k, \tag{4}$$

es decir, en el caso a) la serie de Fourier de cualquier elemento f converge (en la métrica de H) hacia f. Además, para todo $f \in H$ tiene lugar la igualdad

$$\| f \|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} | f_k |^2, \tag{5}$$

denominada *igualdad de Parseval — Steklov*, y otra igualdad

$$(f, g) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \overline{g}_k \tag{5'}$$

que generaliza (5) y es válida para cualesquiera elementos f y g de H.

La igualdad (5) se desprende de (2). Demostremos la igualdad (5'). Ante todo indiquemos que la serie en el segundo miembro es absolutamente convergente, puesto que el término común de la serie es mayorado por el término común de la serie convergente: $| f_k \overline{g}_k | \leqslant$

$\leqslant \frac{1}{2}(|f_k|^2 + |g_k|^2)$. Luego, en virtud de (4)

$$(f, g) = \lim_{p\to\infty} (f^p, g) = \lim_{p\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{p} f_k e_k,\ g\right) =$$

$$= \lim_{p\to\infty} \sum_{k=1}^{p} f_k (e_k, g) = \lim_{p\to\infty} \sum_{k=1}^{p} f_k \bar{g}_k = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \bar{g}_k.$$

Lo que se trataba de establecer.

En el caso b) existe un elemento $f \in H$ tal que la serie de Fourier de éste converge (de acuerdo con el lema 2 del punto anterior) hacia el elemento $\bar{f} \neq f$, es decir, el elemento $h = f - \bar{f} \neq 0$. De este modo,

$$f = h + \sum_{k=1}^{\infty} f_k e_k,$$

donde $h \neq o$ y h es ortogonal al subespacio tendido sobre el sistema $e_1, e_2, \ldots$

Volvamos ahora otra vez al caso a) el cual, naturalmente, será para nosotros de mayor interés.

Un sistema numerable ortonormal $e_1, e_2, \ldots$ se llama *base completa* o bien *ortonormal* del espacio H, si cualquier elemento $f \in H$ puede ser desarrollado en la serie de Fourier (4) según este sistema.

De lo demostrado anteriormente se deduce la validez de la siguiente afirmación.

LEMA 3. *Para que el sistema ortonormal $e_1, e_2 \ldots$ sea base ortonormal de H, es necesario y suficiente que para todo elemento $f \in H$ tenga lugar la igualdad de Parseval — Steklov* (5). *o para dos elementos f y g cualesquiera de H tenga lugar la igualdad* (5').

LEMA 4. *Para que el sistema ortonormal $e_1, e_2, \ldots$ sea base ortonormal del espacio H, es necesario y suficiente que una variedad lineal tendida sobre el sistema sea un conjunto siempre denso en H.*

Si el sistema $e_1, e_2, \ldots$ es una base ortonormal en H, entonces en la norma de H todo elemento $f \in H$ es aproximado con cualquier grado de precisión por sumas parciales de su serie de Fourier que son combinaciones lineales de este sistema. La necesidad queda así establecida.

Demostremos la suficiencia. Sea f un elemento arbitrario de H Para $\varepsilon > 0$ arbitrario hallemos el número $p = p(\varepsilon)$ y los números $c_1(\varepsilon), \ldots, c_p(\varepsilon)$ tales que

$\left\| f - \sum_{k=1}^{p} c_k(\varepsilon) e_k \right\| < \varepsilon$. En virtud de la propiedad mínima de los coeficientes de Fourier

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{p} f_k e_k \right\|^2 \leqslant \left\| f - \sum_{k=1}^{p} c_k(\varepsilon) e_k \right\|^2 \leqslant \varepsilon^2,$$

de donde se deduce la posibilidad de desarrollar f en la serie de Fourier (4).

TEOREMA 1. *En el espacio separable de Hilbert existe una base ortonormal.*

Sea h_1', h_2' un conjunto numerable siempre denso en H. Designemos por h_1 el primer elemento h_{k_1}' ($h_1' = \ldots = h_{k_1-1}' = 0$) de este conjunto distinto de cero, y mediante h_2, el primer elemento del conjunto $h_{k_1+1}', h_{k_1+2}', \ldots$, que junto con h_1 forma un par de elementos linealmente independientes, etc. El sistema numerable (o finito) $h_1, h_2, \ldots$ es linealmente independiente y las combinaciones lineales de elementos de este sistema son siempre densos en H. Transformemos el sistema $h_1, h_2, \ldots$ (p. 5) en un sistema numerable ortonormal de elementos $e_1, e_2, \ldots$, cuyas combinaciones lineales son también siempre densas en H. De acuerdo con el lema 4, este sistema es una base ortonormal del espacio H. El teorema 1 está demostrado.

§ 3. Operadores lineales. Conjuntos compactos. Operadores totalmente continuos.

1. Operadores. Funcionales. Sean B_1 y B_2 espacios de Banach y sea B_1' un conjunto ubicado en B_1. Diremos que en B_1' está definido *el operador* A (*operador* A *de* B_1 *en* B_2), si a todo elemento $f \in B_1'$ se le ha puesto en correspondencia algún elemento $g \in B_2 : g = Af$. El conjunto B_1' se denomina *campo de definición* D_A, $D_A = B_1'$, del operador A y el conjunto de elementos del tipo Af para $f \in D_A$, *campo de sus valores* $R_A \subset B_2$.

El operador A recibe el nombre de funcional, si el espacio B_2 es un conjunto de números complejos (por norma en este último se toma el módulo del número complejo). Comúnmente, las funcionales se designan con letra l.

Los operadores más sencillos son: el operador O, nulo, y (cuando $B_1 = B_2$) I, unitario, determinados de la manera siguiente: $Of = o$ para todo $f \in D_O$, $If = f$ para todo $f \in D_I$.

Un operador A se denomina *continuo en el elemento* $f \in D_A$, si toda sucesión f_k, $k = 1, 2, \ldots$, de elementos de D_A, convergente en la norma de B_1 hacia f, es transformada por él en la sucesión Af_k, $k = 1, 2, \ldots$ que en la norma de B_2 converge hacia Af. Un operador A se llama *continuo en el conjunto* $E \subset D_A$ (en particular, en D_A), si es continuo en todo elemento $f \in E$. El operador A continuo en D_A, lo llamaremos *continuo*.

Un operador A se denomina *lineal*, cuando D_A es una variedad lineal y $A(c_1f_1 + c_2f_2) = c_1Af_1 + c_2Af_2$ para todo elemento $f_i \in D_A$ y todo número c_i, $i = 1, 2$.

El operador lineal A pone en correspondencia el elemento nulo del espacio B_2 con el elemento nulo del espacio B_1, ya que

$$Ao = A\,(0\cdot f) = 0\cdot Af = o$$

(f es un elemento arbitrario de D_A).

Para que el operador lineal A sea continuo, es necesario y suficiente que lo sea en el elemento nulo (o, en general, en cualquier elemento de D_A).

La necesidad de la afirmación es evidente. Demostremos la suficiencia. Sea f_k, $k = 1, 2, \ldots$, una sucesión de elementos de D_A que converge hacia $f \in D_A$. Como $g_k = f_k - f$, $k = 1, 2, \ldots$, es una sucesión de elementos de D_A, convergente hacia cero, $Ag_k \to 0$ cuando $k \to \infty$. Esto implica que $Af_k \to Af$ cuando $k \to \infty$. La afirmación está demostrada.

Supongamos que A_i, $i = 1, 2$, son operadores lineales de B_1 en B_2, $D_{A_1} = D_{A_2}$, y c_i, $i = 1, 2$, ciertos números. Definamos el operador $A = c_1A_1 + c_2A_2$ de la manera siguiente: para todo $f \in D_A = D_{A_2}$ $Af = c_1A_1f + c_2A_2f$. El operador A es también lineal.

Así pues, en el conjunto de operadores lineales con campo de definición común están introducidas las operaciones de adición y multiplicación por números complejos. No es difícil convencerse de que este conjunto forma un espacio lineal.

El operador lineal A se denomina *acotado*, si existe una constante $C > 0$ tal que $\|Af\|_{B_2} \leqslant C\|f\|_{B_1}$ para todo $f \in D_A$, o, lo que es lo mismo, $\|Af\|_{B_2} \leqslant C$ para aquellos $f \in D_A$ con los que $\|f\|_{B_1} = 1$.

La cota inferior exacta de los valores de la constante C se llama *norma* del operador A y se designa mediante $\|A\|$.

Mostremos que

$$\|A\| = \sup_{f\in D_A} \frac{\|Af\|_{B_2}}{\|f\|_{B_1}} = \sup_{\substack{f\in D_A\\ \|f\|_{B_1}=1}} \|Af\|_{B_2}. \tag{1}$$

Designemos con α la expresión $\sup\limits_{f\in D_A} \|Af\|_{B_2}/\|f\|_{B_1}$.

Como para todo $f \in D_A$ $\|Af\|_{B_2}/\|f\|_{B_1} \leqslant \alpha$, entonces $\|A\| \leqslant \alpha$. Probemos la desigualdad recíproca. Según la definición de cota superior exacta, cualquiera que sea $\varepsilon > 0$, existe un elemento $f_\varepsilon \in D_A$, para el cual $\|Af_\varepsilon\|_{B_2}/\|f_\varepsilon\|_{B_1} \geqslant \alpha - \varepsilon$. Esto significa que $\|A\| \geqslant \alpha - \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, es decir, $\|A\| \geqslant \alpha$. Así pues, $\|A\| = \alpha$.

En particular, si el operador A es una funcional lineal acotada, $A = l$, su norma es

$$\|l\| = \sup_{f\in D_l} \frac{|lf|}{\|f\|_{B_1}} = \sup_{\substack{f\in D_l\\ \|f\|_{B_1}=1}} |lf|.$$

Observemos que un conjunto de operadores lineales acotados con el campo de definición común es una variedad lineal en el conjunto de todos los operadores lineales con el mismo campo de definición. La norma introducida del operador lineal acotado satisface todos los axiomas de la norma. Es fácil mostrar que este espacio normado es completo (es decir, es el espacio de Banach).

Una relación entre los conceptos de continuidad y acotación para los operadores lineales se releva por la siguiente afirmación.

Para que un operador lineal A sea continuo, es necesario y suficiente que sea acotado.

SUFICIENCIA. Supongamos que una sucesión f_k, $k=1, 2, \ldots$, de D_A converge (en B_1) hacia $f \in D_A$. Como

$$\| Af_k - Af \|_{B_2} = \| A(f_k - f) \|_{B_2} \leqslant \| A \| \| f_k - f \|_{B_1} \to 0$$

cuando $k \to \infty$, resulta que en $B_2 AF_k \to Af$ cuando $k \to \infty$.

NECESIDAD. Supongamos que el operador A no es acotado; en este caso existe una sucesión f'_k, $k=1, 2, \ldots$, de elementos de D_A, para la cual $\| Af'_k \|_{B_2} > k \| f'_k \|_{B_1}$. Pero esto contradice a la continuidad del operador A, puesto que la sucesión $f_k = f'_k/(k \| f'_k \|_{B_1})$, $k=1, 2, \ldots$, perteneciente a D_A, tiende en B_1 a cero, mientras que la sucesión Af_k, $k=1$ $2, \ldots$, no puede tender a $Ao=o$, porque $\| Af_k \|_{B_2} \geqslant 1$.

Un operador lineal acotado A con el campo de definición D_A, siempre denso en B_1, siempre podemos considerarlo prefijado en todo el B_1, definiéndolo adicionalmente en $B_1 \setminus D_A$ del modo siguiente. Sea f cualquier elemento de $B_1 \setminus D_A$ y sea f_k, $k = 1, 2, \ldots$, una sucesión de elementos de D_A que en la norma de B_1 converge hacia f (D_A es siempre denso en B_1). Como el operador A es acotado, la sucesión Af_k, $k = 1, 2, \ldots$, de elementos de B_2 es fundamental en B_2. Siendo B_2 completo, la sucesión Af_k, $k = 1, 2, \ldots$, tiene límite en B_2. Mostremos que este límite no depende de cómo se elige la sucesión f_k, $k = 1, 2, \ldots$ Efectivamente, sea f'_k, $k = 1, 2, \ldots$, alguna otra sucesión de D_A, convergente hacia f. Entonces, $\|Af'_k - Af_k \|_{B_2} = \| A(f'_k - f_k) \|_{B_2} = \| A \| \| f'_k - f_k \|_{B_1} \to 0$ cuando $k \to \infty$. Por consiguiente, el límite sólo depende del elemento f. Tomémoslo por el valor Af del operador A en el elemento f. *La ampliación* obtenida del operador, llamada *ampliación según la continuidad*, es un operador lineal acotado, dado en todo el B_1.

Si A_1 y A_2 son operadores lineales para los cuales $R_{A_2} \subset D_{A_1}$, el operador lineal A_1A_2 en D_{A_2} con un campo de valores en R_{A_1} se determina así: $A_1A_2f = A_1(A_2f)$. Si A_1 y A_2 son operadores acotados, A_1A_2 es también acotado y $\| A_1A_2 \| \leqslant \| A_1 \| \| A_2 \|$.

Supongamos que para todo $g \in R_A$ la ecuación $Af = g$ tiene la única solución $f \in D_A$. Esto significa que en R_A está dado un operador (designémoslo mediante A^{-1}) que con el elemento $g \in R_A$ pone en correspondencia aquel único elemento $f \in D_A$ para el cual $Af = g$. El operador A^{-1} se denomina *inverso* del operador A. Está claro que $D_{A^{-1}} = R_A$, $R_{A^{-1}} = D_A$, $A^{-1}A = I$, $AA^{-1} = I$. Si el operador A es lineal, el operador inverso A^{-1} es también lineal.

2. Teorema de Riesz. Como ejemplo de una funcional lineal acotada, definida en el espacio de Hilbert, figura un producto escalar: fijemos al azar un elemento $h \in H$, entonces (f, h) es (según f) una funcional lineal acotada (la acotación se desprende de la desigualdad de Buniakovski). Es muy interesante que con la elección adecuada de $h \in H$ toda funcional lineal acotada, definida en H (o, en virtud del p.1, en un conjunto siempre denso en H), puede ser representada como un producto escalar. Resulta válida la siguiente importante afirmación.

TEOREMA 1. (Teorema de F. Risz). *Para toda funcional lineal acotada l, definida en el espacio de Hilbert H, existe un solo elemento $h \in H$ tal que para todos los $f \in H$ se cumple*

$$l(f) = (f, h). \tag{2}$$

Demostrando este teorema, limitémonos al caso de un espacio separable de Hilbert H (emplearemos el teorema sólo para los espacios de este género).

Sea $e_1, \ldots, e_n, \ldots$ una base ortonormal en H (la que existe en virtud del teorema 1, § 2) y sea $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k e_k$ un desarrollo en la serie de Fourier de cierto elemento $f \in H$. Dado que $\sum\limits_{k=1}^{p} f_k e_k \to f$ para $p \to \infty$, en vista de la continuidad de la funcional l se tiene

$$l(f) = \lim_{p\to\infty} l\left(\sum_{k=1}^{p} f_k e_k\right) = \lim_{p\to\infty} \sum_{k=1}^{p} f_k l(e_k) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \overline{h}_k, \tag{3}$$

donde $h_k = \overline{l(e_k)}$, $k = 1, 2, \ldots$

Examinemos el elemento $h^p = \sum\limits_{k=1}^{p} h_k e_k$. Sabemos que $|l(h^p)| \leqslant \leqslant \|l\| \, \|h^p\|$ (acotación de la funcional l) y que $l(h)^p = \sum\limits_{k=1}^{p} h_k l(e_k) = = \sum\limits_{k=1}^{p} |h_k|^2 = \|h^p\|^2$. Entonces, para todos los $p \geqslant 1$ $\sum\limits_{k=1}^{p} |h_k|^2 \leqslant \|l\|^2$. Esto significa que la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |h_k|^2$ es convergente y $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |h_k|^2 \leqslant \leqslant \|l\|^2$. De acuerdo con el lema 1 (p. 6, § 2) la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} h_k e_k$ converge en la norma del espacio H hacia cierto elemento $h \in H$ (h_k son los coeficientes de Fourier del elemento h).

Sustituyendo en (3) $f_k = (f, e_k)$ y valiéndose otra vez de la continuidad de la funcional l, obtenemos la igualdad (2):

$$l(f)=\sum_{k=1}^{\infty}(f,\ h_k e_k)=(f,\ \sum_{k=1}^{\infty} h_k e_k)=(f,\ h).$$

Si a la par con la representación (2) existe otra representación de la funcional l: $l(f) = (f, h')$, entonces $(f, h - h') = 0$ para todos los $f \in H$. Esto quiere decir que $h = h'$. El teorema queda demostrado.

Observemos que al demostrar el teorema 1, hemos establecido la desigualdad $\| h \| \leqslant \| l \|$. De (2) y de la desigualdad de Buniákovski se deduce una desigualdad recíproca $\| l \| \leqslant \| h \|$. Por lo tanto, $\| l \| = \| h \|$.

3. Operador conjugado. Sea H un espacio de Hilbert y sea A un operador lineal de H en H, definido en el conjunto D_A siempre denso en H (en el caso general no se supone que el operador A sea acotado).

Supongamos que D_{A^*} es un conjunto de todos los elementos de H que poseen una propiedad siguiente: para todo $g \in D_{A^*}$ existe un elemento $h \in H$ tal que para cualquier $f \in D_A$ se cumple la igualdad

$$(Af, g) = (f, h).$$

El conjunto D_{A^*} es no vacío, dado que el elemento nulo del espacio H le pertenece: el elemento $h = o$ cuando $g = o$.

Demostremos que a cada elemento $g \in D_{A^*}$ le está asignado un solo elemento $h \in H$. Supongamos, al contrario, que a cierto $g \in D_{A^*}$ le corresponden dos elementos h y h' de H. En este caso para todos los $f \in D_A$ tiene lugar la igualdad $(f, h - h') = 0$, de la cual se deduce que $h = h'$ (recordemos que D_A es siempre denso en H).

De este modo, en D_{A^*} está dado un operador que vamos a designar mediante A^*: a cada elemento $g \in D_{A^*}$ le está asignado un elemento único $h = A^*g \in H$ tal que

$$(Af,\ g) = (f,\ A^*g) \tag{4}$$

para todo $f \in D_A$. El operador A^* se llama *conjugado* al operador A. El conjunto D_{A^*} de todos los elementos de H, para los cuales se cumple la igualdad (4), cualquiera que sea $f \in D_A$, es el campo de definición del operador conjugado.

Sean g_1 y g_2 elementos arbitrarios de D_{A^*}, y c_1, c_2, números complejos cualesquiera. Entonces, en virtud de (4) tenemos para todo $f \in D_A$:

$$(f,\ c_1A^*g_1 + c_2A^*g_2) = \bar{c}_1(f,\ A^*g_1) + \bar{c}_2(f,\ A^*g_2) =$$
$$= \bar{c}_1(Af,\ g_1) + \bar{c}_2(Af,\ g_2) = (Af,\ c_1g_1 + c_2g_2).$$

Esto significa que $c_1g_1+c_2g_2 \in D_{A^*}$ (es decir, D_{A^*} es una variedad lineal) y $A^*(c_1g_1+c_2g_2)=c_1A^*g_1+c_2A^*g_2$. Esto quiere decir que el operador A^* es lineal.

Supongamos ahora que el operador A es acotado. En vista del p. 1, se le puede considerar dado por todo el espacio H. Tomemos un elemento *arbitrario* $g \in H$. Una funcional lineal $l(f) = (Af, g)$ es acotada, porque $|l(f)| \leqslant \|Af\| \; \|g\| \leqslant (\|A\| \; \|g\|) \|f\|$. De acuerdo con el teorema de Riesz (p. 2), existe tal elemento (único) $h \in H$ que $l(f) = (Af, g) = (f, h) = (f, A^*g)$. Por consiguiente, la igualdad (4) se cumple *para todos los* $g \in H$, es decir, $D_{A^*} = H$.

Demostremos que el operador A^* es acotado y que $\|A^*\| = \|A\|$. Sustituyendo en (4) $f = A^*g$, obtendremos para $g \in H$ arbitrario

$$\|A^*g\|^2=(AA^*g,\, g)\leqslant\|A(A^*g)\|\,\|g\|\leqslant(\|A\|\,\|g\|)\,\|A^*g\|$$

Por eso, $\|A^*g\| \leqslant \|A\| \; \|g\|$, esto es, el operador A^* es acotado y $\|A^*\| \leqslant \|A\|$. Sustituyendo en (4) $g = Af$, obtendremos, análogamente, para todo $f \in H$: $\|A^*\| \geqslant \|A\|$. Por lo tanto, $\|A^*\| = \|A\|$.

Así pues, el operador A^*, conjugado al operador lineal acotado A, está definido sobre todo el espacio, es lineal, acotado y su norma es igual a la del operador A.

Es fácil comprobar que $(A^*)^* = A$, $(cA)^* = \bar{c}A^*$ (c es un número complejo), $(A + B)^* = A^* + B^*$, $(AB)^* = B^*A^*$.

4. Representación matricial de un operador lineal acotado. Al demostrar el teorema de Riesz hemos establecido que una funcional lineal acotada dada en el espacio separable de Hilbert se define completamente por sus valores en la base ortonormal de este espacio. Lo mismo sucede también con los operadores lineales acotados.

Sea A un operador lineal acotado que actúa desde un espacio separable de Hilbert H en H. Sea $D_A = H$, y sea $e_1, \ldots, e_n, \ldots$ una base ortonormal de H.

Llamaremos *representación matricial* del operador A en la base $e_1, \ldots, e_n, \ldots$ a la matriz infinita $a_{ij}=(Ae_i,\, e_j)=(e_i,\, A^*e_j)$, $i\geqslant 1$, $j\geqslant 1$. Puesto que $(A^*e_j,\, e_i)=\bar{a}_{ij}$, $i=1, 2, \ldots$, son coeficientes de Fourier del elemento A^*e_j, entonces de acuerdo con la igualdad de Parseval—Steklov (igualdad (5), p. 7, § 2), la serie $\sum_{i=1}^{\infty}|a_{ij}|^2$ converge y para todos los $j=1, 2, \ldots$ es válida la desigualdad

$$\sum_{i=1}^{\infty}|a_{ij}|^2=\|A^*e_j\|^2\leqslant\|A^*\|^2=\|A\|^2. \tag{5}$$

Tomemos un elemento arbitrario $f \in H$ y sea $f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k e_k$ su desarrollo en una serie de Fourier. Como el elemento $Af \in H$, sus coeficientes de Fourier son

$$(Af)_j = (Af, e_j) = \left(A \sum_{i=1}^{\infty} f_i e_i, e_j\right) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i (Ae_i, e_j) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i a_{ij}, \quad (6)$$

$j = 1, 2, \ldots$ La serie en el segundo miembro de (6) converge absolutamente, ya que el término común $f_i a_{ij}$ es mayorado pol el término común de la serie convergente $\frac{1}{2}(|f_i|^2 + |a_{ij}|^2)$. Sustituyendo los valores de los coeficientes de Fourier en la serie de Fourier $Af = \sum_{j=1}^{\infty} (Af)_j e_j$, obtendremos

$$Af = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} f_i\right) e_j. \quad (7)$$

De este modo, cualquiera que sea $f \in H$, el elemento $Af \in H$ puede ser hallado por f, sólo con la ayuda de la matriz (a_{ij}). Lo último significa que la matriz (a_{ij}) define completamente el operador A.

Cuando (a_{ij}) es representación matricial del operador A en la base $e_1, e_2, \ldots$, y (a_{ij}^*), la representación correspondiente del operador conjugado A^*, tenemos

$$a_{ij}^* = (A^* e_i, e_j) = (e_i, Ae_j) \bar{a}_{ij} \text{ para todos los } i \geqslant 1, j \geqslant 1.$$

El operador A se llama *de dimensión finita (n-dimensional)*, cuando representa el espacio de Hilbert H en algún subespacion-dimensiona suyo.

Sea H_n un subespacio del espacio H, tendido sobre los elementos $e_1, \ldots, e_n$. Para que un operador lineal acotado A transforme el espacio H en H_n, es necesario y suficiente que $a_{ij} = 0$ para $j > n$, $i \geqslant 1$. Esta afirmación se deduce directamente de las igualdades (6) y (7).

5. Operadores autoconjugados. Operadores de proyección ortogonal. Un operador lineal acotado que está definido en el espacio de Hilbert H y actúa de H en H, se llama autoconjugado, si $A = A^*$.

Al operador autoconjugado A se le puede asignar la forma bilineal hermitiana $W(f, g) = (Af, g)$ y la forma cuadrática (Af, f) correspondiente a ésta. Dichas formas se denominan, respectivamente, *bilineal* y *cuadrática del operador* A. La forma cuadrática de un operador autoconjugado es de valores reales. Si $(Af, f) \geqslant 0$ para todo f de H, el operador autoconjugado A se llama *no negativo*. Un operador no negativo se denomina *positivo*, si $(Af, f) = 0$ sólo cuando $f = o$.

La representación matricial (a_{ij}) de un operador autoconjugado (cuando el espacio H es separable) posee la siguiente propiedad: $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$, $i, j = 1, 2, \ldots$

Supongamos que $e_1, e_2, \ldots$ es cierta base ortonormal de un espacio separable de Hilbert H, $e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}, \ldots$ es un subconjunto numerable (o finito) de dicha base, y $e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}, \ldots$, un subconjunto de una base, adicional a la elegida. Denotemos mediante $\mathfrak{N}'$ el subespacio tendido sobre los elementos e_{i_k}, $k = 1, 2, \ldots$, y mediante $\mathfrak{N}''$, el subespacio tendido sobre los elementos e_{j_k}, $k = 1, 2, \ldots$ El subespacio $\mathfrak{N}'$ ($\mathfrak{N}''$) es una colección de elementos, pertenecientes al espacio H y ortogonales a todos los elementos e_{j_k}, $k = 1, 2, \ldots$ (e_{i_k}, $k = 1, 2, \ldots$). Lo mismo expresamos diciendo que el subespacio $\mathfrak{N}'$ ($\mathfrak{N}''$) es un conjunto de todos aquellos elementos de H en cuyos desarrollos en series de Fourier según la base e_k, $k = 1, 2, \ldots$, los coeficientes de Fourier de los elementos e_{j_k}, $k = 1, 2, \ldots$ (e_{i_k}, $k = 1, 2, \ldots$) son todos nulos (esto es, en los desarrollos faltan los miembros correspondientes). Los subespacio $\mathfrak{N}'$ y $\mathfrak{N}''$ son ortogonales, $\mathfrak{N}' \perp \mathfrak{N}''$.

Comparemos un elemento arbitrario $f \in H$, cuyo desarrollo en la serie de Fourier tiene la forma $\sum f_k e_k$, y los elementos

$$f' = P'f = \sum_{k=1}^{\infty} f_{i_k} e_{i_k}, \quad f'' = P''f = \sum_{k=1}^{\infty} f_{j_k} e_{j_k}. \tag{8}$$

Las series de (8) convergen en la norma del espacio H en virtud de la desigualdad de Bessel y del lema 1 (p. 6, § 2). Por eso, las correlaciones (8) definen en H dos operadores P' y P'', los cuales son lineales. Los campos de sus valores son: $R_{P'} = \mathfrak{N}'$, $R_{P''} = \mathfrak{N}''$.

Los operadores P' y P'' se llaman operadores de *proyección ortogonal* del espacio H sobre los subconjuntos $\mathfrak{N}'$ y $\mathfrak{N}''$, respectivamente (para abreviar, en lo sucesivo los vamos a llamar operadores *proyectivos*).

Un operador proyectivo es acotado y su norma es igual a 1. Efectivamente, como para todos los $f \in H$ $\| P'f \|^2 = \| f' \|^2 = = \sum_{k=1}^{\infty} | f_{i_k} |^2 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} | f_k |^2 = \| f \|^2$, resulta que $\| P' \| \leqslant 1$. Pero, $P'e_{i_1} = = e_{i_1}$, es decir, $\| P' \| = 1$.

Un operador proyectivo es autoconjugado, puesto que para f y h cualesquiera de H $(P'f, h) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_{i_k} e_{i_k}, h \right) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{i_k} (e_{i_k}, h) = = \sum_{k=1}^{\infty} f_{i_k} \bar{h}_{i_k} = (f, P'h)$.

De la ecuación (8) se deduce que para todo $f \in H$

$$f = If = P'f + P''f, \quad I = P' + P'', \tag{9}$$

donde $P'f \in \mathfrak{R}'$, $P''f \in \mathfrak{R}''$. Además,

$$\|f\|^2 = \|P'f + P''f\|^2 = \|P'f\|^2 + \|P''f\|^2 + \\ + (P'f, P''f) + (P''f, P'f) = \|P'f\|^2 + \|P''f\|^2, \tag{10}$$

ya que $\mathfrak{R}' \perp \mathfrak{R}''$.

6. **Conjuntos compactos.** Sea H un espacio de Hilbert. El conjunto $\mathscr{M} \subset H$ se llama *compacto* en H, si toda (infinita) sucesión de sus elementos contiene una subsucesión fundamental en H.

LEMA 1. *Un conjunto compacto es acotado.*

Sea $\mathscr{M}$ un conjunto no acotado. Mostremos que este conjunto no puede ser compacto. Tomemos cierto elemento f^1 del conjunto y designemos por S_{f^1} una bola de radio 1 y con el centro en f^1, es decir, el conjunto de aquellos elementos $f \in H$ para los cuales $\|f - f^1\| < 1$. Como $\mathscr{M}$ no es acotado, el conjunto $\mathscr{M}_1 = \mathscr{M} \setminus S_{f^1}$ es no vacío. Tomemos al azar $f^2 \in \mathscr{M}_1$ ($\|f^2 - f^1\| \geqslant 1$). Como el conjunto $\mathscr{M}_2 = \mathscr{M}_1 \setminus S_{f^2}$ tampoco es vacío, existe un elemento $f^3 \in \mathscr{M}$ tal que $\|f^3 - f^1\| \geqslant 1$, $\|f^3 - f^2\| \geqslant 1$. Continuando este proceso, obtendremos una sucesión f^k, $k = 1, 2, \ldots$, de elementos de $\mathscr{M}$ que satisfacen la desigualdad $\|f^i - f^j\| \geqslant 1$, cualesquiera que sean i, j, $i \neq j$. Esta sucesión no contiene ninguna subsucesión fundamental. Por consiguiente, el conjunto $\mathscr{M}$ no puede ser compacto.

LEMA 2. *Para que un conjunto $\mathscr{M}$ del espacio de Hilbert H de dimensión finita (n-dimensional) sea compacto, es necesario y suficiente que sea acotado.*

La necesidad de la acotación se desprende del lema 1. Demostremos su suficiencia.

Ya que el conjunto $\mathscr{M}$ es acotado, $\|f\| \leqslant C$ para todo $f \in \mathscr{M}$. Por esta razón, los coeficientes de Fourier $f_i = (f, e_i)$, $i = 1, \ldots, n$, del desarrollo $f = f_1e_1 + \ldots + f_ne_n$ de un elemento arbitrario $f \in \mathscr{M}$*) satisfacen las desigualdades $|f_i| = |(f, e_i)| \leqslant \|f\| \, \|e_i\| = \|f\| \leqslant C$. Por consiguiente, para cualquier sucesión f^k, $k = 1, 2, \ldots$, de elementos pertenecientes a $\mathscr{M}$ una sucesión de vectores n-dimensionales $(f_1^k, \ldots, f_n^k)$, $k = 1, 2, \ldots$, donde $f_i^k = (f^k, e_i)$, es acotada. Según el teorema de Bolzano — Weierstrass, de la última sucesión se puede extraer una subsucesión fundamental $(f_1^{k_s}, \ldots, f_n^{k_s})$, $s = 1, 2, \ldots$:

$$|f_1^{k_s} - f_1^{k_p}|^2 + \ldots + |f_n^{k_s} - f_n^{k_p}|^2 \to 0 \quad \text{cuando} \quad s, p \to \infty.$$

*) Según cierta base ortonormal $e_1, \ldots, e_n$.

La sucesión correspondiente $f^{k_s} = f_1^{k_s} e_1 + \ldots + f_n^{k_s} e_n$, $s = 1, 2, \ldots$, es fundamental en H, dado que

$$\| f^{k_s} - f^{k_p} \|^2 = | f_1^{k_s} - f_1^{k_p} |^2 + \ldots + | f_n^{k_s} - f_n^{k_p} |^2 \to 0$$

$$\text{cuando} \quad s,\ p \to \infty.$$

La afirmación está demostrada.

7. Teorema de la compacidad de conjuntos en un espacio separable de Hilbert. Sea H un espacio separable de Hilbert de dimensión infinita y sea $e_1, \ldots, e_n$ su base ortonormal.

Indiquemos primero que no todo conjunto acotado de H es compacto. Por ejemplo, cualquier conjunto acotado que contiene una base ortonormal no es compacto, puesto que de la sucesión e_k, $k = 1, 2, \ldots$ (en virtud de la igualdad $\| e_i - e_j \| = \sqrt{2}$, $i \neq j$), no puede ser extraída una subsucesión fundamental. En particular, el conjunto $\{\| f \| \leqslant 1\}$ (una bola unitaria cerrada) en el espacio infinito es no compacto.

Designemos por P'_n un operador proyectivo que representa H en el subespacio de n dimensiones H_n tendido en los elementos $e_1, \ldots, e_n$, y sea $P''_n = I - P'_n$. Para todo $f \in H$ y $n \geqslant 1$, arbitrariamente elegido, tenemos (véase (9)):

$$f = P'_n f + P''_n f, \tag{11}$$

donde $P'_n f = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k e_k$, $P''_n f = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} f_k e_k$. De (11) se deduce que

$$\| f \|^2 = \| P'_n f \|^2 + \| P''_n f \|^2, \tag{12}$$

donde $\| P'_n f \|^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} | f_k |^2$, $\| P''_n f \|^2 = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} | f_k |^2$.

Esto significa que para todo $f \in H$ la sucesión numérica $\| P''_n f \|^2$, $n = 1, 2, \ldots$, tiende a cero, cuando $n \to \infty$, sin crecer de manera monótona.

TEOREMA 2. *Para que el conjunto $\mathcal{M} \subset H$ (H es un espacio separable de Hilbert) sea compacto, es necesario y suficiente que sea acotado, y que para todo $\varepsilon > 0$ exista un número $n = n(\varepsilon)$ tal que $\| P''_n f \| \leqslant \varepsilon$, cualquiera que sea $f \in \mathcal{M}$.*

En otras palabras, para que el conjunto $\mathcal{M}$ sea compacto, es necesario y suficiente que sea acotado y «casi de dimensión finita».

SUFICIENCIA. Sea $\| f \| \leqslant C$ para todo $f \in \mathcal{M}$. Tomemos una sucesión arbitraria f^k, $k = 1, 2, \ldots$, de elementos pertenecientes a $\mathcal{M}$. Hagamos $\varepsilon = 1$, entonces $\| P''_{n_1} f^k \| \leqslant 1$ para todo k, donde $n_1 = n(1)$. Puesto que $\| P'_{n_1} f^k \| \leqslant \| f^k \| \leqslant C$ para todo k (P'_n de (11)), el conjunto $P'_{n_1} f^k$, $k = 1, 2, \ldots$, es un conjunto acotado del espacio

n_1-dimensional H_{n_1}. Según el lema 2 (p. 6), del último se puede extraer una subsucesión fundamental y de ésta, una subsucesión $P'_{n_1}f^{1,s}$, $s=1, 2, \ldots$, que posea la siguiente propiedad: $\| P'_{n_1}f^{1,s} - P'_{n_1}f^{1,p} \| \leqslant 1$ para todos los s y $p \geqslant 1$. En este caso, para la subsucesión $f^{1,1}, \ldots, f^{1,s}, \ldots$ tenemos las desigualdades (en virtud de (12)):

$$\| f^{1,s} - f^{1,p} \|^2 = \| P'_{n_1}f^{1,s} - P'_{n_1}f^{1,p} \|^2 + \| P''_{n_1}f^{1,s} - P''_{n_1}f^{1,p} \|^2 \leqslant \leqslant 1 + (\| P''_{n_1}f^{1,s} \| + \| P''_{n_1}f^{1,p} \|)^2 \leqslant 5,$$

que son válidas para todos los p y s.

Valiéndonos de $\varepsilon = 1/2$, tomemos un número $n_2 = n(1/2)$. La sucesión $P'_{n_2}f^{1,1}, \ldots, P'_{n_2}f^{1,s}, \ldots$ pertenece a H_{n_2} y es acotada; por consiguiente, de ella podemos extraer una subsucesión $P'_{n_2}f^{2,s}$, $s=1, 2, \ldots$, para la cual $\| P'_{n_2}f^{2,s} - P'_{n_2}f^{2,p} \| \leqslant 1/2$, cualesquiera que sean p, s.

En vista de (12) tenemos $\| f^{2,s} - f^{2,p} \|^2 = \| P'_{n_2}f^{2,s} - P'_{n_2}f^{2,p} \|^2 + \| P''_{n_2}f^{2,s} - P''_{n_2}f^{2,p} \|^2 \leqslant 1/4 + 4/4 = 5/4$ para todos los s, p, etc. Para $\varepsilon = 1/i$ hallemos $n_i = n(1/i)$ y destaquemos de la subsucesión $P'_{n_i}f^{i-1,s}$, $s=1, 2, \ldots$, una subsucesión $P'_{n_i}f^{i,s}$, $s=1, 2, \ldots$, tal que $\| P'_{n_i}f^{i,s} - P'_{n_i}f^{i,p} \| \leqslant 1/i$, cualesquiera que sean s, p. Para la subsucesión $f^{i,s}$, $s=1, 2, \ldots$, en virtud de (12), $\| f^{i,s} - f^{i,p} \|^2 \leqslant 1/i^2 + 4/i^2 = 5/i^2$ para todos los s, p.

La sucesión diagonal $f^{s,s}$, $s=1, 2, \ldots$, es una subsucesión de la sucesión de partida y para ella se verifica $\| f^{p,p} - f^{s,s} \| \leqslant 5/i^2$, para todos los p, $s \geqslant i$, es decir, es fundamental.

NECESIDAD. La necesidad de la acotación del conjunto $\mathscr{M}$ fue demostrada en el lema 1 (p. 6). Demostremos la necesidad de la segunda condición del teorema.

Sea $\mathscr{M}$ compacto, pero, sin embargo, existe tal $\varepsilon_0 > 0$ que para todo n $\| P''_n f^n \| \geqslant \varepsilon_0$, para cierto $f^n \in \mathscr{M}$.

Tomemos n_1 arbitrario y hallemos, según él tal $f^{n_1} \in \mathscr{M}$ que $\| P''_{n_1}f^{n_1} \| \geqslant \varepsilon_0$. Partiendo de f^{n_1}, elijamos $n_2 > n_1$ de tal manera que $\| P''_{n_2}f^{n_1} \| < \varepsilon_0/2$ (esto es posible, dado que para cualquier $f \in H$ fijado $\| P''_k f \| \to 0$ cuando $k \to \infty$). Según n_2 escojamos $f^{n_2} \in \mathscr{M}$ de tal modo que $\| P''_{n_2}f^{n_2} \| \geqslant \varepsilon_0$. Según f^{n_2} hallamos n_3 de tal modo que $\| P''_{n_3}f^{n_2} \| \leqslant \varepsilon_0/2$, y así sucesivamente. Resulta que hemos obtenido la sucesión f^{n_k}, $k=1, 2, \ldots$, de elementos de $\mathscr{M}$ para la cual son válidas las desigualdades

$$\| P''_{n_k}f^{n_k} \| \geqslant \varepsilon_0, \quad \| P''_{n_{k+1}}f^{n_k} \| < \varepsilon_0/2.$$

Mostremos que esta sucesión no puede contener una subsucesión fundamental. En efecto, teniendo en cuenta (12) y el hecho de que la función $\| P''_n f \|$ es monótona según n, tenemos para todo $k > s$:

$$\| f^{n_k} - f^{n_s} \|^2 = \| P'_{n_k} (f^{n_k} - f^{n_s}) \|^2 + \| P''_{n_k} (f^{n_k} - f^{n_s}) \|^2 \geqslant$$

$$\geqslant \| P''_{n_k} (f^{n_k} - f^{n_s}) \|^2 \geqslant (\| P''_{n_k} f^{n_k} \| - \| P''_{n_k} f^{n_s} \|^2) \geqslant$$

$$\geqslant (\| P''_{n_k} f^{n_k} \| - \| P''_{n_{s+1}} f^{n_s} \|)^2 > (\varepsilon_0 - \varepsilon_0/2)^2 = \varepsilon_0^2/4.$$

COROLARIO. Sea $\mathscr{M}$ el conjunto de un espacio separable de Hilbert H. Examinemos una familia de conjuntos $\mathscr{M}_\varepsilon \subset H$, $\varepsilon > 0$, que posee la siguiente propiedad: en cada $\mathscr{M}_\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, para todo $f \in \mathscr{M}$ existe un elemento $f' = f'(\varepsilon)$ tal que $\| f' - f \| \leqslant \varepsilon$. *Si para una sucesión $\varepsilon_k \to 0$ cuando $k \to \infty$, $\varepsilon_k > 0$, todos los conjuntos $\mathscr{M}_{\varepsilon_k}$ son compactos, entonces $\mathscr{M}$ es compacto.*

Tomemos en esta sucesión ε_k arbitrario. Puesto que el conjunto $\mathscr{M}_{\varepsilon_k}$ es compacto, existirá tal $n = n(\varepsilon_k)$ que $\| P''_n f \| \leqslant \varepsilon_k$ para todo $f \in \mathscr{M}_{\varepsilon_k}$. Mas, en este caso para cualquier $f \in \mathscr{M}$ $\| P''_n f \| = \| P''_n (f - f') + P''_n f' \| \leqslant \| P''_n (f - f') \| + \| P''_n f' \| \leqslant \| f - f' \| + \varepsilon_k \leqslant 2\varepsilon_k$, siempre que f' es un elemento de $\mathscr{M}_{\varepsilon_k}$ de tal género que $\| f - f' \| \leqslant \varepsilon_k$. Como $\varepsilon_k \to 0$, en virtud del teorema 2, el conjunto $\mathscr{M}$ es compacto.

8. **Compacidad débil.** En conjunto $\mathscr{M}$ perteneciente al espacio de Hilbert H, se denomina *débilmente compacto*, si en cualquier sucesión de sus elementos se puede elegir una subsucesión que converja débilmente hacia cierto elemento de H (no es obligatorio que este elemento pertenezca al conjunto $\mathscr{M}$).

TEOREMA 3. *Todo conjunto acotado del espacio de Hilbert es débilmente compacto.*

Efectivamente, la acotación de un conjunto no sólo es suficiente sino también necesaria para que éste sea compacto. Sin embargo, no vamos a demostrar aquí la necesidad y nos limitaremos a demostrar la suficiencia de la acotación para el caso de un espacio separable de Hilbert.

Sea e_k, $k = 1, 2, \ldots$, una base ortonormal H y sea $\mathscr{M}$ un conjunto acotado en H: $\| f \| \leqslant C$ para todo $f \in \mathscr{M}$. Tomemos en $\mathscr{M}$ una sucesión arbitraria f^k, $k = 1, 2, \ldots$ Puesto que $\| f^k \| \leqslant C$ para todo k, la sucesión numérica (f^k, e_1), $k = 1, 2, \ldots$, es acotada: $| (f^k, e_1) | \leqslant \| f^k \| \| e_1 \| \leqslant C$. Por lo tanto, de la sucesión f^k, $k = 1, 2, \ldots$, se puede extraer una subsucesión $f^{1,k}$, $k = 1, 2, \ldots$, para la cual la sucesión numérica $(f^{1,k}, e_1)$ converja hacia cierto σ_1: $(f^{1,k}, e_1) \to \sigma_1$ cuando $k \to \infty$. La sucesión $(f^{1,k}, e_2)$ es también acotada. Esto quiere decir que de la sucesión $f^{1,k}$, $k = 1, 2, \ldots$, se puede extraer una subsucesión $f^{2,k}$, $k = 1, 2, \ldots$, para la cual la sucesión numérica $(f^{2,k}, e_2)$ tienda a σ_2 cuando $k \to \infty$, etc.

Mostremos que la sucesión diagonal $f^{k,k}$, $k=1, 2, \ldots$, es de débil convergencia. Ante todo indiquemos que para todo $s \geqslant 1$, $(f^{k,k}, e_s) \to \sigma_s$ cuando $k \to \infty$. Por ello, cualquiera que sea $m \geqslant 1$, tenemos

$$(f^{k,k}, \sum_{i=1}^{m} \sigma_i e_i) = \sum_{i=1}^{m} \bar{\sigma}_i (f^{k,k}, e_i) \to \sum_{i=1}^{m} |\sigma_i|^2 \quad \text{cuando} \quad k \to \infty.$$

Puesto que $|(f^{k,k}, \sum_{i=1}^{m} \sigma_i e_i)|^2 \leqslant \|f^{k,k}\|^2 \sum_{i=1}^{m} |\sigma_i|^2 \leqslant C^2 \sum_{i=1}^{m} |\sigma_i|^2$, resulta: $\sum_{i=1}^{m} |\sigma_i|^2 \leqslant C^2$ para todo $m \geqslant 1$. Por consiguente, $\sum_{i=1}^{\infty} |\sigma_i|^2 \leqslant \leqslant C^2$. En virtud del lema 1 (p. 6, § 2), la serie $\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i e_i$ converge hacia cierto elemento $f \in H$, con la particularidad de que $\|f\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\sigma_i|^2$. Mostremos que la sucesión $f^{k,k}$, $k=1, 2, \ldots$, converge débilmente hacia f.

Sea g un elemento arbitrario de H. Tomemos al azar $\varepsilon > 0$ y elijamos un número $s = s(\varepsilon)$ de tal manera que $\sum_{i=s+1}^{\infty} |g_i|^2 \leqslant \varepsilon^2$. Conforme a la igualdad generalizada de Parseval — Steklov ((5'), p. 7, § 2) tenemos:

$$\begin{aligned}
|(f^{k,k} - f, g)| = |\sum_{i=1}^{\infty} ((f^{k,k}, e_i) - \sigma_i) \bar{g}_i| \leqslant \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{s} |f^{k,k}, e_i) - \sigma_i| \cdot |g_i| + \\
&+ \sum_{i=s+1}^{\infty} |(f^{k,k}, e_i)| \cdot |g_i| + \sum_{i=s+1}^{\infty} |\sigma_i| \cdot |g_i| \qquad (13)
\end{aligned}$$

Además,

$$(\sum_{i=s+1}^{\infty} |\sigma_i| \cdot |g_i|)^2 \leqslant \sum_{i=s+1}^{\infty} |\sigma_i|^2 \cdot \sum_{i=s+1}^{\infty} |g_i|^2 \leqslant \|f\|^2 \cdot \varepsilon^2,$$

$$(\sum_{i=s+1}^{\infty} |f^{k,k}, e_i)| |g_i|^2) \leqslant \sum_{i=s+1}^{\infty} |(f^{k,k}, e_i)|^2 \sum_{i=s+1}^{\infty} |g_i|^2 \leqslant C^2 \varepsilon^2.$$

Según la definición de los números σ_i, el primer sumando en el segundo miembro (13) también podemos hacerlo menor que ε, si para cierto $k_0(\varepsilon)$ $k \geqslant k_0(\varepsilon)$. Por eso, $|(f^{k,k} - f, g)| \leqslant \varepsilon + \varepsilon(C + \|f\|)$ para $k \geqslant k_0(\varepsilon)$. El teorema queda demostrado.

9. Operadores totalmente continuos. Sea H un espacio de Hilbert. El operador A que actúa de H en H y está definido en H, se llama *totalmente continuo*, si transforma cualquier conjunto acotado en un conjunto compacto.

Si los operadores A_1 y A_2 son totalmente continuos, el operador $c_1A_1 + c_2A_2$ es totalmente continuo, cualesquiera que sean las constantes c_1 y c_2. Si A es un operador totalmente continuo y B, un operador acotado, prefijado en H, los operadores AB y BA son totalmente continuos.

Del lema 1 (p. 6) se desprende que un operador totalmente continuo es acotado. Sin embargo, no todo operador acotado es totalmente continuo. Así, por ejemplo, un operador unitario I que actúa en un espacio de Hilbert de dimensión infinita no puede ser totalmente continuo, puesto que transforma un conjunto acotado no compacto, o sea una base ortonormal, en sí mismo.

Un operador acotado de dimensión finita es totalmente continuo, lo que se deduce del lema 2 (p. 6). Como generalización inmediata de esta afirmación nos sirve el siguiente criterio.

TEOREMA 4. *Para que un operador lineal acotado A, que está definido en un espacio separable de Hilbert H y que actúa de H en H, sea totalmente continuo, es necesario y suficiente que para cualquier $\varepsilon > 0$ se puedan hallar tal número entero $n = n(\varepsilon)$ y, además, tales operadores lineales A_1 y A_2 (A_1 es de n dimensiones y $\| A_2 \| \leqslant \varepsilon$) que*

$$A = A_1 + A_2. \tag{14}$$

De este modo, los operadores totalmente continuos son «casi de dimensión finita».

NECESIDAD. En virtud de (11) (véase p. 7), para cualesquiera $f \in H$ y $n > 0$ tenemos el desarrollo

$$Af = P'_nAf + P''_nAf \quad (A = P'_nA + P''_nA). \tag{15}$$

Como A es totalmente continuo, según cualquier $\varepsilon > 0$ se puede hallar tal $n = n(\varepsilon)$ que $\| P''_nA \| \leqslant \varepsilon$. Efectivamente, de acuerdo con el teorema 2, $\| P''_nAf \| = \| f \| \; \| P''_nA\,(f/\| f \|) \| \leqslant \varepsilon \| f \|$, dado que de la acotación del conjunto $\{f/\| f \|\}$ se deduce la compacidad del conjunto $\{A\,(f/\| f \|)\}$. Como el operador P_nA es n-dimensional, la necesidad queda demostrada.

SUFICIENCIA. Sea f^k, $k=1, 2, \ldots$, una sucesión acotada arbitraria perteneciente a H, $\| f^k \| \leqslant C$, $k=1, 2, \ldots$ Mostremos que de la sucesión Af^k, $k=1, 2, \ldots$, se puede extraer una subsucesión fundamental. Tomaremos los números $\varepsilon > 0$ del conjunto $\{1, 1/2, \ldots, 1/i, \ldots\}$ y para $\varepsilon = 1/i$ hallaremos $n_i = n(1/i)$ y los operadores A_1^i y A_2^i tales que $A = A_1^i + A_2^i$ (A_1^i es n_i-dimensional y $\| A_2^i \| \leqslant 1/i$). En este caso $\| A_1^i \| = \| A - A_2^i \| \leqslant \| A \| + \| A_2^i \| \leqslant \| A \| + 1$.

$A_1^1 f^k$, $k=1, 2, \ldots$, es el conjunto acotado de un espacio n_1-dimensional. por lo que (lema 2, p. 6) de él puede ser elegida la subsucesión fundamental $A_1^1 f^{1,k}$, $k=1, 2, \ldots$ En estas condiciones, la sucesión $f^{1,k}$, $k=1, 2, \ldots$, posee la siguiente propiedad: $\|A_2^1 f^{1,k}\| \leqslant \|A_2^1\| \|f^{1,k}\| \leqslant 1 \cdot C$. $A_1^2 f^{1,k}$, $k=1, 2, \ldots$, es una sucesión acotada de un conjunto n_2-dimensional. Por consiguiente, existe su subsucesión fundamental $A_1^2 f^{2,k}$, $k=1, 2, \ldots$ En este caso se cumple la desigualdad $\|A_2^2 f^{2,k}\| \leqslant \|A_2^2\| \|f^{2,k}\| \leqslant \frac{1}{2} \cdot C$, y así sucesivamente.

La sucesión diagonal $f^{1,1}$, $f^{2,2}$, ..., posee, evidentemente, las siguientes propiedades: una sucesión $A_1^i f^{k,k}$, $k = 1, 2, \ldots$, es fundamental para todo i, puesto que para todos los $k \geqslant i$, $f^{k,k}$ son elementos de la sucesión $f^{i,k}$, $k = 1, 2, \ldots$ Además, $\| A_2^i f^{k,k} \| \leqslant C/i$ para todo i. Mostremos que la sucesión $Af^{k,k}$, $k = 1, 2, \ldots$, es fundamental. Tomemos arbitrariamente $\varepsilon > 0$ y fijemos $i > 1/\varepsilon$. En este caso, ya que la sucesión $A_1^i f^{k,k}$, $k = 1, 2, \ldots$, es fundamental, tenemos (cuando k y s son suficientemente grandes):

$$\|Af^{k,k} - Af^{s,s}\| \leqslant \|A_1^i (f^{k,k} - f^{s,s})\| + \|A_2^i (f^{k,k} - f^{s,s})\| \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon + \|A_2^i f^{k,k}\| + \|A_2^i f^{s,s}\| \leqslant \varepsilon + 2C/i \leqslant (1 + 2C)\,\varepsilon,$$

lo que se trataba de demostrar.

Del teorema 4 se deduce, en particular, la afirmación siguiente.

Sea A un operador lineal totalmente continuo que está definido por todo el espacio separable de Hilbert H y actúa de H en H. Entonces, el operador A^*, conjugado al primero, es totalmente continuo.

En efecto, la representación (14) engendra otra representación, a saber, $A^* = A_1^* + A_2^*$, donde $\| A_2^* \| = \| A_2 \| \leqslant \varepsilon$. Por lo tanto, la afirmación enunciada puede considerarse demostrada, si mostramos que el operador A_1^* es de dimensión finita.

Sea R_{A_1} un subespacio n-dimensional del espacio H y sea $e_1, \ldots, e_n$, su base ortonormal. Entonces, para todo $f \in H$ $A_1 f = \sum_{i=1}^{n} (A_1 f, e_i) e_i = \sum_{i=1}^{n} (f, A_1^* e_i)\, e_i$. Por eso, cualesquiera que sean f y g de H, tenemos

$$(A_1 f, g) = \sum_{i=1}^{n} (f, A_1^* e_i)\, \bar{g}_i = \Bigl(f, \sum_{i=1}^{n} g_i A_1^* e_i\Bigr),$$

es decir,

$$(f, A_1^* g) = (A_1 f, g) = \Bigl(f, \sum_{i=1}^{n} g_i A_1^* e_i\Bigr).$$

Por esta razón, para todo $g \in H$ resulta $A_1^* g = \sum_{i=1}^{n} g_i A_1^* e_i$. Esta igualdad significa que $R_{A_1^*}$ es un subespacio tendido sobre los elementos $A_1^* e_1, \ldots, A_1^* e_n$, es decir, que es de dimensión finita.

§ 4. Ecuaciones lineales en el espacio de Hilbert

Los razonamientos expresados en este párrafo son válidos para cualquier caso de un espacio de Banach. Sin embargo, nos limitamos a la consideración de un espacio separable de Hilbert H.

1. Operador lineal contraído. Un operador lineal A que está definido en H y actúa de H en H, se llama *contraído*, si $\|A\| < 1$.

LEMA 1. *Si A es un operador contraído que actúa de H en H, existe un operador $(I-A)^{-1}$ que está definido en H y actúa de H en H, teniendo lugar la desigualdad $\|(I-A)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1-\|A\|}$.*

Para demostrar, examinemos la ecuación

$$(I-A)f = g \tag{1}$$

y mostremos que, cualquiera que sea $g \in H$, la única solución de esta ecuación será aquélla que está representada por la serie $f = \sum_{h=0}^{\infty} A^h g \ (A^0 = I)$, que converge en H.

Esta serie es convergente, puesto que el espacio H es completo, mientras que las sumas parciales $g_m = \sum_{h=0}^{m} A^h g$ de la serie forman una sucesión fundamental: cuando $p > m$

$$\|g_p - g_m\| = \|A^p g + \ldots + A^{m+1} g\| \leqslant \|A^p g\| + \ldots + \|A^{m+1} g\| \leqslant$$
$$\leqslant \|g\| (\|A\|^{m+1} + \ldots) = \|g\| \frac{\|A\|^{m+1}}{1-\|A\|} \to 0 \text{ cuando } m,\ p \to \infty.$$

El elemento $f \in H$ es la solución de la ecuación (1), ya que $(I-A)f = (g + Ag + \ldots) - (Ag + A^2 g + \ldots) = g$.

La solución es única. En efecto, sea que existan dos soluciones de la ecuación (1): f_1 y f_2. En este caso, $f = f_1 - f_2$ será una solución de la ecuación homogénea $f = Af$. Por ello, para esta ecuación se cumple la correlación $\|f\| = \|Af\| \leqslant \|A\| \ \|f\|$. Por lo tanto, $f = o$, es decir, $f_1 = f_2$.

Resulta pues, que el operador $(I-A)^{-1}$ existe y está definido por todo el H; como $\|(I-A)^{-1} g\| = \|g + Ag + \ldots + A^m g + \ldots\| \leqslant \leqslant \|g\| (1 + \|A\| + \ldots) = \frac{\|g\|}{1-\|A\|}$ para todo $g \in H$, el operador es acotado y $\|(I-A)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1-\|A\|}$. El lema está demostrado.

OBSERVACION. En las sugestiones del lema 1 figura también el operador acotado $(I-A^*)^{-1}$, puesto que $\|A^*\| = \|A\| < 1$. Además, $(I-A^*)^{-1} = [(I-A)^{-1}]^*$.

Para demostrar la última igualdad tomemos al azar f' y $g' \in H$ y construyamos según ellos (lema 1) tales f y $g \in H$ que $(I-A)f = f'$, $(I-A^*)\,g = g'$.

Ya que $f = (I-A)^{-1}f'$ y $g = (I-A^*)^{-1}g'$, la igualdad $((I-A)f, g) = (f, (I-A^*)\,g)$ puede ser escrita en la forma $(f', (I-A^*)^{-1}g') = ((I-A)^{-1}f', g')$, de donde proviene la igualdad que necesitamos.

2. Ecuaciones con operador totalmente continuo. Examinemos la ecuación (1), sin hacer suposiciones sobre la pequeñez de la norma del operador A. En vez de esto, vamos a considerar que el operador A es totalmente continuo.

Valiéndonos del teorema 4 (punto 9) del párrafo anterior, podemos escribir la ecuación (1) en la forma $(I-A_2)f - A_1 f = g$, donde el operador A_1 es n-dimensional y $\|A_2\| \leqslant \varepsilon < 1$. Denominemos por h el producto $(I-A_2)f$. En virtud del lema 1, el operador $I-A_2$ tiene un operador acotado inverso $(I-A_2)^{-1}$, definido en H:

$$(I-A_2)\,f = h, \quad f = (I-A_2)^{-1}\,h. \tag{2}$$

La ecuación (1) para h se escribirá en la forma

$$h - A_1\,(I-A_2)^{-1}\,h = g. \tag{3}$$

Sea A^* un operador conjugado a A. La ecuación

$$(I-A^*)f^* = g^* \tag{1*}$$

se llama *conjugada* a la (1). De la igualdad $A = A_1 + A_2$ tenemos que $A^* = A_1^* + A_2^*$. En vista de la observación al lema 1, el operador $(I-A_2^*)$ tiene en H un operador inverso $(I-A_2^*)^{-1} = [(I-A_2)^{-1}]^*$,

$$(I-A_2^*)^{-1}g^* = z^*, \quad g^* = (I-A_2^*)z^*. \tag{2*}$$

La ecuación (1*) puede escribirse en la forma

$$(I-A_2^*)f^* - A_1^*f^* = g^*.$$

Aplicando a ella el operador $(I-A_2^*)^{-1}$, obtenemos una ecuación equivalente

$$f^* - [(I-A_2)^{-1}]^*A_1^*f^* = z^*, \tag{3*}$$

en la que el operador $[(I-A_2)^{-1}]^*\,A_1^*$ está conjugado a $A_1\,(I-A_2)^{-1}$ (en la ecuación (3)).

El operador $A_1\,(I-A_2)^{-1}$ es, evidentemente, n-dimensional, por lo que su representación matricial (a_{ij}) en la base ortonormal correspondiente e_k, $k = 1, 2, \ldots$ (el subespacio tendido sobre los elementos $e_1, \ldots, e_n$ coincide con $R_{A_1(I-A_2)^{-1}}$) posee la propiedad: $a_{ij} = 0$ para $i \geqslant 1$, $j \geqslant n+1$ (véase p. 4, § 3), con la particularidad de que la fórmula (5) p. 4, § 3 nos da para todo j

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 \leqslant \| A_1 (I - A_2)^{-1} \|^2.$$

De acuerdo con la fórmula (7), p. 4, § 3, la ecuación (3) puede ser representada en la forma $\sum_j h_j e_j - \sum_j \sum_i h_i a_{ij} e_j = \sum_j g_j e_j$, que es equivalente, debido a la independencia lineal del sistema $e_1, e_2, \ldots$, al sistema algebraico de ecuaciones para los coeficientes de Fourier $h_1, \ldots, h_m, \ldots$ del elemento buscado h:

$$h_j - \sum_{i=1} a_{ij} h_j = g_j, \quad j \leqslant n; \quad h_j = g_j, \quad j > n.$$

Como los coeficientes h_j, para $j > n$, son conocidos:

$$h_j = g_j, \quad j > n, \tag{4}$$

el último sistema se reduce al sistema de ecuaciones algebraicas

$$h_j - \sum_{i=1}^{n} a_{ij} h_i = g_j + \sum_{i=n+1}^{\infty} a_{ij} g_i, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{5}$$

según el cual se hallan h_j, $j \leqslant n$.

De modo análogo, la ecuación (3*) puede ser sustituida por un sistema algebraico equivalente para determinar los coeficientes de Fourier f_j^*, $j = 1, 2, \ldots$, del elemento f^* en términos de los coeficientes de Fourier z_j^*, $j = 1, 2, \ldots$, del elemento $z^* = (I - A_2^*)^{-1} g^*$. En este caso para f_j^*, $j \leqslant n$, obtendremos un sistema algebraico lineal

$$f_j^* - \sum_{i=1}^{n} \overline{a}_{ji} f_i^* = z_j^*, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{5*}$$

y f_j^*, $j > n$, se determinan unívocamente a través de f_j^*, $j \leqslant n$, por medio de las fórmulas

$$f_j^* = z_j^* + \sum_{i=1}^{n} \overline{a}_{ji} f_i^*, \quad j > n. \tag{4*}$$

3. Primer teorema de Fredholm. Las matrices de los sistemas (5) y (5*) son conjugadas según Hermite. Esto significa que los módulos de los determinantes de estas matrices son iguales. Por consiguiente, si uno de estos sistemas es resoluble con cualquier término independiente (es decir, el determinante correspondiente es distinto de cero), entonces el otro sistema posee también la misma propiedad y las soluciones de los dos sistemas se determinan unívocamente. En praticular, las soluciones de los correspondientes sistemas homogéneos son todas nulas y sólo nulas. O bien: si uno de los sistemas homogéneos ((5) ó (5*)) sólo tiene solución nula (por lo tanto, el determinante correspondiente es diferente de cero), el otro sistema también posee dicha propiedad; en este caso los sistemas (5) y (5*) son resolubles (unívocamente), cualesquiera que sean los términos independientes.

Esta misma propiedad es propia a las ecuaciones (1) y (1*).

En efecto, supongamos que la ecuación (1) (ó (1*)) es resoluble para cualquier g (o g^*) de H. O bien, que en virtud de (2) (ó (2*)), la misma ecuación (3) (ó (3*)) es resoluble para cualquier g (o z^*) de H. En particular, es resoluble también para cualquier g (o z^*) del subespacio tendido sobre los elementos $e_1, \ldots, e_n$. Por consiguiente, el sistema de ecuaciones (5) (ó (5*)) es resoluble, cualquiera que sea el segundo miembro. Es decir, el determinante del sistema es distinto de cero y los sistemas homogéneos (5) y (5*) sólo tienen soluciones nulas. Entonces, en virtud de (4) y (4*), las ecuaciones homogéneas (1) y (1*) sólo tienen soluciones nulas.

Viceversa, supongamos que una de las ecuaciones homogéneas (1) ó (1*) sólo tiene solución nula. Entonces, el sistema homogéneo correspondiente (5) ó (5*) sólo tiene solución nula. Por lo tanto, los determinantes de ambos sistemas son diferentes de cero. O sea, los sistemas heterogéneos (5) y (5*) son resolubles (unívocamente), cualesquiera que sean los términos independientes. En este caso, en virtud de (4) y (4*), son también resolubles (unívocamente) las ecuaciones (1) y (1*), cualesquiera que sean los términos independientes de H. Esto quiere decir que existen los operadores inversos $(I-A)^{-1}$ y $(I-A^*)^{-1}$, definidos en H.

Mostremos que estos operadores son acotados.

Supongamos que el sistema (5) es unívocamente resoluble (el determinante de la matriz en (5) es diferente de cero) y su solución es $(h_1, \ldots, h_n)$. De la regla de Cramer se deduce que existe tal constante $C>0$, no dependiente del término independiente en (5), que tiene lugar la desigualdad

$$\sum_{j=1}^{n} |h_j|^2 \leqslant C^2 \sum_{j=1}^{n} \Big| g_j + \sum_{i=n+1} a_{ij} g_i \Big|^2. \tag{6}$$

Puesto que

$$\sum_{j=1}^{n} \Big| g_j + \sum_{i=n+1}^{\infty} a_{ij} g_i \Big|^2 \leqslant 2 \sum_{j=1}^{n} \Big(|g_j|^2 + \sum_{i=n+1}^{\infty} |a_{ij}|^2 \cdot \sum_{i=n+1}^{\infty} |g_i|^2 \Big) \leqslant$$
$$\leqslant \|g\|^2 \left(2 + 2n \|A_1 (I - A_2)^{-1}\|^2\right) = C_1^2 \|g\|^2,$$

resulta que

$$\sum_{j=1}^{n} |h_j|^2 \leqslant (CC_1)^2 \|g\|^2$$

y

$$\|h\|^2 = \sum_{j=1}^{n} |h_j|^2 + \sum_{j=n+1}^{\infty} |g_j|^2 \leqslant (1 + C^2C_1^2) \|g^2\| = C_2^2 \|g\|^2.$$

Por esto, según (2),

$$\|f\| \leqslant C_3 \|g\| \tag{7}$$

donde $C_3 > 0$ no depende de g. Precisamente esto significa que el operador $(I - A)^{-1}$ y, consecuentemente, $(I - A^*)^{-1}$ son acotados: $\|(I - A)^{-1}\| = \|(I - A^*)^{-1}\| \leqslant C_3$.

Queda, pues, demostrada la siguiente afirmación.

TEOREMA 1 (primer teorema de Fredholm). *Sea A un operador lineal totalmente continuo que está definido en H y actúa de H en H. Si una de las ecuaciones* (1) *ó* (1*) *tiene solución con cualquier término independiente, la segunda ecuación también tiene solución con cualquier término independiente, con la particularidad de que estas dos soluciones son únicas, es decir, las ecuaciones homogéneas* (1) $(g = o)$ *y* (1*) $(g^* = o)$ *sólo tienen soluciones nulas.*

Si una de las ecuaciones homogéneas (1) $(g = o)$ *ó* (1*) $(g^* = o)$ *sólo tiene solución nula, la otra también tiene sólo solución nula. Además, las ecuaciones* (1) *y* (1*) *son unívocamente resolubles, cualesquiera que sean los términos independientes, es decir, existen operadores $(I - A)^{-1}$ y $(I - A^*)^{-1}$, definidos en H, siendo estos operadores acotados.*

4. Segundo teorema de Fredholm. Observemos que en los sistemas (5) y (5*) los rangos de las matrices $B = \| b_{ij} \|$, donde $b_{ij} = \delta_{ij} - a_{ij}$, $i, j = 1, \ldots, n$ ($\delta_{ij} = 0$ cuando $i \neq j$, $\delta_{ij} = 1$) y $B^* = \| \overline{b}_{ji} \|$ son iguales. Por ello, los sistemas homogéneas (5) y (5*) siempre tienen un igual número $k \leqslant n$ de soluciones linealmente independientes. Entonces, en virtud de (2), (4) y (4*), en los conjuntos de todas las soluciones de las ecuaciones homogéneas (1) y (1*) también están contenidas exactamente k soluciones linealmente independientes.

De este modo queda demostrado el

TEOREMA 2 (segundo teorema de Fredholm). *Si la ecuación homogénea* (1) (*A es un operador totalmente continuo que está definido en H y actúa de H en H*) *tiene soluciones no nulas, entre éstas habrá solamente un número finito de soluciones linealmente independientes. Además, la ecuación homogénea* (1*) *tiene la misma cantidad de soluciones linealmente independientes.*

5. Tercer teorema de Fredholm. Pasemos ahora al problema de la resolución de la ecuación (1) en el caso en que la ecuación homogénea (1) pueda tener soluciones no nulas. Según el segundo teorema de Fredholm, la ecuación homogénea (1) tiene un número finito de soluciones linealmente independientes: $f^1, \ldots, f^k$. El mismo número de soluciones linealmente independientes tiene la ecuación homogénea (1*): $f^{1*}, \ldots, f^{k*}$. El sistema $f^1, \ldots, f^k$ (igual que el sistema $f^{1*}, \ldots, f^{k*}$) puede considerarse ortonormal.

TEOREMA 3 (tercer teorema de Fredholm). *Para que la ecuación (1) con el operador totalmente continuo A (que está definido en H y actúa de H en H) tenga solución, es necesario y suficiente que el elemento g sea ortogonal a todas las soluciones de la ecuación homogénea (1*).*

Entre todas las soluciones de la ecuación (1) existe la única solución f que es ortogonal a todas las soluciones de la ecuación homogénea (1). Cualquier otra solución de la ecuación (1) se presenta como la suma de la solución citada y alguna otra solución de la ecuación homogénea (1). Para la solución f tiene lugar la desigualdad (7) con una constante no dependiente de g.

Supongamos que la ecuación (1) tiene solución. En este caso, en virtud de (2), existe una solución de la ecuación (3) y junto con ella, la del sistema (5).

Supongamos que el rango de la matriz $B = \| b_{ij} \|$, donde $b_{ij} = \delta_{ij} - a_{ij}$, $i, j = 1, \ldots, n$, es igual a $n - k$. En este caso el subespacio R_{n-k} del espacio vectorial n-dimensional tendido sobre los vectores $B_i = (b_{i1}, \ldots, b_{in})$, $i = 1, \ldots, n$, — son columnas de la matriz B, tiene dimensión $n - k$. Puesto que el sistema homogéneo (5*): $\sum_{i=1}^{n} \bar{b}_{ji} f_i^* = 0$, $j = 1, \ldots, n$, puede escribirse en la forma $(\bar{f}^*, B_i) = 0$, $i = 1, \ldots, n$, las soluciones de este sistema forman un subespacio k-dimensional ortogonal al subespacio R_{n-k}; designémoslo mediante $R_{n-k}^{\perp}$.

Según el teorema de Kronecker — Capelli, para que el sistema (5) tenga solución, es necesario y suficiente que el rango de la matriz B sea igual al rango de la matriz ampliada que se obtiene agregando a B una columna de términos independientes en (5), es decir, que el vector de los términos independientes pertenezca al espacio R_{n-k}, o (lo que es igual) que sea ortogonal al subespacio $R_{n-k}^{\perp}$.

Tomando en consideración que toda solución f^* de la ecuación homogénea (1*) tiene la forma

$$f^* = f_1^* e_1 + \ldots + f_n^* e_n + f_{n+1}^* e_{n+1} + \ldots,$$

donde el vector $\bar{f}^* = (f_1^*, \ldots, f_n^*)$ es la solución del sistema homogéneo (5*) y $f_j^* = \sum_{i=1}^{n} \bar{a}_{ji} f_i^*$ para $j > n$, y, escribiendo la condición de ortogonalidad de los vectores f^* y el segundo miembro en (5) en la forma

$$0 = \sum_{j=1}^{n} \Big(g_j + \sum_{i=n+1}^{\infty} a_{ij} g_i\Big) \overline{f_j^*} = \sum_{i=1}^{n} g_i \overline{f_i^*} + \sum_{i=n+1}^{\infty} g_i \overline{f_i^*} = (g, f^*).$$

resulta que si la solución de la ecuación heterogénea (1) existe, el elemento g debe ser ortogonal a todas las soluciones de la ecuación homogénea (1*).

Y viceversa, si g es ortogonal a todas las soluciones f^* de la ecuación homogénea (1*), el vector con coordenadas $g_j + \sum_{i=n+1}^{\infty} a_{ij} g_i$, $j = 1, \ldots, n$, es ortogonal a todas las soluciones f^* del sistema homogéneo (4*). Por consiguiente, el sistema (5) y, junto con él, la ecuación (1) tienen solución.

Sea f_0 una solución cualquiera de la ecuación heterogénea (1) y sea $f^1, \ldots, f^k$ un sistema ortonormal de soluciones de la ecuación homogénea (1). Entonces, el elemento $f = f_0 - (f_0, f^1) f^1 - \ldots - (f_0, f^k) f^k$ también será la solución de la ecuación (1), con la particularidad de que ella es ortogonal a todas las soluciones de la ecuación homogénea (1). Tal solución es única: si existiera otra solución de este género $(\overline{f})$, su diferencia $f - \overline{f}$, siendo solución de la ecuación homogénea (1), sería ortogonal a todas las soluciones de la ecuación homogénea (1), incluso ortogonal a sí misma, es decir, $f - \overline{f} = o$.

Supongamos que f' es una solución cualquiera de la ecuación heterogénea (1). Entonces, $f' - f = f''$ es la solución de la ecuación homogénea (1), es decir, $f' = f + f''$.

Demostremos ahora la desigualdad (7). Sea h un elemento de H, correspondiente, según (2), al elemento f. Esto quiere decir que h es una solución de la ecuación (3) que satisface k condiciones

$$0 = (f, f^i) = ((I - A_2)^{-1} h, f^i) = (h, (I - A_2^*)^{-1} f^i), \qquad i = 1, \ldots, k. \quad (8)$$

Ya que la matriz ampliada del sistema (5) tiene el mismo rango $(n - k)$ que la matriz B, algunas k ecuaciones en el sistema (5) son combinaciones lineales de las $n - k$ ecuaciones restantes. Por lo tanto, si excluimos estas k ecuaciones, el sistema obtenido será equivalente al sistema (5).

De modo que el vector n-dimensional $(h_1, \ldots, h_n)$ es una solución de un sistema lineal compuesto de n ecuaciones ($n - k$ ecuaciones de (5) y k ecuaciones (8)), cuyos coeficientes no dependen del segundo miembro en (5). Además, de la unicidad del elemento f se desprende que $(h_1, \ldots, h_n)$ es una solución única de este sistema, es decir, el determinante del sistema obtenido es diferente de cero. Entonces, el vector $(h_1, \ldots, h_n)$ puede ser obtenido según la regla de Cramer. Por consiguiente, para este vector es válida la desigualdad (6), de la cual se deduce directamente la desigualdad (7). El teorema está demostrado.

6. Valores propios y elementos propios de un operador totalmente continuo. Un número λ se llama valor propio del operador lineal A que actúa de H en H, siempre que exista un elemento $f \in H$ tal que

$f \neq o$ y $Af = \lambda f$. En este caso, f se denomina *elemento propio* del operador A. El número $\mu = 1/\lambda$, cuando $\lambda \neq 0$, recibe el nombre de *número característico*. Como a la par con f el elemento cf para cualquier constante $c \neq 0$ es también elemento propio que corresponde al valor propio λ, entonces, los elementos propios se pueden considerar normados, por ejemplo, mediante la condición $\| f \| = 1$.

El número máximo de elementos propios que son linealmente independientes y que corresponden al número característico dado (al valor propio) se llama *multiplicidad* de este número característico del valor propio. Si al número característico (al valor propio) se le asigna un número infinito de elementos propios linealmente independientes, la multiplicidad del número característico (del valor propio) es infinita.

Supongamos que el operador A, definido por todo el H, es totalmente continuo. Entonces, el operador μA (μ es un número complejo arbitrario) también es totalmente continuo. De los teoremas 1, 2 y 3 se deducen las siguientes afirmaciones.

Para que la ecuación

$$f - \mu Af = g \tag{1'}$$

sea resoluble para todo $g \in H$, es necesario y suficiente que μ no sea número característico del operador A (es decir, que $1/\mu$ no sea valor propio). Cuando μ es un número característico, su multiplicidad es finita y $\bar{\mu}$ será un número característico del operador A^* de la misma multiplicidad. En este caso, para que la ecuación (1') sea resoluble, es necesario y suficiente que el elemento g sea ortogonal a todos los elementos propios del operador A^*, correspondientes al valor propio $1/\bar{\mu}$. En estas condiciones existe la única solución de la ecuación (1'), ortogonal a todos los elementos propios de A que corresponden al valor propio $1/\mu$.

Precisamente estas afirmaciones se consideran, habitualmente, como los teoremas de Fredholm.

7. Cuarto teorema de Fredholm. Establezcamos ciertas propiedades de los números característicos de un operador totalmente continuo.

TEOREMA 4 (cuarto teorema de Fredholm). *Para todo $M > 0$ en el círculo $\{| \mu | < M\}$ de un plano complejo puede contenerse sólo una cantidad finita de números característicos del operador totalmente continuo definido en el campo H y que actúa de H en H, o bien (lo que es lo mismo), fuera del círculo $\{| \lambda | < 1/M\}$ puede sólo existir un número finito de valores propios.*

Supongamos, al contrario, que en el círculo $\{| \mu | < M\}$ hay una cantidad infinita de números característicos $\mu_1, \ldots, \mu_n, \ldots, \mu_i \neq \neq \mu_j$, $i \neq j$. Sea e_i un elemento propio correspondiente al número característico μ_i, $i = 1, 2, \ldots$

Mostremos que para todo $n \geqslant 1$, el sistema $e_1, \ldots e_n$ es linealmente independiente. Cuando $n = 1$, esta afirmación es evidente. Sea también válida para $n-1$. Supondremos que $e_1, \ldots, e_n$ son linealmente dependientes. Entonces, para ciertas constantes $c_1, \ldots, \ldots, c_{n-1}$ de las cuales no todas son nulas, tenemos que $e_n = c_1e_1 + \ldots + c_{n-1}e_{n-1}$. Pero, $Ae_n = \frac{e_n}{\mu_n} = c_1\frac{e_1}{\mu_1} + \ldots + c_{n-1}\frac{e_{n-1}}{\mu_{n-1}}$, de donde $c_1\left(1-\frac{\mu_n}{\mu_1}\right)e_1 + \ldots + c_{n-1}\left(1-\frac{\mu_n}{\mu_{n-1}}\right)e_{n-1} = 0$, lo que no puede tener lugar, puesto que $1-\frac{\mu_n}{\mu_k} \neq 0$, $k = 1, \ldots, n-1$.

Designemos por $\mathfrak{N}_n$ un subespacio tendido sobre los elementos $e_1, \ldots, e_n$. De lo demostrado se deduce que $\mathfrak{N}_1 \subset \mathfrak{N}_2 \subset \ldots \subset \mathfrak{N}_n \subset \subset \ldots$ y que no existe ningún número n para el cual $\mathfrak{N}_n \neq \mathfrak{N}_{n-1}$. Por eso, para todo n existe un elemento $f_n \in \mathfrak{N}_n$, $f_n \perp \mathfrak{N}_{n-1}$, $\| f_n \| = 1$. Como el conjunto $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ es acotado y el operador A es totalmente continuo, del conjunto $Af_1, \ldots, Af_n, \ldots$ se puede extraer una subsucesión fundamental.

Mostremos que en realidad esto no puede hacerse y que esto será, la contradicción que demuestra el teorema.

Para dos números enteros arbitrarios m y n, $m<n$,

$$Af_n - Af_m = \frac{1}{\mu_n} f_n + \frac{1}{\mu_n}(\mu_n Af_n - f_n) - Af_m = \frac{1}{\mu_n} f_n + \sigma_n,$$

donde

$\sigma_n \in \mathfrak{N}_{n-1}$, puesto que $Af_m \in \mathfrak{N}_m \subset \mathfrak{N}_{n-1}$ y $\mu_n Af_n - f_n = \mu_n A(c_1e_1 + \ldots + c_ne_n) - (c_1e_1 + \ldots + c_ne_n) = c_1\left(\frac{\mu_n}{\mu_1}-1\right)e_1 + \ldots \ldots + c_{n-1}\left(\frac{\mu_n}{\mu_{n-1}}-1\right)e_{n-1} \in \mathfrak{N}_{n-1}$.

Por ello, $\|Af_n - Af_m\| = \left\| \frac{1}{\mu_n} f_n + \sigma_n \right\| \geqslant \frac{1}{|\mu_n|}\|f_n\| = \frac{1}{|\mu_n|} \geqslant \frac{1}{M}$, es decir, la sucesión $Af_1, \ldots, Af_n, \ldots$ no puede contener una subsucesión fundamental. El teorema está demostrado.

Del teorema 4 se deduce que *un conjunto de números característicos de un operador totalmente continuo es a lo sumo numerable* (¡*también puede ser vacío*!). *Los números característicos, si es que existen, pueden ser numerados en el orden en que los módulos no decrecen*

$$\mu_1, \quad \mu_2, \ldots, \tag{9}$$

$|\mu_i| \leqslant |\mu_{i+1}|$, $i = 1, 2, \ldots$, *con la particularidad de que la frecuencia con que el número característico se encuentra en la sucesión* (9) *es igual a su multiplicidad. El conjunto* (9) *puede contener o bien un número finito de elementos* (*en particular, puede ser vacío*), *o bien un número infinito de elementos. En el último caso*

$$|\mu_k| \to \infty \text{ cuando } k \to \infty. \tag{10}$$

A la sucesión (9) *le corresponde una sucesión de los elementos propios correspondientes*

$$e_1, e_2, \ldots, \tag{11}$$

que es linealmente independiente.

En el párrafo siguiente demostraremos que para un operador $A \neq 0$, totalmente continuo y autoconjugado, los conjuntos (9) y (11) no son vacíos.

§ 5. Operadores autoconjugados totalmente continuos

1. Valores propios y elementos propios del operador autoconjugado totalmente continuo. Sea A un operador acotado autoconjugado que actúa de H en H. Puesto que para todo f, $\|f\| = 1$, $|(Af, f)| \leqslant \|A\|$, en la esfera unitaria $\|f\| = 1$ existen cotas exactas, superior e inferior, de la forma cuadrática (Af, f) del operador A: $m = \inf\limits_{\|f\|=1} (Af, f)$, $M = \sup\limits_{\|f\|=1} (Af, f)$, siendo $|m| \leqslant \|A\|$, $M \leqslant \|A\|$, $m \leqslant (Af, f) \leqslant M$.

Cuando f es un elemento de H, arbitrario y diferente de cero, el elemento $f/\|f\|$ pertenece a la esfera unitaria. Por eso, $m = \inf\limits_{f \in H} \frac{(Af, f)}{\|f\|^2}$, $M = \sup\limits_{f \in H} \frac{(Af, f)}{\|f\|^2}$, y, consecuentemente, para todo f de H se cumplen las desigualdades $m\|f\|^2 \leqslant (Af, f) \leqslant M\|f\|^2$.

Como la forma cuadrática del operador A es de valores reales, todos sus *valores propios* (*números característicos*) *son reales*: si λ es el valor propio y f, el elemento propio correspondiente, es decir, $Af = \lambda f$, entonces $\lambda = (Af, f)/\|f\|^2$. Por lo tanto, $m \leqslant \lambda \leqslant M$.

Los elementos propios f_1 y f_2 del operador A *que corresponden a los valores propios diferentes* λ_1 y λ_2, *son ortogonales*. En efecto, multiplicando, de manera escalar, las igualdades $Af_1 = \lambda_1 f_1$, $Af_2 = \lambda_2 f_2$ por f_2 y f_1, respectivamente, y sustrayendo después una de la otra, obtendremos $(Af_1, f_2) - (f_1, Af_2) = (\lambda_1 - \lambda_2)(f_1, f_2)$. Puesto que $(Af_1, f_2) = (f_1, Af_2)$ y $\lambda_1 \neq \lambda_2$, resulta $(f_1, f_2) = 0$.

LEMA 1. *Para que el número* $M = \sup\limits_{\|f\|=1} (Af, f)$ *sea valor propio del operador acotado autoconjugado* A *que actúa de* H *en* H *y para que* f_0 (*considerando* $\|f_0\| = 1$) *sea un elemento propio correspondiente, es necesario y suficiente que se cumpla la igualdad* $(Af_0, f_0) = M$.

Análogamente, para que el número $m = \inf\limits_{\|f\|=1} (Af, f)$ *sea valor propio del operador* A *y* f_0 (*considerando* $\|f_0\| = 1$), *un elemento propio correspondiente, es necesario y suficiente que se cumpla la igualdad* $(Af_0, f_0) = m$.

Si M es un valor propio y f_0, un elemento propio del operador A que corresponde a M, entonces $Af_0 = Mf_0$. Por consiguiente, $(Af_0, f_0) = M(f_0, f_0) = M$. La necesidad está demostrada.

Demostremos la suficiencia. Sea $(Af_0, f_0) = M$ para cierto f_0, $\|f_0\| = 1$, o, lo que es lo mismo, $(Mf_0 - Af_0, f_0) = 0$. Puesto que para todo f de H $0 \leqslant M\|f\|^2 - (Af, f) = (Mf - Af, f)$, para φ arbitrario de H y cualquier t complejo $(M(f_0 + t\varphi) - A(f_0 + t\varphi), f_0 + t\varphi) \geqslant 0$, es decir, $\bar{t}(Mf_0 - Af_0, \varphi) + t\overline{(Mf_0 - Af_0, \varphi)} + |t|^2 (M\varphi - A\varphi, \varphi) \geqslant 0$. Haciendo en esta ecuación $t = -\sigma e^{i\alpha}$, donde $\alpha = \arg(Mf_0 - Af_0, \varphi)$ y σ es real, obtendremos una desigualdad $-2\sigma|(Mf_0 - Af_0, \varphi)| + \sigma^2(M\varphi - A\varphi, \varphi) \geqslant 0$, que es válida para cualquier σ real. De esta desigualdad se deduce la igualdad $(Mf_0 - Af_0, \varphi) = 0$. Por eso, en virtud de la arbitrariedad de φ, $Mf_0 - Af_0 = 0$.

La segunda afirmación del lema se desprende de la primera, si en vez del operador A tomamos el operador $-A$. El lema queda demostrado.

LEMA 2. *Si el operador A, que actúa de H en H, es autoconjugado y totalmente continuo, el número $M = \sup\limits_{\|f\|=1} (Af, f)$ (por analogía, el número $m = \inf\limits_{\|f\|=1} (Af, f)$), siempre que sea distinto de cero, será el valor propio de este operador.*

Sea $M \neq 0$. Examinemos una forma bilineal hermitiana $(Mf - Af, g)$, $f, g \in H$ y una forma cuadrática $(Mf - Af, f)$, correspondiente a la primera. Para todo f de H tiene lugar la desigualdad $(Mf - Af, f) \geqslant 0$.

Mostremos que existe un elemento f_0, distinto de cero, tal que $(Mf_0 - Af_0, f_0) = 0$. En este caso la afirmación del lema 1 se deduce del lema 1.

Supongamos que tal elemento f_0 no existe. Entonces $(Mf - Af, f)$, $f \in H$ puede reducirse a cero sólo cuando $f = o$. Por eso, la forma bilineal $(Mf - Af, g)$ puede tomarse como nuevo producto escalar en H. Esto significa que para cualesquiera f y g de H se verifica la desigualdad de Buniakovski

$$|(Mf - Af, g)|^2 \leqslant (Mf - Af, f)(Mg - Ag, g). \tag{1}$$

De la definición de M en calidad de una cota exacta superior de la forma cuadrática (Af, f) en la esfera unitaria $\|f\| = 1$ se desprende que existe una sucesión $f_1, f_2, \ldots, \|f_i\| = 1$, $i = 1, 2, \ldots$, para la cual $(Af_n, f_n) \to M$, o bien

$$(Mf_n - Af_n, f_n) \to 0, \qquad n \to \infty. \tag{2}$$

Haciendo en la desigualdad (1) $f = f_n$, $g = Mf_n - Af_n$, obtendremos $\|Mf_n - Af_n\|^4 \leqslant (Mf_n - Af_n, f_n)(M^2 f_n - 2MAf_n + A^2 f_n, Mf_n - Af_n) \leqslant (Mf_n - Af_n, f_n)(|M| + \|A\|)^3$. Por eso, de la correlación (2) se deduce que la sucesión $Mf_n - Af_n \to 0$ cuando $n \to \infty$. Como el operador A es totalmente continuo, mientras que la sucesión $f_1, f_2, \ldots$ es acotada ($\| f_i \| = 1$), la sucesión $Af_1, Af_2, \ldots$ será compacta. Por consiguiente, se puede extraer de esta sucesión una subsucesión convergente; vamos a considerar que esta última coincide con $Af_1, Af_2, \ldots$ Luego, la sucesión $Mf_1, Mf_2, \ldots$, y, junto con ella ($M \neq 0$), la sucesión $f_1, f_2, \ldots$ es también convergente. Si designamos por f_0 el límite de la sucesión $f_1, f_2, \ldots$, será evidente que $\| f_0 \| = 1$, y, en virtud de (2), $(Mf_0 - Af_0, f_0) = 0$. El lema está comprobado.

TEOREMA 1. *Para todo operador totalmente continuo y autoconjugado A que es distinto de cero y actúa de H en H (H es un espacio de Hilbert) uno de los números* $\pm 1/\| A \| = \pm 1/\sup\limits_{\|f\|=1} |(Af, f)|$ *es el primer (mínimo por su valor absoluto) número característico μ_1, con la particularidad de que $\mu_1 = 1/M$ cuando $M > |m|$, donde* $M = \sup\limits_{\|f\|=1} (Af, f)$, $m = \inf\limits_{\|f\|=1} (Af, f)$, $\mu_1 = 1/m$ *cuando $M < |m|$. Si $M = |m|$, $1/M$ y $1/m$ ambos son los números característicos del operador A con módulos mínimos.*

Todos los elementos f_0 para los cuales es válida la igualdad $(Af_0, f_0)/\| f_0 \|^2 = M$ cuando $M > |m|$, o la igualdad $(Af_0, f_0)/\| f_0 \|^2 = m$ cuando $M \leqslant |m|$, son, y sólo son ellos, los elementos propios correspondientes a μ_1. Si $M = |m|$, los elementos propios, correspondientes al número característico $1/M$, son aquellos elementos f_0, y sólo aquellos, para los cuales $(Af_0, f_0)/\| f_0 \|^2 = M$ y los elementos propios, correspondientes al número característico $1/m$, son aquellos elementos f_0, y sólo aquellos, para los que $(Af_0, f_0)/\| f_0 \|^2 = m$.

En particular, si A es un operador no negativo, tenemos

$$\mu_1 = \frac{1}{\| A \|} = \frac{1}{\sup\limits_{\|f\|=1} (Af, f)} = \inf_{\|f\|=1} \frac{1}{(Af, f)} = \inf_{f \in H} \frac{\| f \|^2}{(Af, f)},$$

y los valores propios correspondientes a μ_1, normados por la condición $\| f \| = 1$, son aquellos elementos f_0, $\| f_0 \| = 1$, y sólo aquellos, en los cuales la forma cuadrática (Af, f) sobre la esfera unitaria alcanza su cota superior.

Con el objeto de demostrar el teorema 1 es suficiente señalar, en virtud de los lemas 1 y 2, que $\| A \| = N$, donde $N = \sup\limits_{\|f\|=1} |(Af, f)| = \max(|m|, M)$. Como se ha mostrado arriba, $N \leqslant \| A \|$, por lo que sólo nos queda establecer la validez de la igualdad inversa $\| A \| \leqslant N$.

Ya que para todo $g \in H$ $|(Ag, g)| \leqslant N \| g \|^2$, y como

$$(A(f_1 \pm f_2), f_1 \pm f_2) = (Af_1, f_1) + (Af_2, f_2) \pm 2 \operatorname{Re}(Af_1, f_2),$$

para cualesquiera f_1 y f_2 de H

$$|\operatorname{Re}(Af_1, f_2)| = \frac{1}{4} |(A(f_1+f_2), f_1+f_2) - (A(f_1-f_2), f_1-f_2) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{4} (|(A(f_1+f_2), f_1+f_2)| + |(A(f_1-f_2), f_1-f_2)|) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{N}{4} (\|f_1+f_2\|^2 + \|f_1-f_2\|^2) = \frac{N}{2} (\|f_1\|^2 + \|f_2\|^2).$$

Haciendo en esta desigualdad $f_1 = \sqrt{N} f$, $f_2 = \frac{1}{\sqrt{N}} Af$, donde f es un elemento arbitrario de H, obtenemos $\|Af\|^2 \leqslant \frac{N}{2} \left(N \|f\|^2 + \frac{1}{N} \|Af\|^2 \right)$, de lo cual se deduce que $\|Af\| \leqslant N \|f\|$. Por esto, $\|A\| \leqslant N$. El teorema queda demostrado.

De este modo, los conjuntos

$$\mu_1, \mu_2, \ldots, \tag{3}$$
$$e_1, e_2, \ldots \tag{4}$$

de números característicos y de elementos propios, que les corresponden, son no vacíos para el operador autoconjugado totalmente continuo $A \neq 0$. En este caso, todos los números característicos son reales y el sistema de elementos propios puede considerarse ortonormal, puesto que los elementos propios que corresponden a distintos números característicos son ortogonales, mientras que el número finito de elementos propios linealmente independientes, que corresponden a un número característico, puede ser ortonormado.

Sea A un operador autoconjugado totalmente continuo que actúa de H en H. Designemos por H_n un subespacio del espacio H, compuesto de los elementos f que son ortogonales a los primeros n elementos propios del operador A: $(f, e_i) = 0$, $i = 1, \ldots, n$.

Para todo f de H_n el elemento Af también pertenece a H_n, puesto que $(Af, e_i) = (f, Ae_i) = \frac{1}{\mu_i}(f, e_i) = 0$, cualquiera que sea $i = 1, \ldots, n$. Esto significa que A puede considerarse como operador del espacio de Hilbert que actúa de H_n en H_n. Es, por supuesto, autoconjugado y totalmente continuo. Sus números característicos y elementos propios correspondientes coinciden con los números característicos μ_{n+1}, μ_{n+2} y los elementos propios correspondientes e_{n+1}, e_{n+2} del operador A que actúa de H en H. Por ello, según el teorema 1 aplicado al operador A que actúa de H_n en H_n, tenemos

$$|\mu_{n+1}| = \frac{1}{\sup\limits_{\substack{\|f\|=1 \\ f \in H_n}} |(Af, f)|} = \frac{1}{\sup\limits_{\substack{\|f\|=1 \\ (f, e_i)=0 \\ i=1, \ldots, n}} (Af, f)}$$

Si el operador A es no negativo,

$$\mu_{n+1} = \frac{1}{\sup\limits_{\substack{\|f\|=1 \\ (f,\, e_i)=0 \\ i=1,\ldots,n}} (Af,\, f)} = \inf_{\substack{(f,\, e_i)=0 \\ i=1,\ldots,n}} \frac{\|f\|^2}{(Af,\, f)}. \tag{5}$$

2. Desarrollo en la serie de Fourier según los elementos propios del operador autoconjugado totalmente continuo. Examinemos un sistema ortonormal (4) compuesto de los elementos propios del operador autoconjugado totalmente continuo A que actúa de H en H, $A \neq 0$. Sea P_n un operador de proyección ortogonal en el subespacio tendido sobre los elementos $e_1, \ldots, e_n$ y sea $A_n = A - AP_n = A(I - P_n)$.

El operador A_n es lineal y acotado: $\|A_n\| \leqslant \|A\|$.

El operador P_n es permutable con A, puesto que para todo $f \in H$

$$\begin{gathered} AP_nf = A(f_1e_1 + \ldots + f_ne_n) = f_1Ae_1 + \ldots + f_nAe_n = \\ = \frac{f_1}{\mu_1}e_1 + \ldots + \frac{f_n}{\mu_n}e_n = \left(f,\ \frac{e_1}{\mu_1}\right)e_1 + \ldots + \left(f,\ \frac{e_n}{\mu_n}\right)e_n = \\ = (f,\ Ae_1)\,e_1 + \ldots + (f,\ Ae_n)\,e_n = \\ = (Af,\ e_1)\,e_1 + \ldots + (Af,\ e_n)\,e_n = P_nAf. \end{gathered}$$

Ya que los operadores A y P_n son permutables y autoconjugados, AP_n será un operador autoconjugado: $(AP_n)^* = P_n^*A^* = P_nA = AP_n$. Por esta razón, el operador A_n es también autoconjugado.

Además, es totalmente continuo, por ser la suma de dos operadores totalmente continuos, a saber, el operador A y el operador de dimensión finita $AP_n = P_nA$.

Para todo $f \in H$ tenemos

$$A_nf = Af - \sum_{k=1}^{n} \frac{f_k}{\mu_k} e_k. \tag{6}$$

Los números $\mu_{n+1}, \ldots$ y elementos $e_{n+1}, \ldots$ son los números característicos y los elementos propios correspondientes del operador A_n. En efecto, dado que $(e_p,\ e_k) = 0$ cuando $k \neq p$, en virtud de (6), para $p \geqslant n+1$ tenemos $A_ne_p = Ae_p - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(e_p,\, e_k)}{\mu_k} e_k = \frac{e_p}{\mu_p}$.

El operador A_n no tiene otros números característicos. Sean, al contrario, μ y e el número característico y el elemento propio, respectivamente, $\mu A_ne = e$, $\mu \neq \mu_p$, $p \geqslant n+1$. Multiplicando de modo escalar esta igualdad por e_k, $k \leqslant n$, obtenemos $(e,\ e_k) = \mu\,(A_ne,\ e_k) = \mu\,(e,\ A_ne_k) = 0$, puesto que $A_ne_k = 0$ cuando

$k \leqslant n$. Por esta razón, en vista de (6), $A_n e = Ae$, es decir, $\mu Ae = e$. De este modo, μ es un número característico y e, un elemento propio del operador A. Como todos los números característicos del operador A están contenidos en la sucesión (3), y dado que $e \perp e_k$, $k = 1, \ldots, n$, entonces μ coincide con uno de los μ_k, $k \geqslant n+1$.

Puesto que μ_{n+1} es el menor número característico, por su valor absoluto, del operador A_n, en virtud del teorema 1, tenemos

$$|\mu_{n+1}| = \frac{1}{\|A_n\|} \tag{7}$$

Cuando las sucesiones (3) y (4) son finitas y se componen de m elementos, entonces, en virtud del teorema 1, el operador $A_m = O$, puesto que no tiene números característicos. En este caso, $A = AP_m$ es un operador de dimensión finita, es decir, para todo $f \in H$

$$Af = \sum_{k=1}^{m} \frac{f_k}{\mu_k} e_k = \sum_{k=1}^{m} (Af)_k e_k. \tag{8}$$

Supongamos ahora que las sucesiones (3) y (4) son infinitas. De (7) y de la correlación (10) del párrafo anterior se deduce que $\|A_n\| \to 0$ cuando $n \to \infty$. Por lo tanto, para cualquier $f \in H$ $\|A_n f\| \leqslant \leqslant \|A_n\| \|f\| \to 0$ cuando $n \to \infty$, es decir, para todo $f \in H$

$$Af = \lim_{n\to\infty} AP_n f = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{\mu_k} e_k = \sum_{k=1}^{\infty} (Af)_k e_k. \tag{9}$$

Así pues, queda demostrado el siguiente importante teorema

TEOREMA 2 (teorema de Hilbert—Schmidt). *Si A es un operador autoconjugado totalmente continuo que actúa de H en H, y si f es un elemento arbitrario de H, el elemento Af se desarrolla en la serie de Fourier* (9) (*ó* (8)) *según el sistema* (4).

En lo sucesivo necesitaremos varios corolarios del teorema de Hilbert—Schmidt.

De acuerdo con el lema 2, p. 6, § 2, la serie de Fourier $\sum_{k=1}^{\infty} f_k e_k$ de un elemento arbitrario $f \in H$ según el sistema ortonormal (4) es convergente en H. Por consiguiente, $A \sum_{k=1}^{\infty} f_k e_k = \sum_{k=1}^{\infty} f_k A e_k$. Pero, $f_k A e_k = f_k \frac{e_k}{\mu_k} = (f, Ae_k) e_k = (Af, e_k) e_k = (Af)_k e_k$. Por ello, en virtud de (9), tenemos

$$A\left(f - \sum_{k=1}^{\infty} f_k e_k\right) = o. \tag{10}$$

Si el operador A tiene su inversa A^{-1}, de la igualdad (10) se deduce

$$f=\sum_{k=1}^{\infty} f_k e_k$$

para todo elemento $f \in H$, lo que significa que en este caso el sistema (4) es una base ortonormal del espacio H. De esta manera se ha establecido el

COROLARIO 1. *Si un operador autoconjugado totalmente continuo A, que actúa de H en H, tiene operador inverso, el sistema* (4) *será una base ortonormal del espacio H.*

En el caso general, de la ecuación (10) sólo se deduce que para cualquier elemento $f \in H$ existe un elemento $e_0 \in H$, $Ae_0 = 0$ tal que

$$f=e_0+\sum_{k=1}^{\infty} f_k e_k. \tag{11}$$

El conjunto $\mathfrak{N}$ de elementos $g \in H$, para los cuales $Ag = 0$, es un subespacio del espacio H; todo elemento de $\mathfrak{N}$ distinto del elemento nulo, es elemento propio del operador A correspondiente al valor propio nulo. Al suponer que el espacio H es separable, podemos construir en $\mathfrak{N}$ una base ortonormal numerable $e_1', e_2', \ldots$ (compuesta de los valores propios del operador A correspondientes al valor propio nulo). En este caso, de (11) se desprende que para todo $f \in H$ tiene lugar el desarrollo

$$f=\sum f_k' e_k' + \sum f_k e_k,$$

donde $f_k' = (f,\ e_k')$.

De esta manera se establece el

COROLARIO 2. *Para todo operador autoconjugado totalmente continuo A del espacio separable (de Hilbert), que actúa de H en H, existe una base ortonormal del espacio H cuyos elementos son valores propios del operador A.*

En el capítulo precedente fueron introducidos los conceptos de los espacios de Banach y de Hilbert. Estos conceptos sólo se basan sobre ciertas correlaciones entre elementos: basta introducir operaciones de adición de los elementos, que satisfagan ciertos axiomas, y de multiplicación de estos elementos por números, por una norma o, correspondientemente, por un producto escalar. La naturaleza de los elementos de estos espacios no es de importancia y las afirmaciones generales obtenidas en el capítulo precedente son aplicables a todos los espacios, cualesquiera que sean los elementos que los componen. No obstante, las propiedades generales mencionadas no son suficientes para la teoría de ecuaciones diferenciales. Al estudiar las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, resulta natural examinar los así llamados espacios funcionales, es decir, los espacios cuyos elementos son funciones de n variables, reales en el caso que se considera.

En el presente capítulo introduciremos varios espacios funcionales y obtendremos algunas afirmaciones acerca de las relaciones mútuas entre ellos que nos permitirán de unas propiedades de los elementos establecer otras de sus propiedades.

§ 1. Espacios de funciones continuas y de funciones continuamentediferenciables

1. Espacios normados $C(\overline{Q})$ y $C^k(\overline{Q})$. Examinemos un conjunto $C(\overline{Q})$ de todas las funciones continuas en $\overline{Q}$ (Q es un dominio acotado del espacio R_n). Ante todo indiquemos que este conjunto es un espacio lineal. Se comprueba directamente que la funcional $\max\limits_{x \in \overline{Q}} |f(x)|$, definida en $C(\overline{Q})$, satisface todos los axiomas de la norma (p. 2, § 2, cap. II): $\max\limits_{x \in \overline{Q}} |cf| = |c| \max\limits_{x \in \overline{Q}} |f|$; $|f_1(x) + f_2(x)| \leqslant \leqslant |f_1(x)| + |f_2(x)|$ para todo $x \in \overline{Q}$, por lo tanto, $\max\limits_{x \in \overline{Q}} |f_1(x) +$

$+f_2(x)| \leqslant \max\limits_{x\in\overline{Q}} |f_1(x)| + \max\limits_{x\in\overline{Q}} |f_2(x)|$; $\max\limits_{x\in\overline{Q}} |f(x)| \geqslant 0$, y $\max\limits_{x\in\overline{Q}} |f(x)| = 0$ sólo cuando $f(x) \equiv 0$. Por consiguiente, en $C(\overline{Q})$ se puede introducir la norma

$$\|f\|_{C(\overline{Q})} = \max_{x\in\overline{Q}} |f(x)|. \tag{1}$$

La convergencia según la norma (1) es una convergencia uniforme en $\overline{Q}$.

El espacio $C(\overline{Q})$ con la norma (1) es de Banach, puesto que, según el criterio de Cauchy, una sucesión arbitraria de funciones de $C(\overline{Q})$, fundamental en la norma (1), converge uniformemente hacia cierta función de $C(\overline{Q})$.

Como toda función continua en $\overline{Q}$ es, de acuerdo con el teorema de Weierstrass, un límite de cierta sucesión de polinomios que converge uniformemente en $\overline{Q}$ (es decir, en la norma (1)), el conjunto de todos los polinomios es siempre denso en $C(\overline{Q})$. Mas, un polinomio arbitrario puede ser, a su vez, representado como el límite de la sucesión de polinomios de coeficientes reales que converge uniformemente en $\overline{Q}$. Por esta razón, en $C(\overline{Q})$ un conjunto numerable de todos los polinomios de coeficientes reales es también siempre denso. Esto quiere decir que el espacio $C(\overline{Q})$ es separable.

Examinemos en $C(\overline{Q})$ el conjunto $\dot{C}(\overline{Q})$ compuesto de todas las funciones que se reducen a cero en el contorno ∂Q del dominio Q. Evidentemente, $\dot{C}(\overline{Q})$ es una variedad lineal en $C(\overline{Q})$. Esta variedad es cerrada (en la norma (1)), puesto que una función de $\dot{C}(\overline{Q})$ sirve de límite para la sucesión de funciones de $\dot{C}(\overline{Q})$ convergente uniformemente en $\overline{Q}$. Por lo tanto, $\dot{C}(\overline{Q})$ es un subespacio del espacio $C(\overline{Q})$.

Examinemos ahora en $C(\overline{Q})$ los subconjuntos $C^k(\overline{Q})$, $k = 1, 2, \ldots$ compuestos de todas las funciones que en el dominio Q tienen todas las derivadas de un orden hasta k inclusive y estas derivadas son continuas en $\overline{Q}$. El conjunto $C^k(\overline{Q})$ es un espacio lineal. Además, en $C^k(\overline{Q})$ se puede introducir la siguiente norma

$$\|f\|_{C^k(\overline{Q})} = \sum_{|\alpha|\leqslant k} \max_{x\in\overline{Q}} |D^\alpha f(x)|. \tag{2}$$

La convergencia según esta norma es uniforme en $\overline{Q}$ para las funciones y para todas sus derivadas hasta el k-ésimo orden inclusive. Es evidente que el espacio $C^k(\overline{Q})$ (con la norma (2)) es de Banach.

Sea $\omega_h(|x-y|)$ cierto núcleo de mediación (véase el cap. I, Introducción) y $f \in C(\overline{Q})$. Examinemos, para $h>0$, la función

$$f_h(x)=\int_Q f(y)\omega_h(|x-y|)\,dy, \quad x\in R_n. \tag{3}$$

Las funciones $f_h(x)$, $h>0$, se llaman *funciones medias* para la función $f(x)$ (*funciones mediadas para* $f(x)$). De la propiedad a) del núcleo de mediación y del teorema 7, p. 7, § 1, cap. II, se deduce que $f_h(x)\in C^\infty(R_n)$, cualquiera que sea $h>0$. Además, $f_h(x)\equiv 0$ fuera de Q^h (Q^h es la unión de las bolas $\{|x-x^0|<h\}$ respecto a todo $x^0\in Q$).

Mostremos que *cuando* $f\in C(\overline{Q})$, la función $f_h(x)$ *tiende a* $f(x)$, *para* $h\to 0$, *uniformemente en cualquier subdominio* Q', *estrictamente interior del dominio* Q, $Q'\Subset Q$.

Efectivamente, para h suficientemente pequeños (menores que la distancia entre $\partial Q'$ y ∂Q), de las propiedades b), c) y a) del núcleo de mediación tenemos, cuando $x\in Q'$:

$$\begin{aligned}|f_h(x)-f(x)|&=\\ &=\left|\int_{|x-y|<h} f(y)\,\omega_h(|x-y|)\,dy-f(x)\int_{|x-y|<h}\omega_h(|x-y|)\,dy\right|\leqslant\\ &\leqslant \max_{|x-y|\leqslant h}|f(y)-f(x)|\int_{|x-y|<h}\omega_h(|x-y|)\,dy=\\ &=\max_{|x-y|\leqslant h}|f(y)-f(x)|.\end{aligned}$$

Por consiguiente, de la continuidad uniforme de $f(x)$ en Q obtenemos:

$$\|f_h-f\|_{C(\overline{Q'})}\to 0 \text{ cuando } h\to 0.$$

Ya que, para $f\in C^k(\overline{Q})$, cuando $x\in Q'$ y h suficientemente pequeños,

$$\begin{aligned}D_x^\alpha f_h(x)&=\int_Q f(y)\,D_x^\alpha\omega_h(|x-y|)\,dy=\\ &=(-1)^{|\alpha|}\int_Q f(y)\,D_y^\alpha\omega_h(|x-y|)\,dy=\\ &=\int_Q D_y^\alpha f(y)\cdot\omega_h(|x-y|)\,dy, \quad |\alpha|\leqslant k,\end{aligned}$$

entonces, de la afirmación demostrada tenemos:

si $f\in C^k(\overline{Q})$, *para cualquier* $Q'\Subset Q$

$$\|f_h-f\|_{C^k(\overline{Q'})}\to 0 \textit{ cuando } h\to 0.$$

2. Fórmulas de integración por partes. Supongamos que en el dominio Q (contorno $\partial Q \in C^1$) está dado el vector $A(x) = (A_1(x), \ldots, A_n(x))$ cuyas coordenadas $A_i(x) \in C(\overline{Q}) \cap C^1(Q)$, $i = 1, \ldots, n$. Del curso de Análisis se sabe que si la función div $A(x) = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial A_n}{\partial x_n}$ es continua en $\overline{Q}$, o, incluso, integrable respecto a Q, tiene lugar la siguiente *fórmula de Ostrogradski*:

$$\int_Q \operatorname{div} A(x)\, dx = \int_{\partial Q} A(x)\, n(x)\, dS, \tag{4}$$

donde n es un vector unitario de la normal al contorno ∂Q, exterior con relación al dominio Q.

Sea $u(x) \in C^2(Q) \cap C^1(\overline{Q})$, $v \in C^1(\overline{Q})$ y sea la función $\Delta u = \operatorname{div}(\nabla u)$ integrable en Q. Puesto que $v\Delta u = v \cdot \operatorname{div}(\nabla u) = \operatorname{div}(v\nabla u) - \nabla u \nabla v (\nabla u \nabla v = u_{x_1} v_{x_1} + \ldots + u_{x_n} v_{x_n})$, entonces, de acuerdo con la fórmula de Ostrogradski (4), tenemos

$$\int_Q v\Delta u\, dx = \int_{\partial Q} v \frac{\partial u}{\partial n}\, dS - \int_Q \nabla u \nabla v\, dx, \tag{5}$$

dado que $\nabla u \cdot n \big|_{\partial Q} = \frac{\partial u}{\partial n} \big|_{\partial Q}$.

Si las dos funciones, u y v, pertenecen a $C^2(Q) \cap C^1(Q)$, y las funciones Δu y Δv son integrables en Q, a la par con (5) tiene lugar la fórmula

$$\int_Q u\Delta v\, dx = \int_{\partial Q} u \frac{\partial v}{\partial n}\, dS - \int_Q \nabla v \nabla u\, dx. \tag{5'}$$

Sustrayendo, término a término, (5') de (5), obtenemos la igualdad

$$\int_Q (v\Delta u - u\Delta v)\, dx = \int_{\partial Q} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) dS. \tag{6}$$

Las fórmulas (5) y (6) llevan el nombre *de Green*.

§ 2. Espacios de funciones integrables

Como hemos mostrado arriba, el conjunto de funciones continuas en $\overline{Q}$ es un espacio de Banach con la norma $\max_{x \in \overline{Q}} |f(x)|$. Sin embargo, resulta frecuentemente más cómodo examinar en este conjunto normas integrales, por ejemplo, $\int\limits_Q |f(x)|\,dx$ ó $\left(\int\limits_Q |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}$ (no es difícil comprobar que en este caso se cumplen todos los axiomas de la norma). Examinemos un espacio con la norma $\int\limits_Q |f(x)|\,dx$, cuyos elementos están constituidos por funciones continuas en $\overline{Q}$. Este espacio normado no es completo. En efecto, de la definición de la integral lebesguiana se deduce que para toda función $f(x)$, integrable en el dominio Q, existe una sucesión $f_m(x)$ de funciones continuas en $\overline{Q}$ que en la norma dada converge hacia $f(x)$: $\int\limits_Q |f_m(x) - f(x)|\,dx \to 0$ cuando $m \to \infty$. Esto significa que si deseamos obtener un espacio normado (de Banach) completo, con la norma $\int\limits_Q |f(x)|\,dx$, que contenga todas las funciones continuas (o, incluso, indefinidamente diferenciables) en $\overline{Q}$, hemos de incluir en él todas las funciones integrables en Q. Pero, en este caso, la funcional $\int\limits_Q |f(x)|\,dx$ deja de ser la norma, puesto que no satisface el último axioma (véase p. 2, § 2, cap. II) de la norma, ya que $\int\limits_Q |f(x)|\,dx = 0$ para toda $f(x) = 0$ casi siempre en Q.

Sin embargo, en virtud del teorema 3, p. 4, § 1, cap. II, la igualdad $\int\limits_Q |f(x)|\,dx = 0$ es válida sólo para aquellas funciones $f(x)$ que son nulas en casi todo punto (c.t.p.) en Q. Por lo tanto, para que se cumpla el último axioma de la norma, tenemos que *identificar* todas las funciones que en c.t.p. en Q son iguales. Para ello se puede: o bien tomar por elementos del espacio las clases de funciones en cada una de las cuales están contenidas todas las funciones iguales en c.t.p., o bien (lo que de hecho es lo mismo) introducir una nueva definición de la igualdad de funciones: *las funciones son iguales, si sus valores coinciden en casi todo punto*. Puesto que resulta más cómodo operar con las funciones que con sus clases, en lo sucesivo consideraremos iguales las funciones cuyos valores coinciden en casi todo x (y no necesariamente en todos) de Q. Como con tal definición de la igualdad de las funciones éstas no varían, al variar arbitrariamente sus valores en cualquier conjunto fijado de medida nula, en este caso, es natural considerar que las funciones están dadas casi siempre. Además, si una función f es nula casi siempre, la consideramos función nula. Análogamente, si una función coincide en c.t.p. con otra función continua definida en todos los puntos, la primera se considerará función continua. Si dicha función coincide casi siempre con la función definida en todo punto y continuamente diferenciable hasta el orden k, la consideraremos continuamente diferenciable hasta el k-ésimo orden. En conformidad con la noción introducida de la igualdad, por elementos del espacio $C^k(\overline{Q})$, $k \geqslant 0$ también tomaremos las funciones que son continuamente diferenciables hasta el k-ésimo orden y están definidas casi siempre en Q. Es decir, una función $f(x)$ pertenece a $C^k(\overline{Q})$, si coincide en casi todo punto con la función definida en todo punto de $\overline{Q}$, y continúa en $\overline{Q}$ junto con todas las derivadas hasta el k-ésimo orden inclusivo. Aquí, por valor en cierto punto de un elemento en el espacio $C(\overline{Q})$ (y, con mayor razón, de la función en $C^k(\overline{Q})$) vamos a entender el valor que toma en este punto una función continua que está definida en todo punto y coincide casi siempre en Q con el elemento citado.

1. **Espacios $L_1(Q)$ y $L_2(Q)$.** Examinemos un conjunto de funciones de valores complejos que son integrables en Q. Es evidente que este conjunto es (incluso en la nueva comprensión de la igualdad de funciones) un espacio lineal y la funcional $\int\limits_Q |f(x)|\,dx$ satisface todos los axiomas de la norma. Designemos con $L_1(Q)$ este espacio lineal normado:

$$\|f\|_{L_1(Q)} = \int\limits_Q |f(x)|\,dx. \tag{1}$$

Designemos mediante $L_2(Q)$ un conjunto de funciones medibles de valores complejos (recordemos que las funciones que coinciden casi siempre se identifican) en las que el cuadrado del módulo es integrable en el dominio Q. Mostremos que $L_2(Q)$ es un espacio lineal. Sean c_1 y c_2 números arbitrarios y, $f_1(x)$ y $f_2(x)$ ciertas funciones arbitrarias de $L_2(Q)$. Dado que una función medible $c_1f_1(x) + c_2f_2(x)$ satisface la desigualdad $|c_1f_1(x) + c_2f_2(x)|^2 \leqslant 2|c_1|^2|f_1(x)|^2 + 2|c_2|^2|f_2(x)|^2$, entonces, según el teorema 5, p. 6, § 1, cap. II, la función $|c_1f_1(x) + c_2f_2(x)|^2$ es integrable, o sea $c_1f_1(x) + c_2f_2(x) \in L_2(Q)$.

Una función $f_1(x)f_2(x)$, en la que $f_1(x)$ y $f_2(x)$ pertenecen a $L_2(Q)$, es integrable, por ser medible y $|f_1(x)f_2(x)| \leqslant \frac{1}{2}(|f_1(x)|^2 + |f_2(x)|^2)$. Por eso, a un par de funciones f_1 y f_2 se le puede asignar el número

$$(f_1, f_2)_{L_2(Q)} = \int\limits_Q f_1(x)\overline{f_2(x)}\,dx. \tag{2}$$

Es fácil comprobar que la fórmula (2) define un producto escalar en $L_2(Q)$. Una norma engendrada por este producto escalar tiene por expresión

$$\|f\|_{L_2(Q)}=\Big(\int_Q |f(x)|^2\,dx\Big)^{1/2}. \tag{3}$$

Siendo $|f|=|f|\cdot 1\leqslant\frac{1}{2}(|f|^2+1)$, en el caso de un dominio acotado Q la función $f(x)$, perteneciente a $L_2(Q)$, pertenece también a $L_1(Q)$. Esto quiere decir que para un dominio acotado $L_2(Q)\subset L_1(Q)$. Es evidente también que $C(\overline{Q})\subset L_2(Q)\subset L_1(Q)$ en el caso de un dominio acotado Q.

TEOREMA 1. *$L_1(Q)$ es un espacio de Banach con la norma* (1); *$L_2(Q)$ es un espacio de Hilbert con el producto escalar* (2).

Para demostrar el teorema es suficiente establecer que los espacios $L_1(Q)$ y $L_2(Q)$ son completos en las normas correspondientes.

1. Supongamos que una sucesión f_k, $k=1, 2, \ldots$, de funciones pertenecientes a $L_1(Q)$ es fundamental en $L_1(Q)$, es decir, para todo $\varepsilon>0$ existe un número $N(\varepsilon)$ tal que $\|f_k-f_m\|_{L_1(Q)}<\varepsilon$, cualesquiera que sean $k, m\geqslant N(\varepsilon)$. Tomemos $\varepsilon=2^{-k}$, siendo k un número entero, y designemos con N_k el número $N(2^{-k})$, y sea, además, $N_k\leqslant N_{k+1}$. Entonces, para $m\geqslant N_k$

$$\|f_{N_k}-f_m\|_{L_1(Q)}<2^{-k}, \tag{4}$$

y, en particular, $\|f_{N_k}-f_{N_{k+1}}\|_{L_1(Q)}<2^{-k}$. Por eso, la serie

$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\|f_{N_k}-f_{N_{k+1}}\|_{L_1(Q)}$ converge.

Por consiguiente, según el corolario del p. 6, § 1, cap. II, en c.t.p. de Q la serie $\sum\limits_{k+1}^{\infty}(f_{N_{k+1}}-f_{N_k})$ converge hacia cierta función de $L_1(Q)$ y, consecuentemente, la sucesión f_{N_k}, $k=1, 2, \ldots$ converge casi siempre en Q, cuando $k\to\infty$, hacia cierta función $f\in L_1(Q)$:

$$f_{N_k}(x)\to f(x),\quad k\to\infty.$$

Mostremos que $\|f_m-f\|_{L_1(Q)}\to 0$ cuando $m\to\infty$. Efectivamente, de (4) se desprende que para $m\geqslant N_r$ y $k\geqslant r$

$$\|f_m-f_{N_k}\|_{L_1(Q)}\leqslant\|f_m-f_{N_r}\|_{L_1(Q)}+\|f_{N_r}-f_{N_k}\|_{L_1(Q)}\leqslant 2\cdot 2^{-r}=2^{1-r}.$$

Pasando en esta desigualdad al límite para $k\to\infty$ y basándonos en el lema de Fatou (teorema 4, p. 6, § 1, cap. II) obtendremos la desigualdad $\|f_m-f\|_{L_1(Q)}\leqslant 2^{1-k}$, que es válida para todo $m\geqslant N_r$.

Para m suficientemente grandes podemos escoger un número r lo suficientemente grande y, por ello, $\| f_m - f \|_{L_1(Q)} \to 0$ cuando $m \to \infty$. Así pués, $L_1(Q)$ es un espacio completo.

2. Supongamos ahora que las funciones de una sucesión $f_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, pertenecen a $L_2(Q)$ y esta sucesión es fundamental en la norma de $L_2(Q)$. Como al demostrar la primera parte del teorema, hallemos una sucesión numérica $N_1 \leqslant N_2 \leqslant \ldots \leqslant N_k \leqslant \ldots$ tal que

$$\| f_{N_k} - f_m \|_{L_2(Q)} < 2^{-k} \tag{4'}$$

para todo $m \geqslant N_k$, y, en particular, $\| f_{N_{k+1}} - f_{N_k} \|_{L_2(Q)} < 2^{-k}$. De la desigualdad de Buniakovski se deduce que $\| f_{N_{k+1}} - f_{N_k} \|_{L_1(Q)} \leqslant \leqslant \sqrt{|Q|}\, \| f_{N_{k+1}} - f_{N_k} \|_{L_2(Q)} < \sqrt{|Q|}\, 2^{-k}$ y, por eso, existe tal función $f(x) \in L_1(Q)$ que $f_{N_k}(x) \to f(x)$, cuando $k \to \infty$ en c.t.p. de Q. Por lo tanto, también $|f_{N_k}|^2 \to |f|^2$ para $k \to \infty$ en c.t.p. de Q. Además,

$$\| f_{N_k} \|_{L_2(Q)} \leqslant \| f_{N_k} - f_{N_1} \|_{L_2(Q)} + \| f_{N_1} \|_{L_2(Q)} \leqslant \frac{1}{2} + \| f_{N_1} \|_{L_2(Q)}.$$

Por eso, según el lema de Fatou, $f(x) \in L_2(Q)$.

Mostremos que $\| f_m - f \|_{L_2(Q)} \to 0$ cuando $m \to \infty$. Para $m \geqslant N_r$ y $k \geqslant r$ tiene lugar la siguiente desigualdad que se deduce de (4'):

$$\| f_m - f_{N_k} \|_{L_2(Q)} \leqslant \| f_m - f_{N_r} \|_{L_2(Q)} + \| f_{N_r} - f_{N_k} \|_{L_2(Q)} \leqslant 2^{1-r}.$$

Pasando en esta desigualdad al límite para $k \to \infty$, basándonos en el lema de Fatou obtenemos otra vez la desigualdad $\| f_m - f \|_{L_2(Q)} \leqslant \leqslant 2^{1-r}$, que es válida para todo $m \geqslant N_r$. Como el número r puede ser tomado suficientemente grande y, si m es lo suficientemente grande, obtenemos que $\| f_m - f \|_{L_2(Q)} \to 0$ cuando $m \to \infty$. El teorema queda demostrado.

OBSERVACIÓN. Notemos que al demostrar el teorema 1 hemos establecido simultáneamente la validez de la siguiente afirmación. *De cualquier sucesión de funciones convergente hacia cierta función f en $L_1(Q)$ o en $L_2(Q)$ se puede extraer una subsucesión que converge hacia f en casi siempre.*

2. Densidad del conjunto $C(\overline{Q})$ en $L_1(Q)$ y $L_2(Q)$. Separabilidad de los espacios $L_1(Q)$ y $L_2(Q)$. Continuidad en la media de los elementos en $L_1(Q)$ y $L_2(Q)$.

TEOREMA 2. *Un conjunto de funciones continuas en $\overline{Q}$ es siempre denso en $L_1(Q)$ y $L_2(Q)$.*

1. Sea una función $f(x) \in L_1(Q)$. Sin disminuir la generalidad de nuestros razonamientos podemos considerarla de valores reales, perteneciente a $\Lambda_1(Q)$. En este caso, según la definición de integrabilidad de la función $f(x)$, existe una sucesión de funciones $f_k(x)$,

$k = 1, 2, \ldots$, continuas en $\overline{Q}$, que posee las propiedades siguientes: $f_k(x) \uparrow f(x)$ en c.t.p. de Q, y $\int\limits_Q f_k dx \to \int\limits_Q f dx$, cuando $k \to \infty$. Como $\int\limits_Q |f - f_k| \, dx = \int\limits_Q (f - f_k) \, dx$, resulta que $\|f - f_k\|_{L_1(Q)} \to 0$ $\to 0$ cuando $k \to \infty$, lo que se trataba de demostrar.

2. Sea una función $f(x) \in L_2(Q)$. Entonces, pertenece a $L_1(Q)$. Igual que en el primer caso, podemos considerar que es una función de valores reales de $\Lambda_1(Q)$, no negativa casi siempre. Tomemos una sucesión monótona no decreciente $f_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, de funciones de $C(\overline{Q})$ que en c.t.p. converge hacia $f(x)$. Al sustituir, en caso de necesidad, la sucesión dada por la otra, $f_k^+(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, podemos considerar las funciones $f_k(x)$ adicionalmente no negativas. Pero entonces, $f_k^2(x) \uparrow f^2(x)$ en c.t.p. de Q cuando $k \to \infty$. Según la definición de la integral, de la función $f^2(x)$ se tiene que $\int\limits_Q f_k^2 \, dx \to$ $\to \int\limits_Q f^2 dx$, es decir, $\|f_k\|^2_{L_2(Q)} \to \|f\|^2_{L_2(Q)}$. Puesto que $f_k f \leqslant$ $\leqslant f^2$, según el teorema de Lebesgue (teorema 6, p. 7, § 1, cap. II), $\lim\limits_{k\to\infty} (f_k, f)_{L_2(Q)} = \|f\|^2_{L_2(Q)}$. Esto quiere decir que $\|f_k - f\|^2_{L_2(Q)} =$ $= \|f_k\|^2_{L_2(Q)} - 2(f_k, f)_{L_2(Q)} + \|f\|^2_{L_2(Q)} \to 0$ para $k \to \infty$. El teorema está demostrado.

Indiquemos que si una sucesión de funciones de $C(\overline{Q})$ converge hacia cierta función en la norma del espacio $C(\overline{Q})$, será también convergente hacia la misma en las normas de los espacios $L_1(Q)$ y $L_2(Q)$. Por consiguiente, toda función continua en $\overline{Q}$ puede ser aproximada mediante una sucesión de polinomios con coeficientes racionales en las normas de $L_1(Q)$ y $L_2(Q)$. En este caso, del teorema 2 se deduce que un conjunto numerable de polinomios con coeficientes racionales es siempre denso en $L_1(Q)$ y $L_2(Q)$. Es decir, tiene lugar

TEOREMA 3. *Los espacios $L_1(Q)$ y $L_2(Q)$ son separables.*

Una función $f(x)$ perteneciente al espacio $L_2(Q)$ (y prolongada por cero fuera de Q) se llama *continua en la media (cuadrática) o en la norma del espacio $L_2(Q)$*, si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $\|f(x+z) - f(x)\|_{L_2Q} < \varepsilon$, cualquiera que sea z, $|z| < \delta$.

Una función $f(x)$ perteneciente al espacio $L_1(Q)$ (y prolongada por cero fuera de Q) se llama *continua en la media o en la norma del espacio $L_1(Q)$*, si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $\|f(x+z) -$ $- f(x)\|_{L_1(Q)} < \varepsilon$, cualquiera que sea z, $|z| < \delta$.

Del teorema 2 se deduce la siguiente afirmación.

TEOREMA 4. *Toda función de $L_2(Q)$ es continua en la media (cuadrática). Toda función de $L_1(Q)$ es continua en la media.*

Sea una función $f \in L_2(Q)$ (cuando $f \in L_1(Q)$, la demostración es la misma). Tomemos el número $a > 0$ tan grande que $Q \Subset S_a$, donde S_a es una bola $\{|x| < a\}$. La función $F(x)$, que es igual a $f(x)$ cuando $x \in Q$, y es nula cuando $x \in S_{2a} \setminus Q$, pertenece a $L_2(S_{2a})$, puesto que $f(x) \in L_2(Q)$. Tomemos $\varepsilon > 0$ arbitrario. Debido al teorema 2, existe una función $\widetilde{F}(x)$ que es continua en $\overline{S}_{2a}$ y que satisface la desigualdad $\|F(x) - \widetilde{F}(x)\|_{L_2(S_{2a})} < \varepsilon/3$. A cuenta de la multiplicación de la función $\widetilde{F}(x)$ por una función cortante adecuada del dominio S_a, se puede considerar que $\widetilde{F}(x) \equiv 0$ para todo $x \in S_{2a} \setminus S_a$. Por ello, para $|z| \leqslant a$ $\|F(x + z) - \widetilde{F}(x + z)\|_{L_2(S_{2a})} = \|F(x) - \widetilde{F}(x)\|_{L_2(S_{2a})} \leqslant \varepsilon/3$. Ya que la función $\widetilde{F}(x)$ es uniformemente continua en $\overline{S}_{2a}$, existe un $\delta > 0$ $(\delta < a)$ tal que $\|\widetilde{F}(x + z) - \widetilde{F}(x)\|_{L_2(S_{2a})} \leqslant \varepsilon/3$, una vez que $|z| < \delta$. Por lo tanto, cuando $|z| < \delta$

$$\|f(x+z) - f(x)\|_{L_2(Q)} = \|F(x+z) - F(x)\|_{L_2(S_{2a})} \leqslant$$
$$\leqslant \|F(x+z) - \widetilde{F}(x+z)\|_{L_2(S_{2a})} + \|\widetilde{F}(x+z) - \widetilde{F}(x)\|_{L_2(S_{2a})} +$$
$$+ \|\widetilde{F}(x) - F(x)\|_{L_2(S_{2a})} \leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

El teorema está demostrado.

3. **Mediación de las funciones de $L_1(Q)$ y $L_2(Q)$.** Para las funciones de $L_1(Q)$ y $L_2(Q)$, lo mismo que para las funciones de $C(\overline{Q})$, se pueden definir funciones mediadas.

Sea $\omega_h(|x - y|)$ un núcleo de mediación (cap. I, Introducción) y sea $f(x) \in L_1(Q)$. La función

$$f_h(x) = \int_Q f(y)\, \omega_h(|x - y|)\, dy, \quad h > 0, \tag{5}$$

se llama *función media para la función f (función mediada para f).*

De la propiedad a) del núcleo de mediación y del teorema 7, p. 7, § 1, cap. II, se deduce que $f_h(x) \in C^\infty(R_n)$ para $h > 0$. Además, $f_h(x) \equiv 0$ fuera de Q^h.

TEOREMA 5. *Cuando* $f(x) \in L_1(Q)$ $(L_2(Q))$, $\|f_h - f\|_{L_1(Q)} \to 0$ $(\|f_h - f\|_{L_2(Q)} \to 0)$, *si* $h \to 0$.

La demostración de ambas afirmaciones es análoga, por lo que nos detendremos, por ejemplo en el caso $f \in L_2(Q)$. Vamos a considerar que la función f se prolonga por cero fuera de Q. Las propiedades b) y c) del núcleo de mediación, la desigualdad de Buniakovski, la propiedad d) del núcleo de mediación, aplicadas de manera consecutiva, nos dan:

$$|f_h(x)-f(x)|^2=$$
$$=\Big|\int\limits_{|x-y|<h} f(y)\,\omega_h(|x-y|)\,dy-f(x)\int\limits_{|x-y|<h}\omega_h(|x-y|)\,dy\Big|\leqslant$$
$$\leqslant\int\limits_{|x-y|<h}\omega_h^2(|x-y|)\,dy\int\limits_{|x-y|<h}|f(y)-f(x)|^2\,dy\leqslant$$
$$\leqslant\frac{\text{const}}{h^n}\int\limits_{|z|<h}|f(x+z)-f(x)|^2\,dz.$$

De acuerdo con el corolario del teorema de Fubini (p.11, § 1, cap. II),

$$\|f_h-f\|^2_{L_2(Q)}\leqslant\frac{\text{const}}{h^n}\int\limits_Q dx\int\limits_{|z|<h}|f(x+z)-f(x)|^2\,dx=$$
$$=\frac{\text{const}}{h^n}\int\limits_{|z|<h}dz\int\limits_Q|f(x+z)-f(x)|^2\,dx. \qquad (6)$$

Tomemos arbitrariamente $\varepsilon>0$. Según el teorema sobre la continuidad en la media (teorema 4), habrá tal $\delta>0$ que $\|f(x+z)-f(x)\|_{L_2(Q)}<\varepsilon$, siempre que $|z|\leqslant h<\delta$. Por esta razón para estos h de (6) se desprende la desigualdad $\|f_h-f\|_{L_2(Q)}\leqslant\leqslant \text{const}\cdot\varepsilon$. El teorema queda demostrado.

OBSERVACIÓN. Señalemos que al demostrar el teorema 5 no hemos empleado el hecho de que el núcleo de mediación es no negativo. Por consiguiente, si una función $f_h(x)$, media para $f(x)$, la definimos mediante la fórmula (5), donde $\omega_h(|x-y|)=\frac{1}{h^n}\,\omega_1\left(\frac{|x-y|}{h}\right)$, mientras que $\omega_1(t)$, $-\infty<t<\infty$, es una función par indefinidamente diferenciable que es nula cuando $|t|\geqslant1$ y para la cual tiene lugar $\int\limits_{R_n}\omega_1(|x|)\,dx=1$ (compárese con la definición del núcleo de mediación en la Introducción, cap. I), entonces el teorema 5 es también válido en este caso.

TEOREMA 6. *El conjunto $\dot{C}^\infty(\overline{Q})$ es siempre denso en $L_1(Q)$ y en $L_2(Q)$.*

Sea $f(x)\in L_2(Q)$ (el caso en que $f\in L_1(Q)$ es análogo). Fijemos $\varepsilon>0$ arbitrario. De acuerdo con el teorema sobre la continuidad absoluta de la integral lebesguiana (teorema 9, p. 10, § 1, cap. II), existe tal $\delta>0$ que $\int\limits_{Q\setminus Q_h}|f|^2\,dx<\varepsilon^2/4.$

Esto significa que la función $F(x)$, que es terminal en Q, pertenece a $L_2(Q)$ y es igual a $f(x)$ para $x \in Q_\delta$ y nula para $x \in Q \setminus Q_\delta$, satisface la desigualdad $\|F - f\|_{L_2(Q)} \leqslant \varepsilon/2$. En virtud del teorema 5, se puede hallar $h_0 > 0$ tal que $\|F_h - F\|_{L_2(Q)} \leqslant \varepsilon/2$ para todo $0 < h \leqslant \leqslant h_0$. Cuando h es lo suficientemente pequeño, la función media F_h para la función terminal F pertenece al conjunto $\dot{C}^\infty(\overline{Q})$ y

$$\|f - F_h\|_{L_2(Q)} \leqslant \|f - F\|_{L_2(Q)} + \|F - F_h\|_{L_2(Q)} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

El teorema está demostrado.

Puesto que para todo $k \geqslant 0$ tenemos $\dot{C}^\infty(\overline{Q}) \subset \dot{C}^k(Q) \subset L_2(Q)$, entonces los $\dot{C}^k(\overline{Q})$ son siempre densos en $L_2(Q)$, cualquiera que sea $k \geqslant 0$.

4. Espacios lineales $L_{1,\,loc}$, $L_{2,\,loc}$. Designemos mediante $L_{1,\,loc}(Q)$ un conjunto de funciones integrables en cada subdominio Q' estrictamente interior con relación al dominio Q, $Q' \Subset Q$.

Designemos mediante $L_{2,\,loc}(Q)$ un conjunto de funciones medibles en Q en las cuales el módulo del cuadrado es integrable en cada subdominio Q' estrictamente interior con relación a Q, $Q' \Subset Q$.

Está claro que $L_{1,\,loc}(Q)$ y $L_{2,\,loc}(Q)$ son espacios lineales. Además, $L_1(Q) \subset L_{1,\,loc}(Q)$, $L_2(Q) \subset L_{2,\,loc}(Q)$. La función $\frac{1}{(1-|x|)^m}$, por ejemplo, pertenece a $L_{1,\,loc}(|x| < 1)$ y al $L_{2,\,loc}(|x| < 1)$ para todo m y al mismo tiempo ella pertenece a $L_1(|x| < 1)$ sólo cuando $m < 1$, y a $L_2(|x| < 1)$, sólo cuando $m < 1/2$.

§ 3. Derivadas generalizadas

1. Propiedades más sencillas de las derivadas generalizadas. Supongamos que una función $f(x)$ continua en Q tiene una derivada $f_{x_i}(x)$ continua en Q. Entonces, para cualquier función $g(x) \in \in \dot{C}^1(\overline{Q})$ tiene lugar la igualdad

$$\int_Q f\overline{g}_{x_i}\,dx = -\int_Q f_{x_i}\overline{g}\,dx.$$

Resulta que mediante esta igualdad se define completamente la derivada f_{x_i} de la función f: no es difícil mostrar que si para la función continua $f(x)$ existe una función continua $h_i(x)$ tal que con toda $g(x) \in \dot{C}^1(\overline{Q})$ se cumple la igualdad

$$\int_Q f\overline{g}_{x_i}\,dx = -\int_Q h_i\overline{g}\,dx, \tag{1}$$

entonces la función $f(x)$ tiene en Q la derivada f_{x_i} y para todo $x \in \in Q f_{x_i} = h_i$. Así pues, valiéndose de la identidad (1), se puede dar otra definición para la derivada de la función $f(x)$ que será equivalente (en la clase de funciones continuas) a la ordinaria. Si en la igualdad (1) desistimos de la continuidad de las funciones $f(x)$ y $h_i(x)$ y, en lugar de esto, exigimos que sean integrables ellas mismas o sus cuadrados (lo último nos es más cómodo) y entendiendo las integrales en (1) en el sentido de Lebesgue, ampliaremos de este modo la clase de funciones para las cuales podemos introducir la noción de la derivada; la función h_i se denomina derivada generalizada de la función f respecto a x_i en el dominio Q.

Sea $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ un vector cuyas componentes son enteras no negativas. Una función $f^{\alpha}(x) \in L_{2,\,\mathrm{loc}}(Q)$ se llama *α-ésima derivada generalizada en el dominio Q* de la función $f(x) \in L_{2,\,\mathrm{loc}}(Q)$, si para cualquier función $g(x) \in \dot{C}^{|\alpha|}(\overline{Q})$ tiene lugar la igualdad

$$\int_Q f(x)\,\overline{D^{\alpha} g(x)}\,dx = (-1)^{|\alpha|} \int_Q f^{\alpha}(x)\,\overline{g(x)}\,dx. \tag{2}$$

Mostremos, ante todo, que la función $f(x)$ puede tener solamente una derivada generalizada $f^{\alpha}(x)$ (recordemos que las funciones se consideran iguales, si coinciden en c.t.p.).

En efecto, sean $f_1^{\alpha}(x)$ y $f_2^{\alpha}(x)$ dos derivadas generalizadas de la función $f(x)$. En vista de (2), para un subdominio arbitrariamente fijado Q', $Q' \Subset Q$, y una función arbitraria $g(x) \in \dot{C}^{|\alpha|}(\overline{Q}')$ tenemos la igualdad $\int_{Q'} (f_1^{\alpha} - f_2^{\alpha})\,\overline{g}\,dx = 0$. Pero, $f_1^{\alpha} - f_2^{\alpha} \in L_2(Q)'$ por lo cual, en virtud del teorema 6, p. 3 del párrafo anterior, $f_1^{\alpha} - f_2^{\alpha} = 0$ en c.t.p. de Q' y, por lo tanto, en c.t.p. de Q.

Sea una función $f(x) \in \dot{C}^{|\alpha|}(\overline{Q})$. De la fórmula de Ostrogradski tenemos la igualdad

$$\int_Q f(x)\,\overline{D^{\alpha} g(x)}\,dx = (-1)^{|\alpha|} \int_Q D^{\alpha} f(x)\,\overline{g(x)}\,dx \tag{3}$$

para cualquier función $g(x) \in \dot{C}^{|\alpha|}(\overline{Q})$. Es decir, la función $f(x)$ tiene una derivada generalizada $f^{\alpha}(x)$, igual a $D^{\alpha} f(x)$. En particular, la función $f(x)$, igual a una constante (en c.t.p.) en Q, admite cualquier derivada generalizada $f^{\alpha}(x) = 0$, $|\alpha| > 0$.

En lo sucesivo vamos a designar mediante $D^{\alpha} f$ la derivada generalizada f^{α} de la función f. Para las derivadas generalizadas (principalmente, de los órdenes primero y segundo) emplearemos también las designaciones f_{x_i}, $f_{x_i x_j}$, ... y $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, ...

Como para las funciones suaves $g(x)$ la derivada $\frac{\partial^{|\alpha|} g}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$ no depende del orden de derivación, *la derivada generalizada tampoco depende del orden de derivación*, lo que se desprende de la unicidad de la derivada generalizada y de la fórmula (2).

De la definición inmediatamente se deduce también que si las funciones $f_i(x)$, $i = 1, 2$, admiten derivadas generalizadas $D^\alpha f_i$, la función $c_1 f_1 + c_2 f_2$, siendo las constantes c_i arbitrarias, tiene derivada generalizada $D^\alpha(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 D^\alpha f_1 + c_2 D^\alpha f_2$.

EJEMPLO 1. Una función $f(x) = |x_1|$ en la bola $Q = \{|x| < 1\}$ admite primeras derivadas generalizadas $f_{x_1} = \operatorname{sign} x_1$, $f_{x_i} = 0$, $i = 2, \ldots, n$.

En efecto, para cualquier función $g(x) \in \dot{C}^1(\overline{Q})$

$$\int\limits_Q |x_1| \bar{g}_{x_1}\, dx = \int\limits_{Q^+} x_1 \bar{g}_{x_1}\, dx - \int\limits_{Q^-} x_1 \bar{g}_{x_1}\, dx,$$

donde $Q^+ = Q \cap (x_1 > 0)$, $Q^- = Q \cap (x_1 < 0)$. La fórmula de Ostrogradski nos da (x_1, $\bar{g} = 0$ sobre ∂Q y cuando $x_1 = 0$):

$$\int\limits_Q |x_1| \bar{g}_{x_1}\, dx = -\int\limits_{Q^+} \bar{g}\, dx + \int\limits_{Q^-} \bar{g}\, dx = -\int\limits_Q \operatorname{sign} x_1 \cdot \bar{g}\, dx.$$

Por ello, una derivada generalizada de la función $|x_1|$ respecto a x_1 existe y es igual a la función $\operatorname{sign} x_1$. Ya que, para $i \geqslant 2$

$$\int\limits_Q |x_1| \bar{g}_{x_i}\, dx = \int\limits_Q (|x_1| \bar{g})_{x_i} dx = 0 = -\int\limits_Q 0 \cdot \bar{g}\, dx,$$

la función $|x_1|$ admite derivadas generalizadas respecto a x_i, $i = 2, \ldots, n$, iguales a cero.

Indiquemos que en el dominio Q la función $|x_1|$ no tiene derivadas clásicas respecto a x_1 (cuando $x_1 = 0$, la derivada no existe).

EJEMPLO 2. Una función $f(x) = \operatorname{sign} x_1$ tiene en la bola $Q = \{|x| < 1\}$ primeras derivadas generalizadas $f_{x_i} = 0$, $i = 2, \ldots, n$, pero no admite derivada generalizada f_{x_1}. La existencia de las derivadas generalizadas f_{x_i}, $i = 2, \ldots, n$, se establece de la misma manera que en el ejemplo 1. Demostremos que la función f no admite derivada generalizada respecto a x_1. Supongamos, al contrario, que existe una función $\omega \in L_{2,\,\mathrm{loc}}(Q)$ que es derivada generalizada de la función f respecto a x_1. En este caso, para una función arbitraria $g(x) \in \dot{C}^1(\overline{Q})$ tiene lugar la igualdad

$$\int_Q \omega \overline{g}\, dx = -\int_Q (\operatorname{sign} x_1) \overline{g}_{x_1}\, dx = -\int_{Q^+} \overline{g}_{x_1}\, dx + \int_{Q^-} \overline{g}_{x_1}\, dx =$$

$$= 2 \int_{Q \cap \{x_1 = 0\}} \overline{g}\, dx_2 \ldots dx_n. \quad (4)$$

De esta igualdad se desprende ante todo que $\omega = 0$ (casi siempre) en Q. Efectivamente, sustituyendo en (4) la función arbitraria $g(x) \in \dot{C}^1(\overline{Q})$, que es nula en Q^-, obtendremos la igualdad $\int_{Q^+} \omega \overline{g}\, dx = 0$, de la cual se desprende que $\omega = 0$ (casi siempre) en Q^+. Del mismo modo se demuestra que $\omega = 0$ (en c.t.p.) en Q^-. Por consiguiente, para cualquier $g(x) \in \dot{C}^1(Q)$ $\int_Q \omega \overline{g}\, dx = 0$, es decir $\int_{Q \cap \{x_1 = 0\}} \overline{g}(x)\, dx_2 \ldots dx_n = 0$. No obstante, la última igualdad no puede tener lugar para ninguna función $g(x) \in \dot{C}^1(Q)$.

La derivada generalizada $D^\alpha f$, a diferencia de una derivada clásica, se define por la identidad (2) *de manera global*, inmediatamente en Q. Sin embargo, *en cualquier subdominio $Q' \subset Q$ la función $D^\alpha f$ también será derivada generalizada de la función f*, puesto que la función $g(x)$, perteneciente a $\dot{C}^{|\alpha|}(\overline{Q}')$ y prolongada por cero fuera de Q', pertenece a $\dot{C}^{|\alpha|}(\overline{Q})$ (de hecho, esta propiedad la hemos aprovechado ya, al demostrar la unicidad de una derivada generalizada). Por esta causa, si la función $f(x)$ tiene en Q la derivada generalizada $D^\alpha f$ y, además, $f(x) = c$ (en c.t.p.) en $Q' \subset Q$, entonces, $D^\alpha f = 0$ (casi siempre) en Q'. En particular, una derivada generalizada (si existe) de la función $f(x)$, terminal en Q (es decir, para cierto Q'', $Q'' \Subset Q$, $f(x) = 0$ en c.t.p. de $Q \setminus Q''$), es terminal en Q y, por lo tanto, pertenece a $L_2(Q)$.

Supongamos que la función $f(x)$, perteneciente a $L_{2,\,\mathrm{loc}}(Q)$, tiene la derivada generalizada $D^\alpha f = F$, y la función $F(x)$ tiene la derivada generalizada $D^\beta F = G$. En este caso *existe la derivada generalizada $D^{\alpha+\beta} f$* y, además, $D^{\alpha+\beta} f = G$.

En efecto, sea $g(x) \in \dot{C}^{|\alpha+\beta|}(\overline{Q})$. Como $D^\beta g \in \dot{C}^{|\alpha|}(\overline{Q})$, tenemos

$$\int_Q f \overline{D^{\alpha+\beta} g}\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_Q D^\alpha f \overline{D^\beta g}\, dx =$$

$$= (-1)^{|\alpha|} \int_Q F \overline{D^\beta g}\, dx = (-1)^{|\alpha| + |\beta|} \int_Q D^\beta F \overline{g}\, dx = (-1)^{|\alpha+\beta|} \int_Q G \overline{g}\, dx,$$

lo que se trataba de demostrar.

A diferencia de una derivada clásica, la derivada generalizada $D^\alpha f$ se define directamente para el orden $|\alpha|$, sin suponer que existen las correspondientes derivadas inferiores. Mostremos que realmente, las derivadas inferiores pueden no existir.

EJEMPLO 3. En una bola $Q = \{|x| < 1\}$ examinemos una función $f(x) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2)$ en la que $\varphi(x_1) = \operatorname{sign} x_1$. De los resultados del ejemplo 2 se deduce que $f(x)$ no admite las derivadas generalizadas f_{x_1} y f_{x_2}.

Mostremos que, a pesar de esto, existe la derivada generalizada $f_{x_1x_2}$. Tomemos una función arbitraria $g(x) \in \dot{C}^2(\overline{Q})$. Tenemos

$$\int_Q \overline{g}_{x_1x_2} f\, dx = \int_Q \varphi(x_1)\, \overline{g}_{x_1x_2}\, dx + \int_Q \varphi(x_2)\, \overline{g}_{x_1x_2}\, dx.$$

Como que

$$\int_Q \varphi(x_1)\, \overline{g}_{x_1x_2}\, dx = -\int_{Q \cap \{x_1 < 0\}} \overline{g}_{x_1x_2}\, dx + \int_{Q \cap \{x_1 > 0\}} \overline{g}_{x_1x_2}\, dx = 0,$$

y, por analogía, $\int_Q \varphi(x_2)\, \overline{g}_{x_1x_2}\, dx = 0$, entonces

$$\int_Q f \overline{g}_{x_1x_2}\, dx = 0 = \int_Q 0 \cdot \overline{g}\, dx.$$

Así pues, la derivada generalizada $f_{x_1x_2}$ existe y es igual a 0.

2. Derivadas generalizadas y funciones medias. Criterio de existencia de la derivada generalizada. Supongamos que la función $f(x) \in L_2(Q)$, ω_h es cierto núcleo de mediación y

$$f_h(x) = \int_Q \omega_h(|x - y|)\, f(y)\, dy, \qquad h > 0,$$

es una función mediada para la función $f(x)$, $f_h(x) \in \dot{C}^\infty(R_n)$.

LEMA 1. *Si una función $f(x)$ de $L_2(Q)$ tiene la derivada generalizada $D^\alpha f \in L_2(Q)$, para cualquier punto $y \in Q$ tenemos (cuando $h > 0$ es lo suficientemente pequeño):*

$$(D^\alpha f)_h(y) = D^\alpha f_h(y) \tag{5}$$

y para el subdominio $Q' \Subset Q$ arbitrario, cuando $h \to 0$

$$\| D^\alpha f_h - D^\alpha f \|_{L_2(Q')} \to 0. \tag{6}$$

Si la función $f(x)$ es complementariamente terminal en Q (y prolongada por cero fuera de Q), la fórmula (5) tiene lugar para todo $y \in \overline{Q}$ (siempre que $h > 0$ sean suficientemente pequeños) y

$$\| D^\alpha f_h - D^\alpha f \|_{L_2(Q)} \to 0 \quad \text{cuando} \quad h \to 0. \tag{7}$$

Sustituyendo en la fórmula (2), a título de la función $g(x)$ el núcleo de mediación $\omega_h(|x-y|)$, $y \in Q$, para $h > 0$ lo suficientemente pequeño (h es menor que la distancia del punto y al contorno ∂Q) obtendremos, en virtud del teorema 7, p. 7, § 1, cap. II, la fórmula (5)

$$(D^{\alpha}f)_h(y) = (-1)^{|\alpha|} \int_Q f(x)\, D_x^{\alpha}\omega_h(|x-y|)\, dx =$$
$$= \int_Q f(x)\, D_y^{\alpha}\omega_h(|x-y|)\, dx = D_y^{\alpha} f_h(y).$$

Cuando $Q' \Subset Q$, existe $h_0 > 0$ tal que para $h \leqslant h_0$ la fórmula (5) se realiza en todo $y \in \overline{Q'}$. En caso de que $f(x)$ sea terminal ($D^{\alpha}f$ también es terminal en este caso y pertenece a $L_2(Q)$), existe, de nuevo, tal $h_0 > 0$ que para $h \leqslant h_0$ la fórmula (5) tiene lugar para todo $y \in \overline{Q}$. Por eso, las correlaciones (6) y (7) se desprenden del teorema 5, p. 3, § 2.

COROLARIO. *Si todas las primeras derivadas generalizadas de la función f son nulas, $f =$ const.*

En efecto, cuando h son suficientemente pequeños, en cualquier subdominio $Q' \Subset Q$ tenemos $(f_{x_i})_h = 0$, $i = 1, \ldots, n$. En virtud de (5), $(f_h)_{x_i} = 0$, $i = 1, \ldots, n$, es decir, para tales h $f_h =$ const $= c(h)$ en Q'. Dado que $\|f_h - f\|_{L_2(Q')} = \|c(h) - f\|_{L_2(Q')} \to 0$ cuando $h \to 0$ (teorema 5, p. 3, § 2), entonces, $\|c(h_1) - c(h_2)\|_{L_2(Q')} = |c(h_1) - c(h_2)| \sqrt{|Q'|} \to 0$ cuando $h_1, h_2 \to 0$. Por consiguiente, $c(h) = f_h$ converge uniformemente en Q' (y, con mayor razón, en $L_2(Q')$) hacia cierta constante, es decir, $f =$ const en Q' y, por lo tanto, en Q.

Valiéndonos del lema 1, demostremos el siguiente criterio de existencia de la derivada generalizada para la función $f \in L_2(Q)$.

TEOREMA 1. *Para que exista la derivada generalizada $D^{\alpha}f$ de la función $f \in L_2(Q)$, es necesario y suficiente que para cualquier subdominio $Q' \Subset Q$ existan tales constantes $C(Q')$ y $h_0(Q')$ que $\|D^{\alpha}f_h\|_{L_2(Q')} \leqslant C(Q')$, cualquiera que sea $h < h_0(Q')$.*

La necesidad está demostrada en el lema 1.

Demostremos la suficiencia. Tomemos un sistema de dominios $Q_1 \Subset Q_2 \Subset \ldots \Subset Q_m \Subset \ldots \Subset Q$ tal que cualquier punto $x \in Q$ pertenezca a cierto dominio Q_i (y, por lo tanto, también a todo Q_j para $j > i$). Ya que $\|D^{\alpha}f_h\|_{L_2(Q_1)} \leqslant C(Q_1)$ para $h < h_0(Q_1)$, el conjunto $\{D^{\alpha}f_h\}$ para estos h es débilmente compacto (teorema 3, p. 8, § 3, cap. II). Por eso, se puede hallar una sucesión de valores de h, $h_{1,1}, \ldots, h_{1,k}, \ldots$, $h_{1,k} \downarrow 0$ cuando $k \to \infty$, tal que la sucesión de funciones $D^{\alpha}f_{h_{1,k}}$, $k = 1, 2, \ldots$, converge débilmente en $L_2(Q_1)$. Por analogía, de la sucesión $h_{1,k}$, $k = 1, 2, \ldots$, se puede extraer una subsucesión $h_{2,k}$, $k = 1, 2, \ldots$, tal que en $L_2(Q_2)$ la sucesión de funciones $D^\alpha f_{h_{2,k}}$, $k = 1, 2, \ldots$, será de convergencia débil. En este caso el límite débil de esta sucesión en Q_1 coincide, por supuesto, con el límite débil de la sucesión $D^\alpha f_{h_{1,k}}$, $k = 1, 2, \ldots$, etc. La sucesión diagonal $D^\alpha f_{h_{k,k}}$, $k = 1, 2, \ldots$, converge débilmente hacia cierta función $\omega(x) \in L_{2,\,loc}(Q)$ en el espacio $L_2(Q_i)$, cualquiera que sea $i = 1, 2, \ldots$ Por lo tanto, en $L_2(Q')$ la sucesión $D^\alpha f_{h_{(k,k)}}$ converge débilmente hacia ω, cualquiera que sea $Q' \Subset Q$.

Tomemos una función arbitraria $g \in \dot{C}^{|\alpha|}(\overline{Q})$ y sea Q' un dominio fuera del cual $g(x) = 0$, $Q' \Subset Q$. Para todo $k = 1, 2, \ldots$ tiene lugar la igualdad

$$\int_Q D^{\overline{\alpha}} f_{h_{k,k}} \overline{g}\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_Q f_{h_{k,k}} D^\alpha \overline{g}\, dx,$$

en la cual la integración se efectúa, de hecho, no en todo el dominio Q, sino en Q'. Como la sucesión $D^\alpha f_{h_{(k,k)}}$, $k = 1, 2, \ldots$ converge débilmente en $L_2(Q')$ hacia ω, mientras que la sucesión $f_{h_{(k,k)}}$, $k = 1, 2, \ldots$ converge fuertemente (y, por lo tanto, también débilmente) hacia la función f, en esta igualdad se puede pasar al límite para $k \to \infty$:

$$\int_Q \omega \overline{g}\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_Q f D^\alpha \overline{g}\, dx.$$

Esto significa que la función f tiene la derivada generalizada $D^\alpha f$ igual a la función ω. El teorema queda demostrado.

3. Existencia de la derivada generalizada en una acumulación de dominios. En el p. 1 se ha señalado que si $D^\alpha f$ es una derivada generalizada de la función f en Q, también será derivada generalizada de esta función en cualquier subdominio $Q' \subset Q$. El presente punto está dedicado a la demostración del siguiente teorema.

TEOREMA 2. *Si una función f tiene derivadas generalizadas $D^\alpha f$ en los dominios Q_1 y Q_2 y si $Q_1 \cup Q_2 = Q$ es también un dominio (es decir, un conjunto conexo), entonces en Q existe la derivada generalizada $D^\alpha f$.*

Tomemos un punto arbitrario $x \in Q$. Sea $S_\rho(x)$ una bola de radio $\rho > 0$ y con el centro en el punto x, mientras que $\rho_1 = \min_{y \in \partial Q_1} |x - y|$, y $\rho_2 = \min_{y \in \partial Q_2} |x - y|$. Cuando $x \in Q_1 \setminus Q_2$, $S_{\rho_1/2}(x) \Subset Q_1$. Si $x \in Q_2 \setminus Q_1$, $S_{\rho_2/2}(x) \Subset Q_2$. En el caso de que $x \in Q_1 \cap Q_2$ y $\rho = \min(\rho_1, \rho_2)$, entonces $S_{\rho/2}(x) \Subset Q_1$ y $S_{\rho/2}(x) \Subset Q_2$.

Todos los puntos del dominio Q los dividamos en dos clases: a la primera clase le asignemos todos los puntos de $Q_1 \setminus Q_2$ y aquellos puntos de $Q_1 \cap Q_2$, para los cuales $\rho_1 < \rho_2$, $\rho = \rho_1$; a la segunda clase, todos los puntos restantes, es decir, todos los puntos de $Q_2 \setminus Q_1$ y aquellos de $Q_1 \cap Q_2$, para los cuales $\rho_2 \leqslant \rho_1$, $\rho = \rho_2$.

De esta manera hemos obtenido un cubrimiento del dominio Q con las bolas $S_{\rho/2}(x)$: si x es de primera clase, $\rho = \rho_1$; si x pertenece a la segunda clase, $\rho = \rho_2$.

Sea Q' un subdominio arbitrario estrictamente interior del dominio Q, $Q' \Subset Q$. Extrayamos del cubrimiento $\overline{Q}'$ con las bolas $S_{\rho/2}(x)$ un subcubrimiento finito. Una parte de las bolas de este subcubrimiento, cuyos centros se ubican en los puntos de la primera clase, forman un conjunto abierto $Q'_1 \Subset Q_1$, las restantes, un conjunto abierto $Q'_2 \Subset Q_2$. De este modo, para el dominio Q' hemos hallado dos conjuntos abiertos, Q'_1 y Q'_2, los cuales poseen las siguientes propiedades: a) Q'_i, $i = 1, 2$, es la suma de un número finito de bolas, b) Q' pertenece al dominio $Q'_1 \cup Q'_2$ y $Q'_1 \Subset Q_1$, $Q'_2 \Subset Q_2$. En vista de que en Q_1 y Q_2 existe la derivada generalizada $D^\alpha f$, según el teorema 1, existen tales constantes $C(Q'_1)$, $C(Q'_2)$, $h_0(Q'_1)$ y $h_0(Q'_2)$ que para $h < h_0 = \min(h_0(Q'_1), h_0(Q'_2))$ $\| D^\alpha f_h \|_{L_2(Q'_1)} \leqslant C(Q'_1)$, $\| D^\alpha f_h \|_{L_2(Q'_2)} \leqslant$ $\leqslant C(Q'_2)$, donde f_h es una función media para la función f en el dominio Q. Por ello

$$\| D^\alpha f_h \|^2_{L_2(Q')} \leqslant \| D^\alpha f_h \|^2_{L_2(Q'_1)} + \\ + \| D^\alpha f_h \|^2_{L_2(Q'_2)} \leqslant C_1^2(Q'_1) + C_2^2(Q'_2) = C_2(Q')$$

para todo $h < h_0$.

Resulta, pues, que según el teorema 1, la función f admite una derivada generalizada del orden α en Q (naturalmente, en Q_1 y Q_2) que coincide con $D^\alpha f$. El teorema queda demostrado.

4. Derivadas generalizadas y relaciones de diferencias finitas. Supongamos que una función $f(x)$ es terminal en Q y pertenece a $L_2(Q)$. Prolonguémosla por cero fuera de Q y examinemos, para $h \neq 0$, una relación de diferencias

$$\delta_h^k f(x) = \frac{f(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k + h, x_{k+1}, \ldots, x_n) - f(x)}{h} \tag{8}$$

$k = 1, \ldots, n$. Está claro que $\delta_h^k f(x) \in L_2(Q)$ para todo $h \neq 0$. Si la función $g(x) \in L_2(Q)$ (y es prolongada por cero fuera de Q), entonces, para todo h de módulo suficientemente pequeño (menor que la distancia entre el contorno del dominio Q y el del dominio Q', fuera del cual $f=0$) tiene lugar la fórmula de «integración por partes»

$$
\begin{aligned}
(\delta_h^k f,\ g)_{L_2(Q)} &= \\
&= \frac{1}{h}\int\limits_Q f(x_1,\ \ldots,x_{k-1},\ x_k+h,\ x_{k+1},\ \ldots,x_n)-f(x))\,\bar{g}(x)\,dx= \\
&= \frac{1}{h}\int\limits_Q f(x)\,(\bar{g}(x_1,\ \ldots,x_{k-1},\ x_k-h,\ x_{k+1},\ \ldots,x_n)-\bar{g}(x))\,dx= \\
&= -(f,\ \delta_{-h}^k g)_{L_2(Q)}.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

TEOREMA 3. *Supongamos que una función $f(x)$, terminal en Q, pertenece a $L_2(Q)$.*

a) *Si existe una derivada generalizada f_{x_k}, siendo $k=1,\ \ldots,n$, para todo $h\neq 0$ de módulo suficientemente pequeño $\|\delta_h^k f\|_{L_2(Q)}\leqslant\|f_{x_k}\|_{L_2(Q)}$ y, además,*

$$\|\delta_h^k f-f_{x_k}\|_{L_2(Q)}\to 0 \quad \text{cuando} \quad h\to 0. \tag{10}$$

b) *Si existe una constante $C>0$ tal que para todo $h\neq 0$ de módulo suficientemente pequeño $\|\delta_h^k f\|_{L_2(Q)}\leqslant C$, entonces en Q existe la derivada generalizada f_{x_k} de la función f y, además, tiene lugar la desigualdad $\|f_{x_k}\|_{L_2(Q)}\leqslant C$ y la correlación* (10).

DEMOSTRACIÓN DE LA AFIRMACIÓN a). Supongamos al principio que $f\in\dot{C}^1(\bar{\bar{Q}})$. Sin perder la generalización, se puede considerar que $k=n$. En este caso

$$\delta_h^n f=0\,\frac{1}{h}\int\limits_{x_n}^{x_n+h}\frac{\partial f(x',\ \xi_n)}{\partial \xi_n}\,d\xi_n,$$

donde, como siempre, $x'=(x_1,\ \ldots,\ x_{n-1})$. Por consiguiente (sea, para concretar, $h>0$),

$$|\delta_h^n f(x)|^2\leqslant\frac{1}{h^2}\Big(\int\limits_{x_n}^{x_n+h}\Big|\frac{\partial f(x',\ \xi_n)}{\partial \xi_n}\Big|\,d\xi_n\Big)^2\leqslant\frac{1}{h}\int\limits_{x_n}^{x_n+h}\Big|\frac{\partial f(x',\ \xi_n)}{\partial \xi_n}\Big|^2 d\xi_n,$$

de donde

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\delta_h^n f(x)|^2\,dx_n\leqslant\frac{1}{h}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dx_n\int\limits_{x_n}^{x_n+h}\Big|\frac{\partial f(x',\ \xi_n)}{\partial \xi_n}\Big|^2 d\xi_n= \\
=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Big|\frac{\partial f(x',\ x_n)}{\partial x_n}\Big|^2\,dx_n.
\end{aligned}
$$

Integrando la última desigualdad respecto a $x' \in R_{n-1}$, obtenemos

$$\| \delta_h^n f \|_{L_2(Q)} \leqslant \| f_{x_n} \|_{L_2(Q)}. \tag{11}$$

Luego,

$$\delta_h^n f(x) - f_{x_n}(x) = \frac{1}{h} \int_{x_n}^{x_n+h} \frac{\partial f(x', \xi_n)}{\partial \xi_n} d\xi_n - \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} =$$

$$= \frac{1}{h} \int_{x_n}^{x_n+h} \left(\frac{\partial f(x', \xi_n)}{\partial \xi_n} - \frac{\partial f(x', x_n)}{\partial x_n} \right) d\xi_n.$$

Por eso,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\delta_h^n f(x) - f_{x_n}(x))^2 \, dx_n \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_n \int_{x_n}^{x_n+h} \left| \frac{\partial f(x', \xi_n)}{\partial \xi_n} - \frac{df(x', x_n)}{\partial x_n} \right|^2 d\xi_n =$$

$$= \frac{1}{h} \int_0^h d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial f(x', x_n + \eta)}{\partial x_n} - \frac{\partial f(x', x_n)}{\partial x_n} \right)^2 dx_n.$$

Integrando esta desigualdad respecto a $x' \in R_{n-1}$, obtenemos

$$\| \delta_h^n f - f_{x_n} \|_{L_2(Q)}^2 \leqslant \frac{1}{h} \int_0^h d\eta \int_Q \left(\frac{\partial f(x', x_n + \eta)}{\partial x_n} - \frac{df(x', x_n)^2}{\partial x_n} \right)^2 dx. \tag{12}$$

Las desigualdades (11) y (12) obtenidas hasta ahora para las funciones $f \in \dot{C}^1(\overline{Q})$ son válidas también para las funciones terminales de $L_2(Q)$ que tienen en Q derivadas generalizadas f_{x_n}. Para convencerse de esto es suficiente aproximar la función $f(x)$ por su función mediada que tenga el radio de mediación ρ lo suficientemente pequeño, aprovechar para la última las desigualdades (11) y (12) (la función mediada será terminal en Q) y pasar en ellas al límite cuando $\rho \to 0$.

De esta manera, la primera desigualdad del punto a), coincidente con (11), queda demostrada.

Con objeto de demostrar la correlación (10) emplearemos el teorema de la continuidad media (cuadrática) de la función perteneciente a $L_2(Q)$ (teorema 4, p. 2, § 2), del cual se desprende que para cualquier

$\varepsilon > 0$ existe un número $\delta = \delta(\varepsilon)$ tal que si $|\eta| \leqslant |h| \leqslant \delta$, se tiene

$$\int\limits_{Q} \left(\frac{\partial f(x', x_n + \eta)}{\partial x_n} - \frac{\partial f(x', x_n)}{\partial x_n} \right)^2 dx \leqslant \varepsilon^2.$$

Por esta razón, de (12) se deduce la desigualdad $\| \delta_h^n f - f_{x_n} \|^2_{L_2(Q)} \leqslant \leqslant \varepsilon^2$, siempre que $|h| \leqslant \delta$. La afirmación a) está demostrada.

DEMOSTRACIÓN DE LA AFIRMACIÓN b). Según el teorema 3, p. 8, § 3, cap. II, el conjunto $\{\delta_h^k f\}$, cuando $|h|$ son pequeñas, es débilmente compacto en $L_2(Q)$. Por eso, en él se puede elegir una sucesión $\delta_{h_p}^k f$, $p = 1, 2, \ldots$, que sea débilmente convergente hacia cierta función $\omega \in L_2(Q)$ $h_p \to 0$ para $p \to \infty$. Además, $\| \omega \|_{L_2(Q)} \leqslant C$. Luego, en vista de (9), $(\delta_{h_p}^k f, g)_{L_2(Q)} = -(f, \delta_{-h_p}^k g)_{L_2(Q)}$, cualquiera que sea la función $g(x) \in \dot{C}^1(\overline{Q})$. Cuando $p \to \infty$, el primer miembro de la igualdad tiende a (ω, g) y el segundo miembro, según el teorema de Lebesgue, a $-(f, g_{x_k})$. Por esta causa, la derivada generalizada f_{x_k} existe y $f_{x_k} = \omega$. El teorema está demostrado.

En lo sucesivo necesitaremos también la afirmación siguiente.

Sea Q un dominio de una conexión del espacio R_n que contiene el origen de coordenadas y es simétrico respecto al plano $x_n = 0$ (es decir, para cualquier punto $x = (x', x_n)$, perteneciente a Q, el punto $(x' - x_n)$ también pertenece a Q), y sea, además, $\delta > 0$ un número tan pequeño que el conjunto Q_δ es un dominio. Introduzcamos las designaciones:

$$Q^+ = Q \cap \{x_n > 0\}, \quad Q^- = Q \cap \{x_n < 0\}, \quad (Q_\delta)^+ = Q_\delta \cap \{x_n > 0\}.$$

TEOREMA 4. *Sea una función $f(x) \in L_2(Q^+)$ y sea $f(x) = 0$ en $Q^+ \setminus (Q_\delta)^+$.*

a) *Si en Q^+ existe la derivada generalizada f_{x_k} para cierto $k < n$, entonces, para todo $h \neq 0$ de módulo suficientemente pequeño*

$$\| \delta_h^k f \|_{L_2(Q^+)} \leqslant \| f_{x_k} \|_{L_2(Q^+)}$$

y

$$\| \delta_h^k f - f_{x_k} \|_{L_2(Q^+)} \to 0 \quad \text{para} \quad h \to 0. \tag{10'}$$

b) *Si existe una constante $C > 0$ tal que para todo $h \neq 0$ de módulo suficientemente pequeño $\| \delta_h^k f \|_{L_2(Q^+)} \leqslant C$, $k < n$, entonces en Q^+ existe la derivada generalizada f_{x_k}, con la particularidad de que $\| f_{x_k} \|_{L_2(Q^+)} \leqslant C$, y tiene lugar la correlación (10').*

En el dominio Q definamos una función $F(x)$ del modo siguiente: $F(x) = f(x)$ en Q^+ y $F(x) = f(x' - x_n)$ en Q^-. Es obvio que

$F \in L_2(Q)$ y $F(x)=0$ fuera de Q_δ. Además, $\|\delta_h^k F\|^2_{L_2(Q)} = 2\|\delta_h^k f\|^2_{L_2(Q^+)}$, $k<n$, $0<|h|<\delta$.

DEMOSTRACIÓN DE LA AFIRMACIÓN a). Supongamos que la función f tiene en Q^+ una derivada generalizada f_{x_k}. Mostremos, ante todo, que en este caso la función F tiene en Q la derivada generalizada F_{x_k}. En efecto, tomemos una función arbitraria $g(x) \in \dot{C}^1(\bar{Q})$ y, para $\delta > 0$ arbitrario, otra función, $\zeta_\delta(x_n) \in C^1(-\infty, +\infty)$, par, $\zeta_\delta(-x_n) = \zeta(x_n)$, que satisface, para todo x_n, la desigualdad $|\zeta_\delta(x_n)| \leqslant 1$, es igual a 1 cuando $x_n \geqslant \delta$, y nula cuando $0 \leqslant x_n \leqslant \delta/2$.

De la igualdad

$$\int_Q F(x)\, g_{x_k}(x)\, \zeta_\delta(x_n)\, dx =$$

$$= \int_{Q^+} f(x)\, g_{x_k}(x)\, \zeta_\delta(x_n)\, dx + \int_{Q^-} f(x', -x_n)\, g_{x_k}(x)\, \zeta_\delta(x_n)\, dx =$$

$$= \int_{Q^+} f(x)\, \frac{\partial}{\partial x_k}(\zeta_\delta(x_n)\, [g(x', x_n) + g(x', -x_n)]\, dx$$

y de la definición de la derivada generalizada de la función f en el dominio Q^+ tenemos (la función $\zeta_\delta(x_n)(g(x', x_n) + g(x', -x_n)) \in \dot{C}^1(\bar{Q}^+)$)

$$\int_Q F(x)\, g_{x_k}(x)\, \zeta_\delta(x_n)\, dx =$$

$$= -\int_{Q^+} f_{x_k}(x)\, \zeta_\delta(x_n)\, (g(x', x_n) + g(x', -x_n))\, dx =$$

$$= -\int_{Q^+} f_{x_k}(x', x_n)\, \zeta_\delta(x_n)\, g(x)\, dx - \int_{Q^-} f_{x_k}(x', -x_n)\, \zeta_\delta(x_n)\, g(x)\, dx.$$

Pasando en esta igualdad (en conformidad con el teorema de Lebesgue) al límite para $\delta \to 0$, resulta que la función igual a $f_{x_k}(x)$ en Q^+ y a $f_{x_k}(x', -x_n)$ en Q^-, es una derivada generalizada F_{x_k} en Q de la función F, teniendo lugar al mismo tiempo la ecuación $\|F_{x_k}\|^2_{L_2(Q)} = 2\|f_{x_k}\|^2_{L_2(Q^+)}$.

En virtud del teorema 3, $\|\delta_h^k F\|_{L_2(Q)} \leqslant \|F_{x_k}\|_{L_2(Q)}$. Por ello, $\|\delta_h^k f\|^2_{L_2(Q^+)} = \frac{1}{2}\|\delta_h^k F\|^2_{L_2(Q)} \leqslant \frac{1}{2}\|F_{x_k}\|^2_{L_2(Q)} = \|f_{x_k}\|_{L_2(Q^+)}$. Ya que $\|\delta_h^k F - F_{x_k}\|^2_{L_2(Q)} = \frac{1}{2}\|\delta_h^k f - f_{x_k}\|^2_{L_2(Q^+)}$ y dado que $\|\delta_h^k F - F_{x_k}\|_{L_2(Q)} \to 0$

cuando $h \to 0$, entonces $\|\delta_h^k f - f_{x_k}\|_{L_2(Q^+)} \to 0$ para $h \to 0$. La afirmación a) está demostrada.

DEMOSTRACIÓN DE LA AFIRMACIÓN b). Supongamos que para todo $h \neq 0$ de módulo suficientemente pequeño $\|\delta_h^k f\|_{L_2(Q^+)} \leqslant C$, $k < n$. En este caso para todos estos $h \|\delta_h^k F\|^2_{L_2(Q)} \leqslant 2 \cdot C^2$. De acuerdo con el teorema 3, en Q existe la derivada generalizada F_{x_k} y $\|F_{x_k}\|^2_{L_2(Q)} \leqslant 2 \cdot C^2$. Esto quiere decir, en Q^+ existe la derivada generalizada f_{x_k}, $\|f_{x_k}\|^2_{L_2(Q^+)} \leqslant C^2$ y se cumple la correlación (10′). El teorema está demostrado.

§ 4. Espacios $H^k(Q)$

1. Espacio lineal $H^k_{loc}(Q)$. Espacio de Hilbert $H^k(Q)$. Un conjunto de funciones de $L_{2,\,loc}(Q)$ que admiten todas las derivadas generalizadas hasta el orden k, $k \geqslant 1$, inclusive (de $L_{2,\,loc}(Q)$), lo designaremos mediante $H^k_{loc}(Q)$. Designemos con $H^k(Q)$ un subconjunto $H^k_{loc}(Q)$ cuyos elementos, a la par con todas las derivadas generalizadas hasta el orden k inclusive, pertenecen a $L_2(Q)$.

Por $H^0_{loc}(Q)$ y $H^k(Q)$, para $k = 0$, vamos a entender $L_{2,\,loc}(Q)$ y $L_2(Q)$, respectivamente: $H^0_{loc}(Q) = L_{2,\,loc}(Q)$, $H^0(Q) = L_2(Q)$.

Está claro que $H^k_{loc}(Q)$ y $H^k(Q)$ son espacios lineales. Mostremos que $H^k(Q)$ es un espacio de Hilbert provisto de un producto escalar

$$(f,\, g)_{H^k(Q)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_Q D^\alpha f \overline{D^\alpha g}\, dx. \tag{1}$$

Para comprobar esta afirmación basta establecer que $H^k(Q)$ es completo en la norma, engendrada por este producto escalar,

$$\|f\|_{H^k(Q)} = \sqrt{\sum_{|\alpha| \leq k} \int_Q |D^\alpha f|^2\, dx}. \tag{2}$$

Sea f_m, $m = 1, 2, \ldots$, una sucesión arbitraria de elementos de $H^k(Q)$, fundamental respecto a la norma (2):

$$\|f_s - f_m\|^2_{H^k(Q)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_Q |D^\alpha f_s - D^\alpha f_m|^2\, dx \to 0 \quad \text{para} \quad m,\, s \to \infty.$$

Por ello, para cualquier α, $|\alpha| \leqslant k$, cuando m, $s \to \infty$

$$\int_Q |D^\alpha f_s - D^\alpha f_m|^2\, dx \to 0, \tag{3}$$

y, en particular (cuando $\alpha = 0$),

$$\int_Q |f_s - f_m|^2 \, dx \to 0 \tag{4}$$

A causa de que $L_2(Q)$ es completo, de (4) se deduce la existencia de una función $f \in L_2(Q)$ hacia la cual (en $L_2(Q)$) converge la sucesión f_m, $m = 1, 2, \ldots$, y de (3), la existencia, para cualquier α, $|\alpha| \leqslant k$, de una función $f^\alpha \in L_2(Q)$ hacia la cual converge (en $L_2(Q)$) la sucesión $D^\alpha f_m$, $m = 1, 2, \ldots$

Puesto que cada función $f_m(x)$ admite todas las derivadas generalizadas hasta el k-ésimo orden inclusive, pertenecientes a $L_2(Q)$, para cualquier α, $|\alpha| \leqslant k$, tenemos:

$$(f_m, D^\alpha g)_{L_2(Q)} = (-1)^{|\alpha|} (D^\alpha f_m, g)_{L_2(Q)},$$

cualquiera que sea la función $g \in \dot{C}^k(\overline{Q})$. Pasando en esta igualdad al límite para $m \to \infty$ (de la convergencia fuerte se desprende la convergencia débil), obtenemos que la función f^α es la α-ésima derivada generalizada de la función f. De este modo, $f \in H^k(Q)$ y $\| f_m - f \|_{H^k(Q)} \to 0$ cuando $m \to \infty$. La afirmación está demostrada.

OBSERVACIÓN. A veces resulta más cómodo considerar el conjunto de todas las funciones de valores reales pertenecientes a $H^k(Q)$, $k = 0, 1, \ldots$ ($H^0(Q) = L_2(Q)$). Este conjunto es, por supuesto, un espacio (real) de Hilbert provisto del producto escalar (1). Llamémoslo espacio real $H^k(Q)$, conservando para él la misma designación.

Indiquemos algunas propiedades de los espacios $H^k(Q)$.

1. Si el dominio $Q' \subset Q$ y $f \in H^k(Q)$, entonces $f \in H^k(Q')$.

2. Si $f \in H^k(Q)$ y $a(x) \in C^k(\overline{Q})$, entonces la función $af \in H^k(Q)$. En este caso cualquier derivada generalizada $D^\alpha(af)$, $|\alpha| \leqslant k$, se calcula según las reglas habituales de derivación de un producto. En particular, $(af)_{x_i} = a_{x_i} f + a f_{x_i}$, $i = 1, \ldots, n$.

3. Si $f \in H^k(Q)$ y $f_h(x)$ es una función media para la función f, entonces para cualquier dominio Q', $Q' \Subset Q$, $\| f_h - f \|_{H^k(Q')} \to 0$ cuando $h \to 0$. Si la función f es complementariamente terminal en Q, resulta que $\| f_h - f \|_{H^k(Q)} \to 0$ cuando $h \to 0$.

4. Si la función $f \in H^k(Q)$ es terminal en Q, una función igual a f en Q y nula fuera de Q pertenecerá a $H^k(Q')$, cualquiera que sea el dominio Q', $Q' \supset Q$.

Las propiedades 1—4 se deducen directamente de la definición de los espacios $H^k(Q)$ y de las propiedades de las derivadas generalizadas.

5. Supongamos que la transformación $y = y(x)$ ($y_i = y_i(x_1, \ldots, x_n)$), $i = 1, \ldots, n$, representa biunívocamente el dominio Q en el dominio Ω y sea $x = x(y)$ ($x_i = x_i(y_1, \ldots, y_n)$), $i = 1, \ldots$

$\ldots, n$), la transformación correspondiente inversa. Supongamos que para cierto $k \geqslant 1$ $y_i(x) \in C^k(\overline{Q})$, $x_i(y) \in C^k(\overline{\Omega})$, $i = 1, \ldots, n$. En este caso, para que la función $F(x) = f(y(x))$ (en la que $f(y)$ es una función definida en Ω) pertenezca al espacio $H^k(Q)$, es necesario y suficiente que la función $f(y)$ pertenezca al espacio $H^k(\Omega)$. Las derivadas de la función $F(x)$ se calculan según las reglas habituales para derivar funciones compuestas. Por ejemplo, para las derivadas de primer orden tienen lugar las fórmulas

$$F_{x_i}(x) = \sum_{j=1}^{n} f_{y_j}(y(x)) \frac{\partial y_j(x)}{\partial x_i}, \qquad i = 1, \ldots, n \tag{5}$$

Además, existen tales constantes C_1 y C_2, dependientes de las funciones $y_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$, que:
a) $\| F \|_{H^k(Q)} \leqslant C_1 \| f \|_{H^k(\Omega)}$, b) $\| f \|_{H^k(\Omega)} \leqslant C_2 \| F \|_{H^k(Q)}$.

La transformación inversa $x = x(y)$ satisface las mismas condiciones que la transformación $y = y(x)$, por lo que podemos limitarnos a la demostración de la suficiencia y de la desigualdad a).

Sea $k = 1$ y $f(y) \in H^1(\Omega)$. De la observación al teorema 8, p. 8, § 1, cap. II, se deduce que tanto la función $F(x)$ como las funciones $F_i(x) = \sum_{j=1}^{n} f_{y_j}(y(x)) \frac{\partial y_j}{\partial x_i}$, $i = 1, \ldots, n$, pertenecen a $L_2(Q)$. Cuando $f_h(y)$ es una función mediada para $f(y)$, la función $F(h, x) = f_h(y(x))$ pertenece a $C'(\overline{Q})$, con la particularidad de que $\frac{\partial F(h, x)}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n} f_{hy_j}(y(x)) \frac{\partial y_j}{\partial x_i}$, $\quad i = 1, \ldots, n$.

Sea el subdominio $Q' \Subset Q$, mientras que Ω' su imagen. En este caso, $\Omega' \Subset \Omega$. Como $\| f_h - f \|_{L_2(\Omega)} \to 0$ y $\| f_{hy_i} - f_{y_i} \|_{L_2(\Omega')} \to 0$, $i = 1, \ldots, n$, cuando $h \to 0$, entonces, en virtud de la observación al teorema 8, p. 8, § 1, cap. II, $\| F(h, x) - F(x) \|_{L_2(Q)} \to 0$ y $\| F_{x_i}(h, x) - F_i(x) \|_{L_2(Q')} \to 0$, $i = 1, \ldots, n$, cuando $h \to 0$, cualquiera que sea $Q' \Subset Q$. Esto significa que en las igualdades $(F(h, x), g_{x_i}(x))_{L_2(Q)} = -(F_{x_i}(h, x), g(x))_{L_2(Q)}$ $i = 1, \ldots, n$, donde g es una función arbitraria de $\dot{C}^1(\overline{Q})$ (Q' se elige de manera que sea $g = 0$ en $Q \setminus Q'$), se puede pasar al límite para $h \to 0$: $(F, g_{x_i})_{L_2(Q)} = -(F_i, g)_{L_2(Q)}$. Por ello, la función F tiene todas las primeras derivadas generalizadas de $L_2(Q)$, es decir, pertenece a $H^1(Q)$; al mismo tiempo se realizan las igualdades (5) y, por lo tanto, también la desigualdad a) cuando $k = 1$.

Supongamos ahora que $k = 2$. Ya hemos demostrado que $F(x) \in H'(Q)$ y tienen lugar las fórmulas (5). Los segundos miembros de éstas, siendo funciones de y, pertenecen a $H^1(\Omega)$, en virtud de la propiedad 2. Por lo tanto, las funciones $F_{x_i}(x)$ también pertenecen a $H'(Q)$. Resulta que $F \in H^2(Q)$ y, cuando $k=2$, se cumple la desigualdad a). Considerando las terceras derivadas como derivadas de las segundas, etc., llegamos a la conclusión de que la afirmación es válida para cualquier k.

En el punto 2 emplearemos la siguiente propiedad.

6. Si el dominio Q es un paralelepípedo rectángulo, el conjunto $C^\infty(\overline{Q})$ (y, por esta misma razón, $C^k(\overline{Q})$) en el espacio $H^k(Q)$ es siempre denso.

Es suficiente demostrar esta afirmación para el paralelepípedo $\Pi_a = \{|x_i| < a_i, i = 1, \ldots, n\}$, donde $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $a_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$.

Tomemos una función arbitraria $f \in H^k(\Pi_a)$ y un número arbitrario $\varepsilon > 0$. Cualquiera que sea α, $0 \leqslant |\alpha| \leqslant k$, la función $D^\alpha f \in L_2(\Pi_a)$, por lo que, según el teorema 2, p. 2, § 2, existe una función $\varphi_\alpha(x) \in C(\overline{\Pi}_a)$ tal que $\| D^\alpha f - \varphi_\alpha \|_{L_2(\Pi_a)} < \varepsilon$.

En el paralelepípedo $\Pi_{a\sigma} = \{|x_i| < a_i\sigma, i = 1, \ldots, n\}$, donde $\sigma > 1$, $\Pi_a \Subset \Pi_{a\sigma}$, examinemos una función $F_\sigma(x) = f(x/\sigma)$. En virtud de la propiedad 4, $F_\sigma \in H^k(\Pi_{a\sigma})$ y, por esta misma razón, $F_\sigma \in H^k(\Pi_a)$. Puesto que

$$\| D^\alpha F_\sigma(x) - \varphi_\alpha(x) \|_{L_2(\Pi_a)} \leqslant$$
$$\leqslant \| D^\alpha F_\sigma(x) - \varphi_\alpha(x/\sigma) \|_{L_2(\Pi_{a\sigma})} + \| \varphi_\alpha(x) - \varphi_\alpha(x/\sigma) \|_{L_2(\Pi_a)}$$

y, de acuerdo con el teorema 8, p. 8, § 1, cap. II,

$$\| D^\alpha F_\sigma(x) - \varphi_\alpha(x/\sigma) \|_{L_2(\Pi_{a\sigma})} =$$
$$= \left\| \frac{1}{\sigma^{|\alpha|}} D^\alpha f(x/\sigma) - \varphi_\alpha(x/\sigma) \right\|_{L_2(\Pi_{a\sigma})} \leqslant \left\| \left(1 - \frac{1}{\sigma^{|\alpha|}}\right) D^\alpha f(x/\sigma) \right\|_{L_2(\Pi_{a\sigma})} +$$
$$+ \| D^\alpha f(x/\sigma) - \varphi_\alpha(x/\sigma) \|_{L_2(\Pi_{a\sigma})} \leqslant$$
$$\leqslant \sigma^{n/2}\left(1 - \frac{1}{\sigma^{|\alpha|}}\right) \| D^\alpha f \|_{L_2(\Pi_a)} + \sigma^{n/2}\varepsilon,$$

entonces

$$\| D^\alpha F_\sigma(x) - \varphi_\alpha(x) \|_{L_2(\Pi_a)} \leqslant \sigma^{n/2}\left(1 - \frac{1}{\sigma^{|\alpha|}}\right) \| D^\alpha f \|_{L_2(\Pi_a)} +$$
$$+ \sigma^{n/2}\varepsilon + \| \varphi_\alpha(x) - \varphi_\alpha(x/\sigma) \|_{L_2(\Pi_a)}.$$

Por ello, para cualquier α, $0 \leqslant |\alpha| \leqslant k$,

$$\| D^\alpha f(x) - D^\alpha F_\sigma(x) \|_{L_2(\Pi_a)} \leqslant \| D^\alpha f - \varphi_\alpha \|_{L_2(\Pi_a)} + \| D^\alpha F_\sigma - \varphi_\alpha \|_{L_2(\Pi_a)} \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon(1 + \sigma^{n/2}) + \sigma^{n/2}\left(1 - \frac{1}{\sigma^{|\alpha|}}\right) \| D^\alpha F \|_{L_2(\Pi_a)} +$$
$$+ \| \varphi_\alpha(x) - \varphi_\alpha(x/\sigma) \|_{L_2(\Pi_a)}.$$

La función $\varphi_\alpha(x)\in C(\overline{\Pi}_a)$ y, por lo tanto, $\|\varphi_\alpha(x)-\varphi_\alpha(x/\sigma)\|_{L_2(\Pi_a)}\to 0$ cuando $\sigma\to 1$. Por eso, existe tal $\sigma=\sigma_0>1$ que para todo α, $0\leqslant|\alpha|\leqslant k$, $\|D^\alpha f(x)-D^\alpha F_{\sigma_0}(x)\|_{L_2(\Pi_a)}$. Por consiguiente,

$$\|f-F_{\sigma_0}\|_{H^k(\Pi_a)}\leqslant C\varepsilon.$$

Tomemos ahora la función media $(F_{\sigma_0})_h(x)$ para la función $F_{\sigma_0}(x)\in H^k(\Pi_{a\sigma_0})$. De la propiedad 3 se desprende que $\|F_{\sigma_0})_h-F_{\sigma_0}\|_{H^k(\Pi_a)}\to 0$ cuando $h\to 0$. Por consiguiente, se puede hallar un $h=h_0$ tal que $\|(F_{\sigma_0})_{h_0}-F_{\sigma_0}\|_{H^k(\Pi_a)}\leqslant\varepsilon$. La función $(F_{\sigma_0})_{h_0}(x)\in C^\infty(\overline{\Pi}_a)$ y

$$\|(F_{\sigma_0})_{h_0}-f\|_{H^k(\Pi_a)}\leqslant\|(F_{\sigma_0})_{h_0}-F_{\sigma_0}\|_{H^k(\Pi_a)}+\|F_{\sigma_0}-f\|_{H^k(\Pi_a)}\leqslant(C+1)\,\varepsilon.$$

La afirmación está demostrada.

2. Sobre la prolongación de funciones. Supongamos que la función $f(x)$ está definida en el dominio Q y que éste está contenido en el dominio Q'. Se denomina *prolongación* de la función $f(x)$ en Q' una función $F(x)$ definida en Q' y coincidente con $f(x)$ en Q. Observemos, ante todo, que para cualquier función $f(x)$ existe una prolongación. Por ejemplo, se puede hacer que $F(x)$ sea nula en $Q'\setminus Q$. Esta prolongación la ya hemos empleado en el caso cuando $f(x)\in L_2(Q)$. Sin embargo, si $f(x)$ es una función suave en Q, por ejemplo, $f\in H^k(Q)$ (o $f\in C^k(\overline{Q})$) para cierto $k\geqslant 1$, resulta natural buscar su prolongación $F(x)$ en las clases de funciones igualmente suaves en Q': de $H^k(Q')$ (o de $C^k(\overline{Q'})$). Mostremos que en ciertas condiciones impuestas al contorno del dominio Q, tales prolongaciones existen.

Supongamos, al principio, que el dominio Q' es un cubo K_a de arista $2a>0$, $K_a=\{|y_i|<a,\ i=1,\ldots,n\}$ (designaremos aquí las variables independientes $y_1,\ldots,y_n$) y el dominio Q, es un paralelepípedo $K_a^+=K_a\cap\{y_n>0\}$. La prolongación $Z(y)$ de una función $z(y)\in C^k(\overline{K_a^+})$ la determinaremos en $K_a^-=K_a\cap\{y_n<0\}$ de la manera siguiente:

$$Z(y)=\sum_{i=1}^{k+1}A_i z(y',-y_n/i),\tag{6}$$

donde $y'=(y_1,\ldots,y_{n-1})$, mientras que $A_1,\ldots,A_{k+1}$ es una solución del sistema algebraico lineal de ecuaciones

$$\sum_{i=1}^{k+1}(-1/i)^s A_i=1,\quad s=0,\ldots,k.\tag{7}$$

Observemos que si $y \in K_a^-$, los puntos $(y', -y_n/i)$ de (6) se encuentran en K_a^+ para todos los $i = 1, \ldots, k+1$. El determinante del sistema 7 (determinante de Vandermonde) es distinto de cero, por lo que (7) admite la única solución $A_1, \ldots, A_{k+1}$.

Hagamos la función $Z(y)$ igual al $\lim\limits_{\substack{y \to y^0 \\ y \in K_a^+}} z(y)$, para cualquier $y^0 = (y^{0\prime}, 0) \in K_a \cap \{y_n = 0\}$. De este modo, la función $Z(y)$ estará definida en todo K_a. Ya que $z(y) \in C^k(\overline{K}_a^+)$, debido a (6), $Z(y) \in C^k(\overline{K}_a^-)$. Mostremos, primeramente, que $Z(y) \in C(\overline{K}_a)$.

Pasando en (6) al límite para $y \to y^0$, $y \in K_a^-$, en virtud de 7, obtenemos

$$\lim_{\substack{y \to y^0 \\ y \in K_a^-}} Z(y) = \sum_{i+1}^{k+1} A_i \lim_{\substack{y \to y^0 \\ y \in K_a^+}} z(y) = \sum_{i=1}^{k+1} A_i z(y^0) = Z(y^0).$$

Esto significa que $Z(y) \in C(\overline{K}_a)$.

De acuerdo con (6), siendo $y \in K_a^-$, para cualquier vector de números enteros $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $|\alpha| \leqslant k$, tenemos

$$D^\alpha Z(y) = \sum_{i=1}^{k+1} A_i (-1/i)^{\alpha_n} D^\alpha z(y', -y_n/i). \tag{8}$$

Pasando al límite para $y \to y^0$, $y \in K_a^-$, en las igualdades (8) con cualquier α, para los que $|\alpha| = 1$, obtenemos

$$\lim_{\substack{y \to y^0 \\ y \in K_a^-}} D^\alpha Z(y) = \lim_{\substack{y \to y^0 \\ y \in K_a^+}} D^\alpha Z(y)$$

Entonces, en los puntos del plano $K_a \cap \{y_n = 0\}$ existen todas las primeras derivadas de la función $Z(y)$ y ellas coinciden con los valores límites correspondientes. Por lo tanto, $Z(y) \in C^1(\overline{K}_a)$. Repitiendo estos razonamientos, en virtud de (7) obtenemos que $Z(y) \in C^l(\overline{K}_a)$ para todo $l \leqslant k$.

De la igualdad (8) se deduce que, con cualquier α, $|\alpha| \leqslant k$, para todo $y \in K_a^-$

$$|D^\alpha Z(y)|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{k+1} A_i^2 \frac{1}{i^{2\alpha_n}} \cdot \sum_{i=1}^{k+1} |D^\alpha z(y', -y_n/i)|^2 =$$

$$= C_0 \sum_{i=1}^{k+1} |D^\alpha z(y' - y_n/i)|^2.$$

Integrando esta desigualdad respecto a $y \in K_a^-$, obtenemos

$$\int_{K_a^-} |D^\alpha Z|^2 dy \leqslant C_0 \sum_{i=1}^{k+1} \int_{K_a^-} |D^\alpha z(y', -y_n/i)|^2 dy =$$

$$= C_0 \sum_{i=1}^{k+1} i \int_{K_a^+ \cap \{y_n < a/i\}} |D^\alpha z(y)|^2 dy \leqslant C' \int_{K_a^+} |D^\alpha z(y)|^2 dy.$$

Como $Z(y) = z(y)$ para $y \in K_a^+$, resulta

$$\int_{K_a} |D^\alpha Z(y)|^2 dy = \int_{K_a^+} |D^\alpha Z(y)|^2 dy +$$

$$+ \int_{K_a^-} |D^\alpha Z(y)|^2 dy \leqslant C'' \int_{K_a^+} |D^\alpha z(y)|^2 dy.$$

Sumando estas desigualdades respecto a todo α, $|\alpha| \leqslant k$, obtendremos la desigualdad

$$\|Z\|_{H^k(K_a)} \leqslant C_1 \|z\|_{H^k(K_a^+)} \tag{9}$$

en la que la constante $C_1 > 0$ no depende de la función $z(y)$.

Así pues, hemos construido la prolongación $Z(y) \in C^k(\bar{K}_a)$ de la función $z(y)$ de $C^k(\bar{K}_a^+)$ y para ella tiene lugar la desigualdad (9).

Supongamos ahora que la función $z(y) \in H^k(K_a^+)$. Según la propiedad 6 del punto precedente, existe una sucesión $z_s(y)$, $s = 1, 2, \ldots$, de funciones de $C^k(\bar{K}_a^+)$, convergente hacia $z(y)$ en la norma de $H^k(K_a^+)$: $\|z_s - z\|_{H^k(K_a^+)} \to 0$ cuando $s \to \infty$. Designemos por $Z_s(y)$ la prolongación de la función $z_s(y)$ en K_a, obtenida por el método que acabamos de exponer, $Z_s(y) \in C^k(\bar{K}_a)$. En vista de (9) tenemos la desigualdad $\|Z_s - Z_p\|_{H^k(K_a)} \leqslant C_1 \|z_s - z_p\|_{H^k(K_a^+)}$, la cual nos muestra que la sucesión de funciones Z_s, $s = 1, 2, \ldots$, es fundamental en la norma de $H^k(K_a)$. Esto es indicio de que existe una función $Z(y) \in H^k(K_a)$ hacia la cual la sucesión converge en la norma de $H^k(K_a)$. Ya que $Z(y) = z(y)$ para $y \in K_a^+$, la función $Z(y)$ será prolongación de la función $z(y)$ en K_a. La función $Z(y)$, obviamente, satisface la desigualdad (9).

Así pues, está demostrado el siguiente lema.

LEMMA 1. *Para cualquier función $z(y) \in H^k(K_a^+)$ $(C^k(\bar{K}_a^+))$ existe una prolongación $Z(y) \in H^k(K_a)$ $(C^k(\bar{K}_a))$ y se realiza la desigualdad* (9).

Observemos que como para las funciones $Z_s(y)$, $s = 1, 2, \ldots$, tiene lugar la igualdad (6) y, por otro lado, $z_s \to z$ en $H^k(K_a^+)$ y $Z_s \to Z$ en $H^k(K_a^-)$, la ecuación citada es válida también para las funciones $Z(y)$.

LEMA 2. *Supongamos que la función* $f(x) \in H^k(Q)$ *(o* $C^k(\overline{Q})$*) y para cualquier punto* $\xi \in \partial Q$ *existe una función* $F_\xi(x)$*, definida en una bola* $S_r(\xi) = \{|x - \xi| < r\}$ *de cierto radio* $r = r(\xi) > 0$*, tal que* $F_\xi(x) = f(x)$ *para* $x \in Q \cap S_r(\xi)$ *y* $F_\xi(x) \in H^k(S_r(\xi))$ $(C^k(S_r(\xi)))$ *(la función* $F_\xi(x)$ *la llamaremos prolongación de la función* $f(x)$ *en la bola* $S_r(\xi)$*). Supongamos, además, que tiene lugar la desigualdad*

$$\|F_\xi\|_{H^k(S_r(\xi))} \leqslant C_2 \|f\|_{H^k(Q)} \tag{10}$$

con una constante C_2 *que no depende de la función* $f(x)$.

Entonces, para todo $\rho > 0$ *existe la prolongación* $F(x)$ *de la función* $f(x)$ *en el dominio* Q^ρ*) *que posee las propiedades:* $F(x) \in H^k(Q^\rho)$ $(C^k(\overline{Q}^\rho))$, $F(x) = 0$ *fuera de* $Q^{\rho/2}$; *existe una constante* $C_3 > 0$*, dependiente sólo del dominio* Q *y el número* ρ*, tal que*

$$\|F\|_{H^k(Q^\rho)} \leqslant C_3 \|f\|_{H^k(Q)}. \tag{11}$$

Según la condición del lema, para todo punto $\xi \in \overline{Q}$ existe una bola $S_r(\xi)$, $r = r(\xi)$, en la que está definida: o bien la propia función $f(x) \in H^k(S_r(\xi))$ $(C^k(\overline{S}_r(\xi)))$ cuando $\xi \in Q$, o bien su prolongación de la misma clase. Suponemos que $r(\xi) < \rho$. La totalidad de las bolas $S_{r/3}(\xi)$ para todos los posibles $\xi \in \overline{Q}$ cubre el conjunto $\overline{Q}$. Por consiguiente (recordemos que el dominio Q es acotado) de este cubrimiento se puede extraer un subcubrimiento finito $S_{r_1/3}(x^1)$, ..., $S_{r_N/3}(x^N)$, donde $r_i = r(x^i)$.

Sea una función $\theta_i(x) \in C^\infty(R_n)$, $\theta_i(x) = 1$ en $S_{r_i/3}(x^i)$ y $\theta_i(x) = 0$ fuera de la bola $S_{r_i/2}(x^i)$, $i = 1, \ldots, N$. Designemos mediante $\sigma_i(x)$ una función $1 - \theta_i(x)$, $i = 1, \ldots, N$, y construyamos las funciones

$$\gamma_1(x) = \theta_1(x),\ \gamma_2(x) = \sigma_1(x)\,\theta_2(x), \ldots,$$
$$\gamma_i(x) = \sigma_1(x) \ldots \sigma_{i-1}(x)\,\theta_i(x),\ i \leqslant N.$$

Es obvio que $\gamma_i(x) \in C^\infty(R_n)$,

$$\gamma_i(x) = 0 \quad \text{en} \quad \bigcup_{j<i} S_{r_j/3}(x^j) \tag{12}$$

y

$$\gamma_i(x) = 0 \text{ fuera de } S_{r_i/2}(x^i). \tag{13}$$

Además,

$$\gamma_1(x) + \ldots + \gamma_i(x) = (1 - \sigma_1(x)) + \sigma_1(x)(1 - \sigma_2(x)) + \ldots$$
$$\ldots + \sigma_1(x) \ldots \sigma_{i-1}(x)(1 - \sigma_i(x)) = 1 - \sigma_1(x) \ldots \sigma_i(x),$$

*) Q^ρ es una acumulación de bolas $\{|x - x^0| < \rho\}$ respecto a todo $x^0 \in Q$.

por eso,

$$\gamma_1(x) + \ldots + \gamma_l(x) = 1 \tag{14}$$

para $x \in \bigcup_{i \leqslant l} S_{r_j/3}(x^j)$, y, en particular, para $x \in S_{r_l/3}(x^l)$.

Definamos las funciones $f_i(x)$, $i = 1, \ldots, N$, para todo $x \in R_n$ de la manera siguiente: en $S_{r_i}(x^i)$ la función $f_i(x)$ coincide o bien con $f(x)$, o bien con su prolongación $F_{x^i}(x)$ en $S_{r_i}(x^i)$; fuera de $S_{r_i}(x^i)$ la función $f_i(x)$ es igual a $f(x)$, si $x \in Q$, y es nula cuando $x \notin Q$.

En virtud de (13) y las propiedades 2 y 4 del punto anterior, la función $\gamma_i(x) f_i(x) \in H^k(Q^\rho)$ $(C^k(\overline{Q}^\rho))$. Por lo tanto, la función

$$F(x) = \sum_{i=1}^{N} f_i(x)\gamma_i(x) \tag{15}$$

pertenece a $H^k(Q^\rho)$ $(C^k(\overline{Q}^\rho))$.

Sea x un punto arbitrario de Q y $S_{r_l/3}(x^l)$, la primera bola del cubrimiento finito eligido continente el punto x. Puesto que $f_i(x) = f(x)$ para todo $i = 1, \ldots, N$, y de (12) $\gamma_i(x) f(x) = 0$ cuando $i > l$, entonces, debido a (14), $F(x) = \sum_{i=1}^{l} \gamma_i(x) f(x) = f(x)$. Esto significa que la función $F(x)$ de (15) es la prolongación de la función $f(x)$. La igualdad $F(x) \equiv 0$ fuera de $Q^{\rho/2}$ se deduce de (13) y (15), dado que $r_i < \rho$, $i = 1, \ldots, N$. La desigualdad (11) se desprende directamente de (10) y (15). El lema está demostrado.

TEOREMA 1 (sobre la prolongación). *Sean Q y Q' dominios acotados, $Q \Subset Q'$, y sea que $\partial Q \in C^k$. Entonces, para toda función $f(x) \in H^k(Q)$ $(C^k(\overline{Q}))$ existe una prolongación $F(x) \in H^k(Q')$ $(\dot{C}^k(\overline{Q}'))$ que es terminal en Q'. En este caso*

$$\|F\|_{H^k(Q')} \leqslant C\|f\|_{H^k(Q)}, \tag{16}$$

donde la constante $C > 0$ sólo depende de Q y Q'.

Tomemos un punto arbitrario $\xi \in \partial Q$. En cierto entorno U_ξ de este punto la ecuación de ∂Q puede ser representada (enumerando las variables, si fuera necesario) en la forma $x_n = \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1})$ con una función $\varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in C^k(\overline{D})$, donde el dominio $(n-1)$-dimensional D es una proyección de $\partial Q \cap U_\xi$ en el plano $x_n = 0$. Consideramos que $x_n > \varphi$ en el dominio $Q \cap U_\xi$. El cambio de variables

$$y_i = x_i - \xi_i, \quad i = 1, \ldots, n-1, \quad y_n = x_n - \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}) \tag{17}$$

representa biunívocamente U_ξ sobre un entorno Ω del origen de coordenadas para las variables $y_1, \ldots, y_n$. Sea K_a un cubo $\{|y_i| < a, i = 1, \ldots, n\}$, perteneciente al dominio Ω, y sea U_ξ^* la imagen del cubo en la transformación (17). La imagen del dominio $Q \cap U_\xi^*$ será, en este caso, un paralelepípedo $K_a^+ = K_a \cap \{y_n > 0\}$ y la función $f(x)$, definida en $Q \cap U_\xi^*$, se transformará en la función $z(y) = f(y_1 + \xi_1, \ldots, y_{n-1} + \xi_{n-1}, y_n + \varphi(y_1 + \xi_1, \ldots, y_{n-1} + \xi_{n-1})$, perteneciente, en virtud de la propiedad 5 del punto anterior, a $H^k(K_a^+)$ $(C^k(K_a^+))$.

De acuerdo con el lema 1, existe una prolongación $Z(y)$ de la función $z(y)$ en el cubo K_a. Esta prolongación engendra, en virtud de una transformación inversa a (17)

$$x_i = y_i + \xi_i, \quad i = 1, \ldots, n-1, \quad x_n = y_n + \varphi(y_1 + \xi_1, \ldots, y_{n-1} + \xi_{n-1})$$

la prolongación $F^\xi(x)$ de la función $f(x)$, perteneciente a $Q \cap U_\xi^*$, en U_ξ^*, y, con mayor razón, en la bola $S_r(\xi)$ (que está contenida en U_ξ^*) de radio $r = r(\xi) > 0$ y centro en el punto ξ. En vista de la propiedad 5, punto 1, tienen lugar las desigualdades

$$\|F_\xi\|_{H^k(S_r(\xi))} \leqslant \|F_\xi\|_{H^k(U_\xi^*)} \leqslant C_3 \|Z\|_{H^k(K_a)},$$

$$\|z\|_{H^k(K_a^+)} \leqslant C_4 \|f\|_{H^k(U_\xi^* \cap Q)} \leqslant C_4 \|f\|_{H^k(Q)},$$

donde las constantes C_3 y C_4 dependen sólo de la función $\varphi(x_1, \ldots, x_{n-1})$ de (17) y de sus derivadas hasta el k-ésimo orden inclusive. De estas desigualdades y de la (9) se desprende la desigualdad (10). La afirmación del teorema se deduce ahora del lema 2, si tomamos ρ menor que la distancia entre los contornos ∂Q y $\partial Q'$ de los dominios Q y Q'.

OBSERVACIÓN. Al demostrar el teorema 1, hemos construido la prolongación $F(x)$ en el dominio Q' de la función $f(x)$ perteneciente a $H^k(Q)$. Esta prolongación satisface no sólo (16), sino también las desigualdades

$$\|F\|_{H^s(Q')} \leqslant C \|f\|_{H^s(Q)},$$

cualesquiera que sean $s \leqslant k$.

Hasta ahora obteníamos prolongaciones de una función de un dominio en el otro dominio más amplio. En lo sucesivo necesitaremos una prolongación suave de funciones a partir del contorno.

Sea dada una función continua $f(x)$ en el contorno ∂Q del dominio Q. Llamaremos *prolongación* de la función $f(x)$ en Q la función $F(x)$ continua en $\overline{Q}$, si para $x \in \partial Q$ $F(x) = f(x)$. Es válida la siguiente afirmación.

TEOREMA 2. *Si para $k \geqslant 1$ el contorno $\partial Q \in C^k$, entonces para toda función $f(x) \in C^k(\partial Q)$ existe la función $F(x)$ de $C^k(\overline{Q})$ que es una* *prolongación de la función $f(x)$ en Q, teniendo lugar, en este caso, la desigualdad*

$$\|F\|_{C^h(\overline{Q})} \leqslant C \|f\|_{C^h(\partial Q)},$$

donde la constante $C > 0$ no depende de f.

Ya que $\partial Q \in C^h$, para todo punto $\xi \in \partial Q$ existe un número $\rho = \rho(\xi) > 0$ tal que un trozo del contorno $\partial Q \cap S_\rho(\xi)$ ($S_\rho(\xi)$ es una bola de radio ρ y centro en el punto ξ) se proyecta unívocamente en un dominio D_ξ de uno de los planos coordenados, sea del plano $x_n = 0$ (lo que siempre se puede lograr cambiando la numeración de las variables) y que la ecuación de la superficie $\partial Q \cap S_\rho(\xi)$ tenga la forma $x_n = \varphi(x')$, $x' \in D_\xi$, donde $\varphi(x') \in C^h(\overline{D_\xi})$.

Escojamos un número $r = r(\xi) > 0$ suficientemente pequeño de tal manera que una bola $(n-1)$-dimensional $\{|x' - \xi'| < r\} \Subset D_\xi$. Entonces, la función de n variables $F_\xi(x) = f(x', \varphi(x'))$ (que no depende de x_n) está definida en una bola cerrada $\overline{S_r(\xi)}$, pertenece a $C^h\overline{S_r(\xi)})$ y coincide con f en $\partial Q \cap S_r(\xi)$. Además, $\|F_\xi\|_{C^h(\overline{S_r(\xi)})} \leqslant C(\xi)\|f\|_{C^h(\partial Q)}$, donde la constante $C(\xi)$ no depende de f.

El conjunto de bolas $S_{r/3}(\xi)$ cubre el contorno ∂Q, cualquiera que sea $\xi \in \partial Q$. Escojamos de este conjunto un cubrimiento finito del contorno $S_{r_1/3}(x^1), \ldots, S_{r_N/3}(x^N)$, donde $r_i = r(x^i)$.

Definamos, para cualquier $i = 1, \ldots, N$, una función $f_i(x)$ del modo siguiente: hagámosla igual a $F_{x^i}(x)$ en la bola $S_{r_i}(x^i)$ y nula fuera de $S_{r_i}(x^i)$, si $x \notin \partial Q$, e igual a $f(x)$ cuando $x \in \partial Q$. Entonces, para todo $i = 1, \ldots, N$, las funciones $f_i(x)\gamma_i(x)$ (donde $\gamma_i(x)$ es una función construida al efectuar la demostración del lema 2) pertenecen a $C^h(R_n)$ y, por lo tanto, a $C^h(\overline{Q})$. Por consiguiente, la función

$$F(x) = \sum_{i=1}^{N} \gamma_i(x) f_i(x)$$

también pertenece a $C^h(\overline{Q})$.

Tomemos al azar un punto $x \in \partial Q$ y supongamos que la primera bola del cubrimiento finito elegido del contorno que contiene este punto es la bola $S_{r_l/3}(x^l)$. Ya que $f_i(x) = f(x)$ para todo $i = 1, \ldots, N$, de las correlaciones (12) y (14) se deduce que $F(x) = \sum_{i=1}^{l} \gamma_i(x) f(x) = f(x)$. Así pues, la función $F(x)$ es una prolongación de $C^h(\overline{Q})$ de la función $f(x)$. En cuanto a la acotación requerida, ésta es consecuencia de las correspondientes desigualdades para las funciones $F_{x^i}(x)$. El teorema queda demostrado.

3. Densidad de $C^\infty(\overline{Q})$ en $H^k(Q)$. Espacios $\dot{H}^k(Q)$. Supongamos que el contorno ∂Q del dominio Q pertenece a la clase C^k.

TEOREMA 3. *Un conjunto de funciones $C^\infty(\overline{Q})$ (y, con mayor razón, $C^k(\overline{Q})$) es siempre denso en e espacio $H^k(Q)$.*

Tomemos un dominio Q' respecto al cual Q es un dominio estrictamente interior, $Q \Subset Q'$. Sea $f(x)$ una función arbitraria de $H^k(Q)$. En virtud del teorema 1 del anterior, existe una prolongación $F(x)$ de la función $f(x)$ de Q a Q', perteneciente a $H^k(Q')$. Según la propiedad 3 (del p. 1), tiene lugar una correlación

$$\| F_h - f \|_{H^k(Q)} = \| F_h - F \|_{H^k(Q)} \to 0 \text{ cuando } h \to 0,$$

donde $F_h(x)$ es una función media para $F(x)$. Como $F_h(x) \in C^\infty(\overline{Q})$, el teorema queda demostrado.

El conjunto $C^k(\overline{Q})$ es una variedad lineal en $H^k(Q)$. Del teorema 3 se deduce que si el contorno del dominio $\partial Q \in C^k$, la adherencia del conjunto $C^k(\overline{Q})$ en la norma del espacio $H^k(Q)$ coincide con $H^k(Q)$.

Sea S una superficie $(n-1)$-dimensional contenida en $\overline{Q}$. El subconjunto $\dot{C}^k_S(\overline{Q})$ de las funciones de $C^k(\overline{Q})$ que se reducen a cero en los lugares donde Q corta cierto entorno (cada función tiene su propio entorno) de la superficie S es también una variedad lineal en $H^k(Q)$. La adherencia de $\dot{C}^k_S(\overline{Q})$ en la norma del espacio $H^k(Q)$ es un subespacio de $H^k(Q)$. Designémoslo mediante $\dot{H}^k_S(Q)$.

En el caso si $S = \partial Q$, el subespacio $\dot{H}^k_{\partial Q}(Q)$ se designará por $\dot{H}^k(Q)$ (la norma en $\dot{H}^k(Q)$ es la norma del espacio $H^k(Q)$). Del teorema 6, p. 3, § 2, se deduce que para $k = 0$ el subespacio $\dot{H}^k(Q) = \dot{H}^0(Q)$ coincide con el espacio $H^0(Q) = L_2(Q)$. En el punto 1 del párrafo siguiente será demostrado que para $k \geqslant 1$ el subespacio $\dot{H}^k(Q)$ no coincide con $H^k(Q)$.

Si Q' es un dominio que contiene otro dominio Q, $Q \subset Q'$, toda función $f(x)$ de $\dot{C}^k(\overline{Q})$, prolongada por cero en $Q' \setminus Q$, pertenece a $\dot{C}^k(\overline{Q'})$. Por ello, de la definición del espacio $\dot{H}^k$ proviene que la función $f(x)$ de $\dot{H}^k(Q)$, prolongada por cero en $Q' \setminus Q$, pertenece a $\dot{H}^k(Q')$.

4. Separabilidad del espacio $H^k(Q)$. Vamos a considerar el contorno ∂Q del dominio Q perteneciente a la clase C^k.

TEOREMA 4. *El espacio $H^k(Q)$ es separable.*

Al principio examinemos un cubo $K = \{|x_i| < \pi, i = 1, \ldots, n\}$. Un sistema numerable de funciones $(2\pi)^{-n/2} e^{i(m, x)}$, donde $m = (m_1, \ldots, m_n)$, $m_i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, i = 1, \ldots, n$, $(m, x) =$

$= m_1 x_1) + \ldots + m_n x_n$, es ortonormal en $L_2(K)$. A toda función $f(x) \in L_2(K)$ se le puede asignar una serie de Fourier

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \sum_m f_m e^{i(m,\,x)} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{s \leqslant |m| < s+1} f_m e^{i(m,\,x)}, \tag{18}$$

donde $f_m = \frac{(f(x),\, e^{i(m,\,x)})_{L_2(K)}}{(2\pi)^{n/2}}$ son coeficientes de Fourier de la función $f(x)$, y $|m|^2 = m_1^2 + \ldots + m_n^2$.

Sea la función $f(x) \in \dot{C}^\infty(\overline{K})$. Indiquemos, ante todo, que para cualquier m tiene lugar la desigualdad

$$|f_m| \leqslant (2\pi)^{n/2} \| f \|_{C(\overline{K})} = C_0. \tag{19}$$

Hagamos $m' = (m_1, \ldots, m_{n-1})$, $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$, $K' = \{|x_i| < \pi,\ i = 1, \ldots, n-1\} \subset R_{n-1}$. Cuando $m_n \neq 0$, tenemos

$$f_m = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_K f(x)\, e^{i(m,\,x)}\, dx =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{K'} e^{i(m',\,x')} dx' \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x', x_n)\, e^{ix_n m_n}\, dx_n \right) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \left(-\frac{1}{i m_n} \right)^p \int_K \frac{\partial^p f(x)}{\partial x_n^p}\, e^{i(m,\,x)}\, dx,$$

para p natural, de donde $|f_m| \leqslant \frac{(2\pi)^{n/2} \| f \|_{C^p(\overline{K})}}{|m_n|^p}$, y, por consiguiente, en vista de (19)

$$|f_m| \leqslant \frac{\| f \|_{C^p(\overline{K})} 2^p (2\pi)^{n/2}}{(1 + |m_n|)^p} = \frac{C'_p}{(1 + |m_n|)^p},$$

cualquiera que sea p natural.

A la par con esta desigualdad tienen lugar, por supuesto, las desigualdades

$$|f_m| \leqslant \frac{C'_p}{(1 + |m_i|)^p}, \quad i = 1, \ldots, n-1,$$

y, por lo tanto, las desigualdades

$$|f_m| \leqslant C'_p \min_i \left\{ \frac{1}{(1 + |m_i|)^p} \right\} = \frac{C'_p}{(1 + \max_i |m_i|)^p}. \tag{20}$$

Como $\max |m_i| \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}} |m|$, de (20) se desprenden las siguientes desigualdades, válidas para todo m y cualquier p natural

$$|f_m| \leqslant \frac{C'_p}{\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}|m|\right)^p} \leqslant \frac{C_p}{(1+|m|)^p} \tag{21}$$

Tomemos $p=n+2$. El número de sumandos en la suma $\sum\limits_{s \leqslant |m| < s+1} f_m e^{i(m,\,x)}$, igual al número de puntos m de coordenadas enteras en la capa esférica $s \leqslant |m| < s+1$ no supera el número de tales puntos en un cubo de arista $2(s+1)$, es decir, no es superior a $(2(s+1))^n$. Por eso,

$$\left|\sum_{s \leqslant |m| \leqslant s+1} f_m e^{i(m,\,x)}\right| \leqslant \sum_{s \leqslant |m| < s+1} |f_m| \leqslant \frac{C_{n+2} 2^n (1+s)^n}{(1+s)^{n+2}} = \frac{C_{n+2} 2^n}{(1+s)^2}.$$

Esto significa que la serie (18) en $\overline{K}$ es uniformemente convergente.

Haciendo $p = n+3$, para cualquier r, $1 \leqslant r \leqslant n$, obtenemos

$$\left|\sum_{s \leqslant |m| < s+1} i m_r f_m e^{i(m,\,x)}\right| \leqslant \frac{C_{n+3} 2^n (1+s)^{n+1}}{(1+s)^{n+3}} = \frac{C_{n+3} 2^n}{(1+s)^2}.$$

Por lo tanto, una serie obtenida de la serie (18), al derivarla, término a término, respecto a x_r, $r = 1, \ldots, n$, converge en $\overline{K}$ uniformemente. De igual manera se demuestra que las series obtenidas de la (18), al derivarla l veces, $l = 2, 3, \ldots$, término a término, son en $\overline{K}$ uniformemente convergentes.

Designemos por $g(x)$ una suma de la serie (18)

$$g(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \sum_m f_m e^{i(m,\,x)}.$$

Se ha demostrado más arriba que $g(x) \in C^\infty(\overline{K})$. Por lo tanto, $\varphi(x) = g(x) - f(x) \in C^\infty(\overline{K})$. Mostremos que en $\overline{K}$ $\varphi(x) \equiv 0$.

Como $\left(g(x), \frac{e^{i(m,\,x)}}{(2\pi)^{n/2}}\right)_{L_2(K)} = f_m$, para todo m

$$\int_K \varphi(x) e^{i(m,\,x)} \, dx = 0.$$

Fijemos arbitrariamente $m' = (m_1, \ldots, m_{n-1})$ y escribamos esta igualdad en la forma

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i m_n x_n} \left[\int_{K'} \varphi(x', x_n) e^{i(m',\,x')} \, dx'\right] dx_n = 0.$$

Como la función $\varphi_{m'}(x_n) = \int\limits_{K'} \varphi(x', x_n) e^{i(m', x')} dx'$, indefinidamente diferenciable respecto a x_n, $|x_n| \leqslant \pi$ es en el producto escalar de $L_2(-\pi, \pi)$ ortogonal a las funciones $e^{im_n x_n}$ para cualesquiera $m_n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, entonces, cualquiera que sea m', tenemos $\varphi_{m'}(x_n) = 0$ para todo x_n, $|x_n| \leqslant \pi$. Introduzcamos las designaciones: $m'' = (m_1, \ldots, m_{n-2})$, $x'' = (x_1, \ldots, x_{n-2})$, $K'' = K' \cap \{x_{n-1} = 0\}$. Para todo m'' fijado, cualquier x_n, $|x_n| \leqslant \pi$, y todo $m_{n-1} = 0, \pm 1, \ldots$, tenemos

$$0 = \int\limits_{K'} \varphi(x', x_n) e^{i(m', x')} dx' =$$

$$= \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{ix_{n-1}m_{n-1}} dx_{n-1} \int\limits_{K''} \varphi(x'', x_{n-1}, x_n) e^{i(x'', m'')} dx''.$$

Por consiguiente,

$$\int\limits_{K''} \varphi(x'', x_{n-1}, x_n) e^{i(m'', x'')} dx'' = 0$$

para cualesquiera x_{n-1}, x_n, $|x_{n-1}| \leqslant \pi$, $|x_n| \leqslant \pi$, y todo m''. Continuando este proceso, obtendremos la igualdad $\varphi(x) = 0$ en $\overline{K}$.

Hemos demostrado de este modo que toda función $f(x) \in \dot{C}^\infty(\overline{K})$ se desarrolla en la serie (18) que junto con las derivadas de cualquier orden es uniformemente convergente en $\overline{K}$. Es evidente, que esta afirmación es también válida para cualquier cubo $K_a = \{|x_i| < a, i = 1, \ldots, n\}$.

Pasemos ahora a la demostración del teorema. Tomemos un número $a > 0$ tan grande que el dominio $Q \Subset K_a$. De acuerdo con el teorema 1, p. 2, toda función $f(x) \in H^k(Q)$ puede ser prolongada mediante una función $F(x) \in H^k(K_a)$, terminal en K_a. De la propiedad 3, p. 1, se deduce que toda función $F(x)$ de esta índole puede ser aproximada en la norma de $H^k(K_a)$, valiéndose de las funciones medias $F_h(x)$ que son indefinidamente diferenciables y, para h suficientemente pequeños, terminales en K_a.

Según lo demostrado, toda función $F_h(x)$ (siendo h suficientemente pequeños) puede ser en $\overline{K}_a$ aproximada uniformemente, junto con todas las derivadas (y, por lo tanto, también en la norma de $H^k(K_a)$) por medio de las sumas parciales de la serie de Fourier de dicha función. Por consiguiente, cualquier función $F_h(x)$ puede ser aproximada en la norma de $H^k(Q)$ mediante combinaciones lineales del sistema $e^{i\frac{\pi}{a}(m, x)}$ con coeficientes cuyas partes reales e imaginarias sean números racionales. Así pues, está construido un conjunto siempre denso en $H^k(Q)$.

§ 5. Propiedades de las funciones de $H^1(Q)$ y $\dot{H}^1(Q)$

1. Traza de las funciones. Sea Q un dominio en R_n y S, una superficie suave $(n-1)$-dimensional perteneciente a $\overline{Q}$. Cuando en Q está dada una función $f(x)$ definida en cada punto (es decir, si la igualdad de las funciones se entiende como la igualdad de sus valores en cada punto), podemos considerar el valor de esta función en S como una función $f|_{x\in S}$, definida en cada punto de S, cuyos valores coinciden con los de $f(x)$ para todo $x \in S$. Si examinamos en Q una función dada en c.t.p. (es decir, las funciones son iguales, si coinciden en c.t.p.), el valor de f en la superficie fijada S se determina de manera no unívoca: ya que mes $S = 0$, la función puede tener en S un valor arbitrario. No obstante, en determinado sentido, se puede hablar de los valores que una función, definida en c.t.p., toma en las superficies $(n-1)$-dimensionales.

Supongamos, para simplificar, que la superficie $S = S(x_n)$ es la intersección del dominio Q con el plano $x_n =$ const. Entonces, en virtud del teorema de Fubini*), para casi todo x_n existe un valor $f|_{x\in S(x_n)}$ de la función f en $S(x_n)$, definido casi siempre en S (la igualdad de las funciones de la $(n-1)$-ésima variable se entiende, por supuesto, como la igualdad de sus valores en c.t.p. en el sentido de la medida $(n-1)$-dimensional). Es obvio, además, que el valor que toma en $S(x_n)$ una función continua en $\overline{Q}$, para casi todo x_n, es una función continua en $S(x_n)$, y el valor que toma en $S(x_n)$ una función de $L_2(Q)$ para casi todo x_n pertenece a $L_2(S(x_n))$.

Al estudiar las soluciones de las ecuaciones diferenciales se plantean con frecuencia condiciones a las cuales la solución debe satisfacer en cierta superficie fijada $(n-1)$-dimensional, por ejemplo, en ∂Q (las así llamadas condiciones límites). Es por eso, necesitaremos generalizar la noción del valor que toma una función definida en c.t.p. de la superficie $(n-1)$-dimensional S, esto es, la noción de la traza de una función en S. Esta noción se puede introducir unívocamente para una función que está definida en casi todo punto y satisface ciertas condiciones de suavidad. En particular, esta noción se introduce con facilidad para una función continua en $\overline{Q}$.

Llamaremos *traza* $f|_S$ *de la función* f *de* $C(\overline{Q})$ *en una superficie* $(n-1)$-*dimensional* S al valor que toma en esta superficie una función continua en $\overline{Q}$ la cual casi siempre coincide con f (es decir, por traza de una función continua en S entendemos su valor extendido unívocamente según la continuidad en S). En este caso, la igualdad de las funciones dadas en S se entiende, como de costumbre, como la igualdad en casi todo punto en el sentido de la medida $(n-1)$-dimensional.

*) Para precisar, en virtud del lema 4, p. 11, § 1, cap. II.

El concepto de la traza de una función en S se puede introducir también para las funciones pertenecientes a algunos espacios provistos de normas integrales, en particular, para las funciones de los espacios $H^k(Q)$, cuando $k \geqslant 1$. Puesto que todos los $H^k(Q)$, para $k \geqslant 1$, están incluidos en $H^1(Q)$, será suficiente introducir este concepto para las funciones de $H^1(Q)$.

Sea S una superficie de la clase C^1 (véase cap. I, Introducción) ubicada en $\overline{Q}$, y sea S_1 un trozo simple de S que se proyecta unívocamente en cierto dominio D del plano $\{x_n = 0\}$ y descrito por la ecuación

$$x_n = \varphi(x'), \text{ donde } x' = (x_1, \ldots, x_{n-1}), \quad \varphi(x') \in C^1(\overline{D}).$$

El dominio Q es acotado, por lo que puede considerarse dispuesto en un cubo $\{0 < x_i < a,\ i = 1, \ldots, n\}$ para cierto $a > 0$. Supongamos al principio, que la función $f(x)$ pertenece a $\dot{C}^1(\overline{Q})$ y hagámosla igual a cero fuera de $\overline{Q}$. De acuerdo con la fórmula de Newton—Leibniz

$$f(x)|_{S_1} = f(x', \varphi(x')) = \int_0^{\varphi(x')} \frac{\partial f(x', \xi_n)}{\partial \xi_n}\, d\xi_n.$$

Por ello, según la desigualdad de Buniakovski

$$|f|_{S_1}|^2 \leqslant \varphi(x') \int_0^{\varphi(x')} \left|\frac{\partial f(x', \xi_n)}{\partial \xi_n}\right|^2 d\xi_n \leqslant a \int_0^a \left|\frac{\partial f(x', \xi_n)}{\partial \xi_n}\right|^2 d\xi_n.$$

Multiplicando esta desigualdad por $\sqrt{1 + \varphi_{x_1}^2 + \ldots + \varphi_{x_{n-1}}^2}$ y integrando en D, obtenemos la desigualdad

$$\|f\|^2_{L_2(S_1)} = \int_{S_1} |f|_{S_1}|^2\, dS_1 \leqslant C^2 \|f\|^2_{H^1(Q)}, \tag{1}$$

con la constante $C > 0$ que no depende de la función f.

Ya que la superficie S puede ser cubierta por un número finito de trozos simples, o sea, trozos del tipo S_1 (que se proyectan, quizás, en otros planos coordenados), sumando las desigualdades correspondientes (1), obtendremos la desigualdad

$$\|f\|_{L_2(S)} \leqslant C \|f\|_{H^1(Q)}, \tag{2}$$

donde la constante $C > 0$ no depende de la función f.

La desigualdad (2) tiene lugar también para toda función $f(x) \in C^1(\overline{Q})$. Para demostrar esta afirmación, es suficiente hacer uso del teorema 1, p. 2, § 4, sobre la prolongación (suponiendo, naturalmente, que $\partial Q \in C^1$) y la desigualdad (2) para una función terminal de C^1.

Sea $f \in H^1(Q)$. Del teorema 3, p. 3, § 4, se deduce que existe una sucesión de funciones $f_p(x)$, $p = 1, 2, \ldots$, de $C^1(\overline{Q})$ que converge en la norma de $H^1(Q)$ hacia f. Para las funciones $f_p - f_q$ la desigualdad (2) tiene la forma

$$\|f_p - f_q\|_{L_2(S)} \leqslant C\|f_p - f_q\|_{H^1(Q)}. \tag{3}$$

Como $\|f_p - f_q\|_{H^1(Q)} \to 0$ cuando $p, q \to \infty$, también $\|f_p - f_q\|_{L_2(S)} \to 0$ cuando $p, q \to \infty$. Esto significa que la sucesión de las trazas $f_p|_S$ de las funciones f_p en S es fundamental en $L_2(S)$. En vista de que $L_2(S)$ es completo, existe una función $f_S(x) \in L_2(S)$ tal que hacia ella converge la sucesión de las trazas $f_p|_S$ cuando $p \to \infty$. Pasando en (3) al límite para $p \to \infty$, obtenemos

$$\|f_q - f_S\|_{L_2(S)} \leqslant C\|f_q - f\|_{H^1(Q)}. \tag{4}$$

Mostremos que la función $f_S(x)$ no depende de cómo se elige la sucesión $f_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, que en la norma de $H^1(Q)$ aproxima la función $f(x)$. En efecto, sea $\tilde{f}_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, otra sucesión de funciones en $C^1(\overline{Q})$ para la cual $\|f - \tilde{f}_k\|_{H_1, Q} \to 0$ cuando $k \to \infty$, y sea $\tilde{f}_S(x)$ el límite en la norma de $L_2(S)$ para la sucesión $\tilde{f}_k|_S$, $k = 1, 2, \ldots, \ldots$ Entonces, en virtud de las desigualdades (3) y (4)

$$\|f_S - \tilde{f}_S\|_{L_2(S)} \leqslant \|f_S - f_q\|_{L_2(S)} + \|f_q - \tilde{f}_q\|_{L_2(S)} + \|\tilde{f}_q - \tilde{f}_S\|_{L_2(S)} \leqslant$$
$$\leqslant C(\|f - f_q\|_{H^1(Q)} + \|f_q - \tilde{f}_q\|_{H^1(Q)} + \|\tilde{f}_q - \tilde{f}_S\|_{H^1(Q)}).$$

Puesto que el segundo miembro de la desigualdad tiende a cero cuando $q \to \infty$, resulta que $f_S = \tilde{f}_S$.

La función $f_S(x)$ (como elemento de $L_2(S)$) la llamaremos *traza de la función* $f(x) \in H^1(Q)$ *en la superficie* S y la designaremos por el símbolo $f|_S$ ($\|f|_S\|_{L_2(S)}$ la designaremos mediante $\|f\|_{L_2(S)}$).

De este modo, el concepto de traza de una función se ha determinado para cualquier elemento f de $H^1(Q)$.

Mostremos que este concepto es realmente una generalización del concepto del valor de una función en una superficie $(n-1)$-dimensional. Sea, para simplificar, $S = S(x_n)$ la intersección del dominio Q con el plano $x_n = \text{const}$ y sea que la función $f \in H^1(Q)$. Tomemos una sucesión $f_m(x)$, $m = 1, 2, \ldots$ de funciones de $C^1(\overline{Q})$ que en la norma del espacio $H^1(Q)$ converge hacia f. Según la definición, el papel de traza $f|_{S(x_n)}$ para todo x_n lo desempeña en $L_2(S(x_n))$ la sucesión de funciones $f_m|_{S(x_n)}$. Puesto que la sucesión f_m, $m = 1, 2, \ldots$, converge en $L_2(Q)$ hacia f, entonces, según la observación al teorema 1, p. 1, § 2, en esta sucesión se puede escoger una subsucesión f_{m_k}, $k = 1, \ldots$, que converge hacia f en c.t.p. de Q. Es decir, para casi todo x_n la sucesión $f_{m_k}|_{S(x_n)}$, $k = 1, 2, \ldots$, converge hacia el valor de la función f en $S(x_n)$ casi siempre en el sentido de la medida $(n-1)$-dimensional. Por consiguiente, la traza y el valor de la función f en $S(x_n)$ coinciden para casi todo x_n.

Así pues, disponemos de los conceptos de traza en S de las funciones continuas en $\overline{Q}$ y de las funciones pertenecientes a $H^1(Q)$. Comprobemos que si la función f pertenece tanto a $C(\overline{Q})$ como a $H^1(Q)$, su traza, como la traza de una función de $C(\overline{Q})$ (designémosla por $f|'_S$) y su traza, como la traza de una función de $H^1(Q)$ (designémosla por $f|''_S$), coinciden. Efectivamente, en virtud del teorema 1, p. 2 del párrafo anterior, la función f puede ser prolongada en el dominio Q', $Q \Subset Q'$, de tal manera que la prolongación F pertenezca tanto a $C(\overline{Q}')$ como a $H^1(Q')$. Examinemos las funciones $F_h(x)$ que son medias para la función F. Ya que $F_h \to F$ para $h \to 0$, tanto en la norma del espacio $C(\overline{Q})$ (véase p. 1, § 1) como en la norma del espacio $H^1(Q)$ (véase p. 1, § 4, propiedad 3), entonces, cuando $h \to 0$, $F_h(x)|_S \to f|'_S$ en la norma del espacio $C(\overline{S})$ y $F_h(x)|_S \to f|''_S$ en la norma del espacio $L_2(S)$. Por consiguiente $f|'_S = f|''_S$.

La traza $f|_S$ de la función $f(x) \in \mathring{H}^1_S(Q)$ (véase la definición de este espacio en el p. 3, § 4) es nula, puesto que la función $f|_S$ es el límite en la norma de $L_2(S)$ para funciones nulas en S (es decir, para las trazas en S de las funciones pertenecientes a $\mathring{C}^1_S(\overline{Q})$). En particular, la traza $f|_{\partial Q}$ de la función $f(x) \in \mathring{H}^1(Q)$ es nula. De aquí, entre otras cosas, se desprende la afirmación del p. 3 del párrafo anterior sobre que $\mathring{H}^k(Q) \neq H^k(Q)$ cuando $k \geqslant 1$: una función igual a la unidad, perteneciente a cualquier $H^k(Q)$, $k \geqslant 1$, es continua en $\overline{Q}$, por lo cual su traza en ∂Q es igual a 1: por consiguiente, no existe ningún $k \geqslant 1$ para el cual esta función pertenezca a $\mathring{H}^k(Q)$.

La traza $f|_S$ de la función $f \in H^1(Q)$ satisface la desigualdad (2). Para demostrar esta afirmación, es suficiente en la desigualdad (2) escrita para las funciones $f_p(x)$ ($f_p(x) \in C^1(\overline{Q})$, $\|f_p - f\|_{H^1(Q)} \to 0$ cuando $p \to \infty$), pasar al límite para $p \to \infty$.

Hasta ahora suponíamos que el contorno $\partial Q \in C^1$. No obstante, si $S \Subset Q$, este requisito resulta superfluo cuando tratamos de hallar la traza de la función en S y demostrar la desigualdad (2). En efecto, en este caso existirá un dominio $Q' \Subset Q$ tal que $\partial Q' \in C^1$ y $S \in Q'$.

Así hemos demostrado el teorema.

TEOREMA 1. *Supongamos que una superficie $(n-1)$-dimensional S es de la clase C^1 o pertenece a Q', $Q' \Subset Q$, o bien, en lugar de esto, sea $S \subset \overline{Q}$ y, complementariamente, $\partial Q \in C^1$. Entonces, toda función*

$f(x) \in H^1(Q)$ tiene en esta superficie una traza $f|_S$, perteneciente a $L_2(S)$, y, además, tiene lugar la desigualdad (2).

Sea una función $f(x) \in H^k(Q)$, $k > 1$. Como toda derivada generalizada $D^\alpha f$, del orden $|\alpha| < k$, pertenece a $H^1(Q)$, entonces, de acuerdo con el teorema 1, en cualquier superficie $(n-1)$-dimensional S de la clase C^1 existe una traza de esta derivada $D^\alpha_\xi f|_S$ que pertenece a $L_2(S)$. Además, tienen lugar las desigualdades

$$\|D^\alpha f\|_{L_2(S)} \leqslant C\|f\|_{H^{|\alpha|+1}(Q)} \leqslant C\|f\|_{H^k(Q)} \tag{5}$$

donde la constante $C > 0$ no depende de la función f.

2. Fórmula de integración por partes. Supongamos que las funciones $f(x)$ y $g(x)$ pertenecen a $H^1(Q)$ y $\partial Q \in C^1$. En este caso para todo $i = 1, \ldots, n$ es válida la fórmula de integración por partes

$$\int_Q f_{x_i} g\, dx = \int_{\partial Q} f g n_i\, dS - \int_Q f g_{x_i}\, dx, \tag{6}$$

donde $n_i = \cos(n, x_i)$ es coseno del ángulo entre la normal n, exterior a la superficie ∂Q, y el eje x_i, mientras que las funciones f y g, que se encuentran bajo el signo integral en ∂Q, son las trazas de estas funciones en ∂Q. De este modo, desde el punto de vista de la aplicación de la fórmula (6), el comportamiento de las funciones de $H^1(Q)$ es igual que el de las funciones de $C^1(\overline{Q})$.

Para demostrar la igualdad (6), tomemos (teorema 3, p. 3, § 4) las sucesiones $f_p(x)$ y $g_p(x)$, $p = 1, 2, \ldots$, de funciones de $C^1(\overline{Q})$ que en la norma de $H^1(Q)$ convergen hacia las funciones $f(x)$ y $g(x)$, respectivamente. Para f_p y g_p la igualdad (6) es válida:

$$\int_Q f_{px_i} g_q\, dx = \int_{\partial Q} f_p g_q n_i\, dS - \int_Q f_p g_{qx_i}\, dx.$$

Pasando en esta desigualdad al límite para $p \to \infty$ y $q \to \infty$ (recordemos que $\|f_p - f\|_{L_2(\partial Q)} \to 0$, $\|g_q - g\|_{L_2(\partial Q)} \to 0$), obtendremos la igualdad (6).

De (6) se deduce directamente que si $g \in H^1(Q)$ y las componentes $f_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$ del vector $f(x)$, $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$ pertenecen a $H^1(Q)$, tiene lugar la igualdad

$$\int_Q g \operatorname{div} f\, dx = \int_{\partial Q} g(f \cdot n)\, dS - \int_Q f \cdot \nabla g\, dx. \tag{7}$$

3. Propiedades de las trazas de funciones de $H^1(Q)$. Criterio de pertenencia al subespacio $\mathring{H}^1(Q)$. Sea Γ_0 un trozo simple de una superficie de clase C^1 ubicada en $\overline{Q}$. Supongamos que el trozo Γ_0 es suficientemente pequeño (es decir, está contenido dentro de una bola de radio r_0 suficientemente pequeño) y que se proyecta unívocamente en cierto dominio D del plano coordenado $\{x_n = 0\}$, con la particularidad de que $x_n = \varphi(x')$, $x' \in D$ es la ecuación de Γ_0, $\varphi(x') \in C^1(\overline{D})$.

Designemos por Γ_δ la superficie $\{x' \in D,\ x_n = \varphi(x') + \delta\}$ y mediante Ω_δ el dominio $\{x' \in D,\ \varphi(x') < x_n < \varphi(x') + \delta\}$ para $\delta < 0$, o bien el dominio $\{x' \in D,\ \varphi(x') + \delta < x_n < \varphi(x')\}$ para $\delta < 0$. Observemos que cuando $|\delta|$ es suficientemente pequeño (y siéndolo también r_0), al menos uno de los dominios, $\Omega_{+|\delta|}$ ó $\Omega_{-|\delta|}$, está contenido en Q.

Sea $x \in \Omega_\delta \subset Q$, entonces para cualquier función $f \in C^1(\overline{Q})$ tenemos

$$f(x',\ \varphi(x') + \delta) - f(x',\ \varphi(x')) = \int\limits_{\varphi(x')}^{\varphi(x')+\delta} \frac{\partial f(x',\ x_n)}{\partial x_n}\, dx_n,$$

de donde

$$|f(x',\ \varphi(x') + \delta) - f(x',\ \varphi(x'))|^2 \leqslant \left|\delta \int\limits_{\varphi(x')}^{\varphi(x')+\delta} \left|\frac{\partial f(x',\ x_n)}{\partial x_n}\right|^2 dx_n\right|.$$

Multiplicando esta desigualdad por $\sqrt{1 + \varphi_{x_1}^2 + \ldots + \varphi_{x_{n-1}}^2}$ e integrando en el dominio D, obtenemos

$$\|f(x^\delta) - f(x^0)\|_{L_2(\Gamma_\delta)} \leqslant C\sqrt{|\delta|}\, \|f\|_{H^1(\Omega_\delta)}, \tag{8}$$

donde $x^0 = (x',\ \varphi(x')) \in \Gamma_0$, $x^\delta = x^\delta(x^0) = (x',\ \varphi(x') + \delta) \in \Gamma_\delta$, y $C^2 = \max\limits_{x' \in \overline{D}} \sqrt{1 + \varphi_{x_1}^2 + \ldots + \varphi_{x_{n-1}}^2}$.

Es obvio que a la par con la desigualdad (8) tiene lugar también la desigualdad

$$\|f(x^\delta) - f(x^0)\|_{L_2(\Gamma_0)} \leqslant C_1\sqrt{|\delta|}\, \|f\|_{H^1(\Omega_\delta)}. \tag{9}$$

Aproximando la función $f \in H^1(Q)$ por las funciones de clase $C^1(\overline{Q})$, en virtud de la definición de traza de una función de $H^1(Q)$, llegamos a que las desigualdades (8) y (9) son válidas para todas las funciones de $H^1(Q)$.

Estas desigualdades expresan cierta continuidad de las trazas de las funciones del espacio $H^1(Q)$ en las superficies Γ_δ en dependencia del desplazamiento de estas últimas.

Si la traza de la función f en Γ_0 es igual a cero, $f|_{\Gamma_0} = 0$, de (9) se deduce que para cualesquiera ρ y δ, $0 < \delta \leqslant \rho \leqslant \rho_0$, donde ρ_0 es tal que $\Omega_{\rho_0} \subset Q$ (para concretar, consideramos que $\rho_0 > 0$) tiene lugar la desigualdad

$$\|f\|^2_{L_2(\Gamma_\delta)} \leqslant C^2\delta\, \|f\|^2_{H^1(\Omega_\delta)} \leqslant C^2\rho\, \|f\|^2_{H^1(\Omega_\rho)}.$$

Integrando esta desigualdad respecto a $\delta \in (0, \rho)$, en vista de la continuidad absoluta de la integral, obtenemos

$$\| f \|_{L_2(\Omega_\rho)} = o(\rho) \quad \text{para} \quad \rho \to 0. \tag{10}$$

Hemos demostrado, pues, que si $f \in H^1(Q)$, $f \mid_{\Gamma_0} = 0$ y $\Omega_\rho \subset Q$ (en particular, Γ_0 puede ser un trozo del contorno ∂Q), se verifica la correlación (10).

LEMA 1. Sea $f \in H^1(Q)$ y su traza en el contorno, $f \mid_{\partial Q} = 0$. En este caso

$$\| f \|_{L_2(Q \setminus Q_\delta)} = O(\delta) \quad \text{cuando} \quad \delta \to 0. \tag{11}$$

Puesto que el contorno $\partial Q \in C^1$, para todo punto $y \in \partial Q$ existe tal bola $S_{2r}(y)$, de radio $2r$, $r = r(y) > 0$ y con el centro en este punto, que el trozo del contorno $\partial Q \cap S_{2r}(y)$ se proyecta unívocamente en un dominio $(n-1)$-dimensional $D_{2r}(y)$ dispuesto en uno de los planos coordenados, digamos, en el plano $\{x_n = 0\}$. Con ello, la ecuación del trozo de $\partial Q \cap S_{2r}(y)$ tiene la forma $x_n = \varphi(x')$, $x' \in D_{2r}(y)$, $\varphi(x') \in C^1(\overline{D}_{2r}(y))$. Designemos con $\Gamma_0 = \Gamma_0(y)$ la superficie $\partial Q \cap S_r(y)$ y con $\Gamma_\delta = \Gamma_\delta(y)$ y $\Omega_\delta = \Omega_\delta(y)$ una superficie «paralela» y el dominio que la corresponde que se han construido según Γ_0 por el método descrito más arriba. Elijamos $\delta_0 = \delta_0(y)$ de tan pequeño valor absoluto que el dominio $\Omega_{\delta_0} = \Omega_{\delta_0}(y) \subset Q \cap S_{2r}(y)$.

Como la distancia entre $\partial Q \setminus S_{2r}(y)$ y $\overline{\Omega}_{\delta_0}(y)$ es positiva, mientras que la distancia entre $\partial Q \cap \overline{S}_{2r}(y)$ y $\Gamma_\delta(y)$, donde $\delta \in (0, \delta_0)$ cuando $\delta_0 > 0$, y $\delta \in (\delta_0, 0)$ cuando $\delta_0 < 0$, es, evidentemente, mayor que $\gamma \mid \delta \mid$ con cierta constante $\gamma = \gamma(y)$, $0 < \gamma < 1$, entonces puede elegirse $\gamma_0 = \gamma_0(y)$, $0 < \gamma_0 < 1$ de tal manera que para cualesquiera δ tenga lugar la desigualdad

$$\inf_{\substack{x \in \partial Q \\ \xi \in \Gamma_\delta}} |x - \xi| > \gamma_0 |\delta|. \tag{12}$$

Del cubrimiento del contorno ∂Q con las bolas $S_r(y)$, $y \in \partial Q$, escojamos un cubrimiento finito $S_{r_1}(x^1), \ldots, S_{r_N}(x^N)$. Existe evidentemente, un número $\delta_1 > 0$, $\delta_1 < \min\limits_{1 \le m \le N} |\delta_0(x^m)|$, tal que

$$Q \setminus Q_{\delta_1} \subset \bigcup_{m=1}^{N} \Omega_{\delta_0(x^m)}(x^m). \tag{13}$$

Además, en virtud de (12), para todo δ, $0 < \delta < \delta_1$, y $m = 1, \ldots, N$

$$(Q \setminus Q_{\gamma_1 \delta}) \cap \Omega_{\delta_0(x^m)}(x^m) \subset \Omega_{\delta \cdot \operatorname{sign} \delta_0(x^m)}(x^m) \tag{14}$$

donde $\gamma_1 = \min\limits_{1 \le m \le N} \gamma_0(x^m)$.

De (13) y (14) se deduce que para cualquier $f \in H^1(Q)$ tienen lugar, cuando $0 < \delta < \delta_1$, las desigualdades

$$\|f\|^2_{L_2(Q \setminus Q_{\gamma_1\delta})} \leqslant \sum_{m=1}^{N} \|f\|^2_{L_2((Q \setminus Q_{\gamma_1\delta}) \cap \Omega_{\delta_0(x^m)}(x^m))} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m=1}^{N} \|f\|^2_{L_2(\Omega_{\delta \cdot \operatorname{sign} \delta_0(x^m)}(x^m))}.$$

Puesto que $f|_{\partial Q} = 0$, de la última desigualdad y de la correlación (10) se desprende (11). El lema está demostrado.

TEOREMA 2. *Para que una función del espacio $H^1(Q)$ pertenezca al subespacio $H^1(Q)$, es necesario y suficiente que su traza en el contorno del dominio sea igual a cero.*

Como la necesidad es obvia, nos limitaremos a la demostración de la suficiencia. Sea una función $f \in H^1(Q)$ y $f|_{\partial Q} = 0$. Tomemos $\varepsilon > 0$ arbitrario. En vista del lema 1 y el teorema 9, p. 10, § 1, cap. II, sobre la continuidad absoluta de la integral, existe un $\delta = \delta(\varepsilon)$ tan pequeño que

$$\|f\|_{L_2(Q \setminus Q_\delta)} < \varepsilon\delta, \quad \|f\|_{H^1(Q \setminus Q_\delta)} < \varepsilon.$$

Puesto que para la función $f \in H^1(Q)$ (teorema 3, p. 3 del párrafo anterior; recordemos que $\partial Q \in C^1$) existe una sucesión $f_p(x)$, $p = 1, 2, \ldots$, de funciones de $C^1(\overline{Q})$ que en la norma de $H^1(Q)$ converge hacia f (y, con mayor razón, en la norma de $H^1(Q \setminus Q_\delta)$), se puede hallar un número $N = N(\delta) = N(\delta(\varepsilon))$ tal que

$$\begin{aligned} &\|f - f_N\|_{H^1(Q)} < \varepsilon, \\ &\|f_N\|_{L_2(Q \setminus Q_\delta)} < 2\varepsilon\delta, \\ &\|f_N\|_{H^1(Q \setminus Q_\delta)} < 2\varepsilon. \end{aligned} \tag{15}$$

Tomemos la función

$$\zeta_\delta(x) = \int_{Q_{\delta/2}} \omega_{\delta/3}(|x - y|)\, dy,$$

donde $\omega(|x - y|)$ es un núcleo de mediación. De las propiedades del núcleo de mediación se deduce que $\zeta_\delta(x) \in C^\infty(R_n)$, $\zeta_\delta(x) = 1$ para $x \in Q_{5\delta/6}$ y, con mayor razón, para $x \in Q_\delta$, $\zeta_\delta(x) = 0$ fuera de $Q_{\delta/6}$, es decir, $\zeta_\delta(x) \in \dot{C}^\infty(\overline{Q})$. Además, para todo $x \in R_n / 0 \leqslant \zeta_\delta(x) \leqslant 1$, $|\nabla\zeta_\delta| \leqslant C/\delta$ con la constante $C > 0$ no dependiente de δ.

En vista de (15) tenemos

$$\|f_N - f_N\zeta_\delta\|_{H^1(Q)} = \|f_N - f_N\zeta_\delta\|_{H^1(Q\setminus Q_\delta)} \leqslant$$

$$\leqslant (\|f_N(1-\zeta_\delta)\|^2_{L_2(Q\setminus Q_\delta)} + \||\nabla f_N|(1-\zeta_\delta) + |f_N||\nabla\zeta_\delta|\|^2_{L_2(Q\setminus Q_\delta)})^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant (\|f_N\|^2_{L_2(Q\setminus Q_\delta)} + 2\||\nabla f_N|\|^2_{L_2(Q\setminus Q_\delta)} + 2\|f_N|\nabla\zeta_\delta|\|^2_{L_2(Q\setminus Q_\delta)})^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \left(8\varepsilon^2 + \frac{2C^2}{\delta^2}\|f_N\|^2_{L_2(Q\setminus Q_\delta)}\right)^{1/2} \leqslant \varepsilon(8+8C^2)^{1/2} = C_1\varepsilon.$$

Las funciones $f_{N(\delta(\varepsilon))}(x)\,\zeta_{\delta(\varepsilon)}(x)$ pertenecen a $\dot{C}^1(\overline{Q})$ y

$$\|f_{N(\delta(\varepsilon))}(x)\,\zeta_{\delta(\varepsilon)}(x) - f(x)\|_{H^1(Q)} \leqslant \|f - f_{N(\delta(\varepsilon))}\|_{H^1(Q)} +$$

$$+ \|f_{N(\delta(\varepsilon))} - f_{N(\delta(\varepsilon))}\zeta_{\delta(\varepsilon)}\|_{H^1(Q)} < (1 + C_1)\,\varepsilon.$$

Por consiguiente, la función $f(x) \in \dot{H}^1(Q)$. El teorema queda demostrado.

4. Sobre la compacidad de conjuntos en $L_2(Q)$.

TEOREMA 3. *Un conjunto acotado en $H^1(Q)$ es compacto en $L_2(Q)$.*

Sea el conjunto $\mathcal{M}$ acotado en $H^1(Q)$, es decir, para todo $f \in \mathcal{M}$ se tiene:

$$\|f\|_{H^1(Q)} \leqslant C. \tag{16}$$

Supongamos al principio que $\mathcal{M} \subset \dot{H}^1(Q)$. Prolonguemos todas las funciones de $\mathcal{M}$ por cero fuera de Q. En el caso que se considera las prolongaciones obtenidas pertenecen a $\dot{H}^1(Q')$, cualquiera que sea el dominio $Q' \supset Q$.

Cuando $f_h(x)$ es una función media para la función $f(x) \in \mathcal{M}$, resulta válida la desigualdad (6) p. 3, § 2:

$$\|f_h - f\|^2_{L_2(Q)} \leqslant \frac{C_0}{h^n} \int\limits_{|z|<h} dz \int\limits_Q |f(x+z) - f(x)|^2\,dx. \tag{17}$$

Para la función $f(x) \in \dot{C}^1(\overline{Q})$, también prolongada por cero fuera de (Q), se realiza la igualdad $f(x+z) - f(x) = \int\limits_0^1 \frac{df(x+tz)}{dt}\,dt =$ $= \int\limits_0^1 (\nabla f(x+tz)\cdot z)\,dt$, cualquiera que sea el vector z. Por lo tanto,

$$|f(x+z) - f(x)|^2 \leqslant |z|^2 \int\limits_0^1 |\nabla f(x+tz)|^2\,dt$$

y, por lo tanto,

$$\int\limits_Q |f(x+z) - f(x)|^2\,dx \leqslant |z|^2\,\|f\|^2_{H^1(Q)}. \tag{18}$$

La desigualdad (18) es también válida para cualquier función $f \in \mathscr{M}$ de lo que podemos convencernos pasando al límite.

De (17) y (18) se desprende que

$$\| f_h - f \|^2_{L_2(Q)} \leqslant C_0 \| f \|^2_{H^1(Q)} \frac{h^2}{h^n} \int\limits_{|z|<h} dz \leqslant C_1^2 h^2,$$

donde la constante C_1 no depende, en virtud de (16), ni de h ni de f.

Si, ahora, mostramos que para todo $h > 0$ fijado el conjunto $\mathscr{M}_h$, compuesto de funciones medias $f_h(x)$ de todas las funciones $f(x) \in \in \mathscr{M}$, es compacto en $C(\overline{Q})$ (y, con mayor razón, en $L_2(Q)$), la afirmación del teorema fluirá del corolario al teorema 2, p. 7, § 3, cap. II.

De acuerdo con la propiedad d) del núcleo de mediación (véase cap. I, Introducción)

$$| f_h(x) | \leqslant \frac{C_0}{h^n} \int\limits_Q | f(x) | \, dx \leqslant C_0' \| f \|_{L_2(Q)} \leqslant C_0' \| f \|_{H^1(Q)} \leqslant \text{const}$$

y

$$\left| \frac{\partial f_h}{\partial x_i} \right| \leqslant \frac{C_1}{h^{n+1}} \int\limits_Q | f(x) | \, dx \leqslant \text{const}, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

con una constante que no depende de f, en virtud de (16). La aplicación del teorema de Arzelá demuestra que el conjunto $\{f_h(x)\} = \mathscr{M}_h$*) es compacto en $C(\overline{Q})$.

Sea, ahora, $\mathscr{M} \subset H^1(Q)$. Designemos por $\mathscr{M}'$ un conjunto de funciones $F(x)$ de $\mathring{H}^1(Q')$ obtenidas como resultado de una prolongación, según el teorema 1, p. 2, § 4, de las funciones $f(x)$ de $\mathscr{M}$ a cierto dominio Q', $Q \Subset Q'$. Ya que $\| F \|_{H^1(Q')} \leqslant \text{const} \; \| f \|_{H^1(Q)}$ (con una constante que no depende de f), el conjunto $\mathscr{M}'$ es acotado

*) Sea un conjunto $\mathfrak{M}$ de funciones continuas en $\overline{Q}$ equiacotado y equicontinuo: $\| g \|_{C(\overline{Q})} \leqslant \text{const}$ para todo $g \in \mathfrak{M}$, y para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, tal que con cualesquiera x', x'' de $\overline{Q}$ tales que $| x' - x'' | < \delta$ será $| g(x') - g(x'') | < \varepsilon$ para todo $g \in \mathfrak{M}$ (en nuestro caso $\mathfrak{M} = \mathscr{M}_h$, y la equicontinuidad de $\mathscr{M}_h$ se desprende de la equiacotación de las derivadas). Mostremos que el conjunto $\mathfrak{M}$ es compacto en $C(\overline{Q})$.

Sea $\{g_k\}$ una sucesión infinita arbitraria de funciones de $\mathfrak{M}$. Para cada m natural tomemos en $\overline{Q}$ un conjunto finito de puntos $\{x_q^m\}$, $q = 1, \ldots, p(m)$, tal que para cualquier $x \in \overline{Q}$ exista un punto de este conjunto que diste de x a una distancia menor que $\delta(2^{-m})$. Extrayamos de la sucesión $\{g_k\}$ una subsucesión $\{g_{k_1}\}$ que sea convergente en cada punto del conjunto $\{x_q^1\}$; entonces, $\| g_{k_1} - g_{l_1} \|_{C(\overline{Q})} < 3 \cdot 2^{-1}$ cuando $k_1, l_1 \geqslant N_1$. Extrayamos de $\{g_{k_1}\}$ una subsucesión $\{g_{k_2}\}$ que sea convergente en cada punto del conjunto $\{x_q^2\}$, etc. De este modo, para cualquier m tenemos una sucesión $\{g_{k_m}\}$ que posee la propiedad: $\| g_{k_m} - g_{l_m} \|_{C(\overline{Q})} < 3 \cdot 2^{-m}$ cuando k_m, $l_m \geqslant N_m$. Es obvio que una sucesión diagonal $\{g_{m_m}\}$ es fundamental en $C(\overline{Q})$.

en $\mathring{H}^1(Q')$. El mismo es compacto en $L_2(Q')$, según lo demostrado. Esto quiere decir que el conjunto $\mathcal{M}$ es compacto en $L_2(Q)$. El teorema queda demostrado.

5. De la compacidad del conjunto de trazas de las funciones de $H^1(Q)$.

TEOREMA 4. *Si un conjunto de funciones es acotado en $H^1(Q)$, el conjunto de sus trazas en la superficie $(n-1)$-dimensional $\Gamma \subset \overline{Q}$ de la clase C^1 es compacto en $L_2(\Gamma)$.*

Sea $\mathcal{M}$ un conjunto acotado en $H^1(Q)$ y $\mathcal{M}_\Gamma$, un conjunto de trazas en Γ de las funciones de $\mathcal{M}$. Designemos por $\mathcal{M}'$ un conjunto, acotado en $H^1(Q')$, compuesto de las prolongaciones en $Q' \Supset Q$ de las funciones de $\mathcal{M}$ (teorema 1, p. 2, § 4, $\partial Q \in C^1$).

Sea Γ_0 un trozo de la superficie Γ que se proyecta unívocamente en el dominio D del plano $\{x_n = 0\}$ y sea $x_n = \varphi(x')$, $x' \in D$, la ecuación de Γ_0, $\varphi(x') \in C^1(\overline{D})$. Existe tal $\delta > 0$ que el dominio $\Omega_{2\delta} = \{x' \in D,\ \varphi(x') < x_n < \varphi(x') + 2\delta\}$ pertenece a Q'.

Para toda función $f(x) \in C^1(\overline{Q'})$ y para cualesquiera puntos $x = (x', x_n) \in \Gamma_0$ y $(x', y_n) \in \Omega_{2\delta}$, tenemos:

$$f(x', y_n) - f(x) = \int_{x_n}^{y_n} \frac{\partial f(x', \xi_n)}{\partial \xi_n}\, d\xi_n.$$

De esta ecuación se deduce que

$$|f(x)|^2 \leqslant 2\,|f(x', y_n)|^2 + 4\delta \int_{x_n}^{x_n+2\delta} \left|\frac{\partial f(x', \xi_n)}{\partial \xi_n}\right|^2 d\xi_n.$$

Integremos la última desigualdad respecto a $y_n \in (\delta, 2\delta)$:

$$\delta\,|f(x)|^2 \leqslant 2\int_{\delta}^{2\delta} |f(x', y_n)|^2\, dy_n + 4\delta^2 \int_{x_n}^{x_n+2\delta} \left|\frac{\partial f(x', \xi_n)}{\partial \xi_n}\right|^2 d\xi_n.$$

y, después, la desigualdad obtenida la integramos por x en la superficie Γ_0 (es decir, la multiplicamos por $\sqrt{1+\varphi_{x_1}^2 + \ldots + \varphi_{x_{n-1}}^2}$ e integramos en D):

$$\delta \int_{\Gamma_0} |f|^2\, dS \leqslant \text{const}\left(2\int_{Q'} |f|^2\, dx + 4\delta^2 \int_{Q'} |\nabla f|^2\, dx\right).$$

Puesto que podemos dividir la superficie Γ en un número finito de trozos y para cada uno de éstos es válida la desigualdad que acabamos de obtener, sumando estas desigualdades, tenemos

$$\|f\|^2_{L_2(\Gamma)} \leqslant \frac{C_1'}{\delta}\, \|f\|^2_{L_2(Q')} + C_2'\delta\, \|f\|^2_{H^1(Q')},$$

donde las constantes C_1' y C_2' no dependen ni de f ni de δ. Del modo habitual, nos convencemos de que esta desigualdad es válida no sólo para toda función $f \in C^1(\overline{Q'})$ sino para cualquier función de $H^1(Q')$.

En virtud de la observación al teorema sobre la prolongación de una función (véase p. 2, § 4), de la última desigualdad tenemos otra desigualdad

$$\|f\|^2_{L_2(\Gamma)} \leqslant \frac{C_1}{\delta}\|f\|^2_{L_2(Q)} + C^2\delta\|f\|^2_{H^1(Q)} \tag{19}$$

que es válida para toda $f \in H^1(Q)$.

De acuerdo con el teorema 3 (del párrafo anterior) el conjunto $\mathscr{M}$ es compacto en $L_2(Q)$. Por eso, de cualquier sucesión infinita de elementos del conjunto $\mathscr{M}$ se puede extraer una subsucesión f_p, $p=1, 2, \ldots$, fundamental en $L_2(Q)$: para todo $\varepsilon > 0$ existe tal N que para todo $p \geqslant N$ y $q \geqslant N$ $\|f_p - f_q\|_{L_2(Q)} < \varepsilon$. Pero en este caso la sucesión de trazas $f_p|_S$, $p = 1, 2, \ldots$, es fundamental en $L_2(S)$, dado que para $p, q \geqslant N$ de la desigualdad (19), escrita para $f_p - f_q$, y de la desigualdad (16) tendremos

$$\|f_p - f_q\|^2_{L_2(Q)} \leqslant \frac{C_1\varepsilon^2}{\delta} + C_2\delta\|f_p - f_q\|^2_{H^1(Q)} \leqslant \varepsilon(C_1 + 4C_2C^2) = C_3\varepsilon,$$

siempre que tomamos $\delta = \varepsilon$. El teorema está demostrado.

6. Normalizaciones equivalentes de los espacios $H^1(Q)$ y $\mathring{H}^1(Q)$. Supongamos que en un dominio Q, $\partial Q \in C^1$, está definida una matriz simétrica real $P(x) = (p_{ij}(x))$, $i, j = 1, \ldots, n$, que es continua en $\overline{Q}$. Esto significa que las funciones de valores reales $p_{ij}(x) \in C(\overline{Q})$ y $p_{ij} = p_{ji}$, $i, j = 1, \ldots, n$. Supongamos, además, que en Q está dada una función real $q(x) \in C(\overline{Q})$, y en ∂Q, una función real $r(x) \in C(\partial Q)$.

Definamos en $H^1(Q)$ una forma bilineal hermitiana (p. 4, § 2, cap. II)

$$W(f, g) = \int\limits_Q \sum_{i,j=1}^{n} p_{ij} f_{x_i} \bar{g}_{x_j}\, dx + \int\limits_Q q f \bar{g}\, dx + \int\limits_{\partial Q} r f \bar{g}\, dS \tag{20}$$

(en la última, integral, por supuesto, $f = f|_{\partial Q}$, $g = g|_{\partial Q}$).

TEOREMA 5. *Si una matriz $P(x)$ está positivamente definida, es decir, si para cualquier vector completo $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ y para todo $x \in \overline{Q}$*

$$\sum_{i,j=1}^{n} p_{ij}(x)\xi_i\bar{\xi}_j \geqslant \gamma \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2 \tag{21}$$

con la constante $\gamma > 0$, las funciones $q(x) \geqslant 0$ en $\overline{Q}$, $r(x) \geqslant 0$ en ∂Q y (o) $q(x) \not\equiv 0$, o bien $r(x) \not\equiv 0$, entonces, la forma bilineal (20) *define en* $H^1(Q)$ *un producto escalar equivalente al producto escalar de la forma*

$$(f, g)_{H^1(Q)} = \int_Q (\nabla f \nabla \bar{g} + f\bar{g})\, dx. \tag{22}$$

Según la definición (véase p. 4, § 2, cap. II), para demostrar el teorema se debe establecer la existencia de dos constantes $C_1 > 0$ y $C_2 > 0$ tales que las desigualdades

$$W(f, f) \leqslant C_1^2 \|f\|^2_{H^1(Q)}, \quad \|f\|^2_{H^1(Q)} \leqslant C_2^2 W(f, f) \tag{23}$$

tengan lugar para todo $f \in H^1(Q)$.

Indiquemos, ante todo, que por las condiciones del teorema, cada uno de los tres sumandos en la expresión para $W(f, f)$ (en (20) $g = f$) es no negativo.

Puesto que

$$\int_Q \sum_{i,j=1}^{n} p_{ij} f_{x_i} \bar{f}_{x_j}\, dx \leqslant A \int_Q \sum_{i,j=1}^{n} |f_{x_i}|\,|f_{x_j}|\, dx \leqslant$$
$$\leqslant An \int_Q |\nabla f|^2\, dx \leqslant An \|f\|^2_{H^1(Q)},$$

donde $A = \max\limits_{1 \leqslant i,\, j \leqslant n} \|p_{ij}\|_{C(\bar{Q})}$,

$$\int_Q q|f|^2\, dx \leqslant A_1 \|f\|^2_{L_2(Q)} \leqslant A_1 \|f\|^2_{H^1(Q)},$$

donde $A_1 = \|q\|_{C(\bar{Q})}$, y, conforme a la desigualdad (2) del punto 1

$$\int_{\partial Q} r|f|^2\, dS \leqslant A_2 \|f\|^2_{L_2(\partial Q)} \leqslant C^2 A_2 \|f\|^2_{H^1(Q)},$$

donde $A_2 = \|r\|_{C(\partial Q)}$, entonces la primera de las desigualdades (23) se verifica con la constante $C_1^2 = An + A_1 + A_2 C^2$.

Demostremos la validez de la segunda desigualdad en (23). Supongamos, al contrario, que la constante necesaria C_2^2 no existe. Entonces, para todo $m \geqslant 1$ entero existe una función $f_m(x) \in H^1(Q)$ tal que $\|f_m\|^2_{H^1(Q)} > mW(f_m, f_m)$, o, lo que es lo mismo, existe una función $g_m(x) \in H^1(Q)$ ($g_m = f_m / \|f_m\|_{H^1(Q)}$) para cual

$$\|g_m\|_{H^1(Q)} = 1 \tag{24}$$

y

$$W(g_m, g_m) = \int_Q \sum_{i,j=1}^{n} p_{ij} g_{mx_i} \bar{g}_{mx_j}\, dx +$$
$$+ \int_Q q|g_m|^2\, dx + \int_{\partial Q} r|g_m|^2\, dS < 1/m.$$

De esta desigualdad se desprende que cada uno de los tres sumandos en $W(g_m, g_m)$ es menor que $1/m$ y, por lo tanto (emplearemos la desigualdad (21)) tienen lugar las desigualdades

$$\int_Q |\nabla g_m|^2\,dx < \frac{1}{m\gamma}, \quad \int_Q q|g_m|^2\,dx < \frac{1}{m}, \quad \int_{\partial Q} r|g_m|^2\,dS < \frac{1}{m}. \quad (25)$$

En vista de (24), la sucesión g_m, $m = 1, 2, \ldots$, es acotada en $H^1(Q)$ y por ello (teorema 3, p. 4) se puede extraer de ésta una subsucesión fundamental en $L_2(Q)$. Sin menoscabar la generalidad de razonamiento, vamos a considerar que la propia sucesión g_m, $m = 1, 2, \ldots$, es fundamental en $L_2(Q)$, es decir, $\| g_m - g_p \|_{L_2(Q)} \to 0$ cuando $m, p \to \infty$.
Como, en virtud de la primera de las desigualdades (25),

$$\begin{aligned} \| g_m - g_p \|^2_{H^1(Q)} &= \| g_m - g_p \|^2_{L_2(Q)} + \| |\nabla(g_m - g_p)| \|^2_{L_2(Q)} \leqslant \\ &\leqslant \| g_m - g_p \|^2_{L_2(Q)} + 2\| |\nabla g_m| \|^2_{L_2(Q)} + 2\| |\nabla g_p| \|^2_{L_2(Q)} \leqslant \\ &\leqslant \| g_m - g_p \|^2_{L_2(Q)} + \frac{2}{m\gamma} + \frac{2}{p\gamma}, \end{aligned}$$

entonces $\| g_m - g_p \|_{H^1(Q)} \to 0$ cuando $m, p \to \infty$, es decir, la sucesión g_m, $m = 1, 2, \ldots$, es también fundamental en $H^1(Q)$. Por ello, esta sucesión converge en la norma de $H^1(Q)$ hacia cierto elemento $g \in H^1(Q)$. Pasando en la igualdad (24) y desigualdades (25) al límite para $m \to \infty$, obtendremos las siguientes correlaciones:

a) $\| g \|_{H^1(Q)} = 1$,

b) $\int_Q |\nabla g|^2\,dx = 0$,

c) $\int_Q q|g|^2\,dx = 0$,

d) $\int_{\partial Q} r|g|^2\,dS = 0$.

De las igualdades b) y a) fluye que $g = \text{const} = 1/\sqrt{|Q|}$ en Q y $g|_{\partial Q} = 1/\sqrt{|Q|}$ en ∂Q. Pero, esto contradice, si $q(x) \not\equiv 0$, a la igualdad c) o bien, si $r(x) \not\equiv 0$, a la igualdad d). El teorema queda demostrado.

Sea $P(x) = p(x)E$, donde E es una matriz unitaria. Del teorema 5 se desprende

COROLARIO. *La forma bilineal*

$$W(f, g) = \int_Q (p\nabla f \nabla \bar{g} + q f \bar{g})\,dx + \int_{\partial Q} r(x) f \bar{g}\,dS,$$

donde $p(x) \in C(\overline{Q})$, $q(x) \in C(\overline{Q})$, $r(x) \in C(\partial Q)$, $p(x) \geqslant \text{const} > 0$, $q(x) \geqslant 0$ *en* $\overline{Q}$, $r(x) \geqslant 0$ *en* ∂Q *y* (o) $q(x) \not\equiv 0$ *en* Q, *o bien* $r(x) \not\equiv 0$ *en* ∂Q, *define en* $H^1(Q)$ *un producto escalar equivalente al producto escalar expresado por* (22).

TEOREMA 6. *Si* $P(x)$ *es una matriz positivamente definida y la función* $q(x) \geqslant 0$ *en* $\overline{Q}$, *la forma bilineal hermitiana*

$$W_1(f, g) = \int_Q \sum_{i,j=1}^{n} p_{ij} f_{x_i} \bar{g}_{x_j}\, dx + \int_Q q f \bar{g}\, dx$$

define en $\mathring{H}^1(Q)$ *un producto escalar equivalente al producto escalar* (22).

Como $\mathring{H}^1(Q) \subset H^1(Q)$, del teorema 5 se deduce que en $\mathring{H}^1(Q)$ se puede introducir un producto escalar equivalente al producto escalar (22), por medio de la forma bilineal (20) para $r(x) \equiv 1$ en ∂Q y $q(x) \geqslant 0$ en $\overline{Q}$. Mas, para $f(x)$ y $g(x)$, pertenecientes a $\mathring{H}^1(Q)$, los valores de las formas bilineales W y W_1 coinciden. El teorema queda demostrado.

Sea $P(x) = p(x)E$. Del teorema 6 se desprende

COROLARIO. La forma bilineal

$$W(f, g) = \int_Q (p \nabla f \nabla \bar{g} + q f \bar{g})\, dx,$$

donde $p(x) \in C(\overline{Q})$, $q(x) \in C(\overline{Q})$, $p(x) \geqslant \text{const} > 0$, $q(x) \geqslant 0$ *en* $\overline{Q}$ *define en* $\mathring{H}^1(Q)$ *un producto escalar equivalente al producto escalar* (22).

En particular, el producto escalar

$$(f, g)'_{\mathring{H}^1(Q)} = \int_Q \nabla f \nabla \bar{g}\, dx$$

es equivalente al producto escalar (22).

De la última afirmación se deduce directamente *la desigualdad de Steklov*

$$\| f \|^2_{L_2(Q)} \leqslant \text{const} \int_Q |\nabla f|^2\, dx$$

que es válida para cualquier función $f \in \mathring{H}^1(Q)$.

§ 6. Propiedades de las funciones de $H^k(Q)$

En este párrafo estudiaremos la interacción entre los espacios $H^k(Q)$ y $C^1(\overline{Q})$. Mostraremos que si una función pertenece al espacio $H^k(Q)$, siendo k suficientemente grande, pertenece también al espacio $C^l(\overline{Q})$ (es decir, puede cambiarse en un conjunto de medida nula de tal manera que sea continua en $\overline{Q}$, junto con todas las derivadas hasta l-ésimo orden).

Para obtener este resultado necesitaremos representar una función, suficientemente suave en Q, mediante una integral en Q respecto a ciertas combinaciones de las derivadas de la función.

1. Representación de las funciones mediante integrales.

TEOREMA 1. Supongamos que una función $f(x) \in C^2(\overline{Q})$ y la dimensión del espacio $n \geqslant 2$. En este caso, para todo punto $x \in Q$ tiene lugar la igualdad

$$f(x) = \int_Q U(x-\xi)\,\Delta f(\xi)\,d\xi + \\ + \int_{\partial Q} \left(f(\xi)\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial n_\xi} - \frac{\partial f(\xi)}{\partial n_\xi} U(x-\xi) \right) dS_\xi, \quad (1)$$

donde

$$U(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{(n-2)\,\sigma_n\,|x|^{n-2}} & \text{para} \quad n > 2, \\ -\dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{1}{|x|} & \text{para} \quad n = 2, \end{cases} \quad (2)$$

y $\sigma_n = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$ *es el área de la superficie de una esfera unitaria* $(n-1)$*-dimensional**).

La función $U(x-\xi)$ (que lleva el nombre de solución fundamental para el operador de Laplace), siendo función de ξ, satisface, para $\xi \neq x$, la igualdad $\Delta_\xi U(\xi - x) = \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial \xi_n^2}\right) U(\xi - x) = 0$, lo que se pone de manifiesto mediante la derivación inmediata.

Fijemos un punto arbitrario $x \in Q$ y escojamos $\varepsilon > 0$ tan pequeño que la bola $\{|\xi - x| \leqslant \varepsilon\} \subset Q$. En el dominio $Q_\varepsilon = Q \setminus \{|x - \xi| \leqslant \varepsilon\}$ para la función $U(\xi - x)$ (que se toma por

---

*) La igualdad (1) se realiza también en el caso unidimensional ($Q = (a, b)$). A una identidad fácilmente comprobable $f(x) = \frac{1}{2}\int_a^b |x-\xi|\,f''(\xi)\,d\xi + \frac{1}{2} \times \times (f(a) + f(b)) - \frac{1}{2}((a-x)\,f'(a) + (b-x)\,f'(b))$, se le puede dar la forma (1) al introducir la función $U(x-\xi) = \frac{1}{2}|x-\xi|$. No obstante, no utilizaremos la igualdad (1) en el caso cuando $n = 1$.

una función de la variable ξ) y para una función arbitraria $f(\xi) \in C^2(\overline{Q})$ tiene lugar la fórmula de Green (véase p. 2, § 1).

$$\int_{Q_\varepsilon} \Delta f(\xi)\, U(x-\xi)\, d\xi = \int_{\partial Q} \left(U(\xi - x) \frac{\partial f(\xi)}{\partial n} - \right.$$
$$\left. - f(\xi) \frac{\partial U(\xi - x)}{\partial n_\xi} \right) dS_\xi + \int_{|\xi - x| = \varepsilon} \left(U(\xi - x) \frac{\partial f(\xi)}{\partial n} - \right.$$
$$\left. - f(\xi) \frac{\partial U(\xi - x)}{\partial n_\xi} \right) dS_\xi. \qquad (3)$$

Dado que en la esfera $|\xi - x| = \varepsilon$, $\frac{\partial}{\partial n_\xi} = -\frac{\partial}{\partial |\xi - x|}$, entonces, el segundo sumando del segundo miembro en (3) tiene (para $n > 2$) la forma

$$-\frac{1}{(n-2)\sigma_n \varepsilon^{n-2}} \int_{|\xi - x| = \varepsilon} \frac{\partial f(\xi)}{\partial n} dS_\xi + \frac{1}{\sigma_n \varepsilon^{n-1}} \int_{|\xi - x| = \varepsilon} f(\xi)\, dS_\xi =$$
$$= f(x) + \frac{1}{\sigma_n \varepsilon^{n-1}} \int_{|\xi - x| = \varepsilon} (f(\xi) - f(x))\, dS_\xi -$$
$$- \frac{1}{(n-2)\sigma_n \varepsilon^{n-2}} \int_{|\xi - x| = \varepsilon} \frac{\partial f(\xi)}{\partial n} dS_\xi = f(x) + O(\varepsilon), \qquad (4)$$

dado que el área de la esfera $|\xi - x| = \varepsilon$ es igual a $\sigma_n \varepsilon^{n-1}$, y para $|\xi - x| = \varepsilon$ tenemos $f(\xi) - f(x) = O(\varepsilon)$ y $\left| \frac{\partial f(\xi)}{\partial n} \right| \leqslant$ const.

La función $U(\xi - x)$ es integrable en Q, por lo cual el límite, para $\varepsilon \to 0$, del primer miembro en la igualdad (3) es igual a la integral en Q de la función $U(\xi - x)\,\Delta f(\xi)$. Pasando en (3) al límite para $\varepsilon \to 0$, y valiéndonos de (4), obtendremos la igualdad (1) para $n > 2$. Para $n = 2$ la demostración es igual, a excepción de que el segundo sumando del segundo miembro en (3), a diferencia de (4), es igual a $f(x) + O(\varepsilon \ln \varepsilon)$. El teorema está demostrado.

2. Continuidad y diferenciabilidad continua de funciones de $H^k(Q)$. En el teorema 1 del párrafo anterior hemos obtenido la expresión para una función arbitraria $f \in \dot{C}^2(\overline{Q})$ en términos de la integral de las segundas derivadas de esta función por el dominio Q. Cuando la función es más suave, $f \in \dot{C}^k(\overline{Q})$, $k > 2$, a la par con (1) ésta puede expresarse también en términos de las derivadas de k-ésimo orden. Para obtener estas expresiones, necesitaremos la siguiente sencilla afirmación.

LEMA 1. *Sea $n \geqslant 3$. Entonces, para todo μ (real) la función*

$$u_\mu(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|^{\mu+2}}{(\mu+2)(\mu+n)} & \text{para} \quad \mu \neq -2,\ \mu \neq -n, \\ (\ln|x|)/(n-2) & \text{para} \quad \mu = -2, \\ -\dfrac{\ln|x|}{|x|^{n-2}(n-2)} & \text{para} \quad \mu = -n \end{cases}$$

satisface la ecuación $\Delta u_\mu = |x|^\mu$, cualquiera que sea $x \in R_n$, $x \neq 0$.

Recurriendo a cálculos inmediatos, podemos convencernos de que el lema enunciado es válido.

Sea la función $f \in \dot{C}^2(\overline{Q})$. En virtud de la fórmula (1), para $x \in Q$ tenemos

$$f(x) = \int\limits_Q U(x-\xi)\,\Delta f(\xi)\,d\xi.$$

En particular, para $n = 2$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_Q \Delta f(\xi)\ln|x-\xi|\,d\xi, \tag{5}$$

para $n = 3$

$$f(x) = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_Q \frac{\Delta f(\xi)}{|x-\xi|}\,d\xi, \tag{6}$$

para $n > 3$

$$f(x) = -\frac{1}{(n-2)\,\sigma_n}\int\limits_Q \frac{\Delta f(\xi)}{|x-\xi|^{n-2}}\,d\xi. \tag{7}$$

Sea $n=4$, y la función $f(x) \in \dot{C}^3(\overline{Q})$. Empleando la igualdad $\frac{1}{|x-\xi|^2} = \frac{1}{2}\Delta_\xi \ln|x-\xi|$ (lema 1) e integrando por partes, obtenemos de (7):

$$f(x) = -\frac{1}{4\sigma_4}\int\limits_Q \Delta f\cdot\Delta_\xi \ln|x-\xi|\,d\xi = \frac{1}{4\sigma_4}\int\limits_Q \nabla(\Delta f(\xi))\,\nabla_\xi \ln|x-\xi|\,d\xi. \tag{8}$$

Si $n=5$, de (7) y de la igualdad $|x-\xi|^{-3} = -\frac{1}{2}\nabla_\xi\frac{1}{|x-\xi|}$ (lema 1) obtendremos para la función $f(x) \in \dot{C}^3(\overline{Q})$ la expresión:

$$f(x) = \frac{1}{2\cdot 3\sigma_5}\int\limits_Q \Delta f(\xi)\,\Delta_\xi\frac{1}{|x-\xi|}\,d\xi =$$

$$= -\frac{1}{2\cdot 3\sigma_5}\int\limits_Q \nabla(\Delta f(\xi))\,\nabla_\xi\frac{1}{|x-\xi|}\,d\xi \tag{9}$$

y así sucesivamente. Sea $f(x) \in \dot{C}^{2p}(\overline{Q})$, $p \geqslant 2$. Entonces, de las igualdades

$$\frac{1}{|x-\xi|^{4p-4}} = C'_{4p-2}\Delta_\xi^{p-1}\frac{1}{|x-\xi|^{2p-2}}, \quad \frac{1}{|x-\xi|^{4p-3}} = \\ = C'_{4p-1}\Delta_\xi^{p-1}\frac{1}{|x-\xi|^{2p-1}},$$

que son válidas para $n > 4p-3$ y que se desprenden del lema 1, en virtud de (7), tenemos

$$f(x) = C''_{4p-2}\int_Q \frac{\Delta^p f(\xi)}{|x-\xi|^{2p-2}}\,d\xi \quad \text{para} \quad n = 4p-2 \qquad (10_{4p-2})$$

y

$$f(x) = C''_{4p-1}\int_Q \frac{\Delta^p f(\xi)}{|x-\xi|^{2p-1}}\,d\xi \quad \text{para} \quad n = 4p-1, \qquad (10_{4p-1})$$

donde C'_i y C''_i son ciertas constantes absolutas. Puesto que $n > 4p-1$, $p \geqslant 2$

$$\frac{1}{|x-\xi|^{4p-2}} = C'_{4p}\Delta_\xi^p\left(\frac{1}{|x-\xi|^{2p-2}}\right) \quad \text{y} \quad \frac{1}{|x-\xi|^{4p-1}} = \\ = C'_{4p+1}\Delta_\xi^p\left(\frac{1}{|x-\xi|^{2p-1}}\right),$$

para $f \in \dot{C}^{2p+1}(\overline{Q})$, $p \geqslant 2$, de (7) resulta

$$f(x) = C''_{4p}\int_Q \nabla(\Delta^p f(\xi))\,\nabla_\xi\left(\frac{1}{|x-\xi|^{2p-2}}\right)d\xi \ \text{para} \ n = 4p \quad (10_{4p})$$

y

$$f(x) = C''_{4p+1}\int_Q \nabla(\Delta^p f(\xi))\,\nabla_\xi\left(\frac{1}{|x-\xi|^{2p-1}}\right)d\xi \ \text{para} \ n = 4p+1 \ (10_{4p+1})$$

donde C'_i y C''_i son constantes absolutas.

Ya que $\left|\nabla_\xi \frac{1}{|x-\xi|^s}\right| = \frac{s}{|x-\xi|^{s+1}}$ cuando $s \geqslant 1$, de las expresiones (6), (8), (9) (10_{4p-2})—(10_{4p+1}) se obtienen las desigualdades

$$|f(x)| \leqslant C_{4p-2}\int_Q \frac{|\Delta^p f(\xi)|}{|x-\xi|^{2p-2}}\,d\xi \quad \text{para} \quad n = 4p-2, \quad p > 1, \qquad (11_{4p-2})$$

$$|f(x)| \leqslant C_{4p-1}\int_Q \frac{|\Delta^p f(\xi)|}{|x-\xi|^{2p-1}}\,d\xi \quad \text{para} \quad n = 4p-1, \quad p \geqslant 1; \qquad (11_{4p-1})$$

para toda $f \in \dot{C}^{2p}(\overline{Q})$, y las desigualdades

$$|f(x)| \leqslant C_{4p} \int_Q \frac{|\nabla \Delta^p f(\xi)|}{|x-\xi|^{2p-1}} d\xi \quad \text{para} \quad n=4p, \ p \geqslant 1 \tag{11_{4p}}$$

$$|f(x)| \leqslant C_{4p+1} \int_Q \frac{|\nabla \Delta^p f(\xi)|}{|x-\xi|^{2p}} d\xi \quad \text{para} \quad n=4_{p+1}, \ p \geqslant 1, \tag{11_{4p+1}}$$

para toda $f \in \dot{C}^{2p+1}(\overline{Q})$, siendo C_i constantes absolutas.

Haciendo uso de la desigualdad de Buniakovski, obtendremos de (5):

$$|f(x)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \left(\int_Q |\Delta f|^2 d\xi \right)^{1/2} \left(\int_Q |\ln|x-\xi||^2 d\xi \right)^{1/2} \leqslant C \|f\|_{H^2(Q)}, \ n=2,$$

de (11_{4p-2})

$$|f(x)| \leqslant C_{4p-2} \left(\int_Q |\Delta^p f|^2 d\xi \right)^{1/2} \left(\int_Q \frac{d\xi}{|x-\xi|^{4p-4}} \right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant C \|f\|_{H^{2p}(Q)}, \quad n=4p-2>2,$$

y, análogamente, de $(11_{4p-1})-(11_{4p+1})$

$$|f(x)| \leqslant C \|f\|_{H^{2p}(Q)}, \quad n=4p-1 \geqslant 3,$$

$$|f(x)| \leqslant C \|f\|_{H^{2p+1}(Q)}, \quad n=4p \geqslant 4,$$

$$|f(x)| \leqslant C \|f\|_{H^{2p+1}(Q)}, \quad n=4p+1 \geqslant 5,$$

donde la constante C, depende de n y del dominio Q.

Así pues, la desigualdad

$$\|f\|_{C(\overline{Q})} \leqslant C \|f\|_{H^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}(Q)} \tag{12}$$

se cumple para todas las $f \in \dot{C}^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}(\overline{Q})$, $n \geqslant 1$, con una constante que no depende de f. La validez de esta desigualdad para $n=1$ se pone de manifiesto inmediatamente, si cualquier función $f(x) \in \dot{C}^1([a, b])$ la representamos en la forma

$$f(x) = \frac{1}{2} \int_a^b \operatorname{sign}(x-\xi) \cdot f'(\xi) \, d\xi.$$

Si la función $f \in \dot{C}^{l+1+\left[\frac{n}{2}\right]}(\overline{Q})$ para cierto $l>0$, a la par con (12) ella satisface también la desigualdad

$$\|f\|_{C^l(\overline{Q})} \leqslant C_l \|f\|_{H^{l+1+\left[\frac{n}{2}\right]}(Q)}, \tag{13}$$

en la cual la constante $C_l>0$ no depende de f.

En efecto, para todo vector $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ de coordenadas enteras no negativas, $|\alpha| \leqslant l$, en virtud de (12) tenemos

$$\|D^\alpha f\|_{C(\bar{Q})} \leqslant C \|D^\alpha f\|_{H^{1+\left[\frac{n}{2}\right]}(Q)} \leqslant$$
$$\leqslant C\|f\|_{H^{1+|\alpha|+\left[\frac{n}{2}\right]}(Q)} \leqslant C\|f\|_{H^{1+l+\left[\frac{n}{2}\right]}(Q)}.$$

Sumando estas desigualdades respecto a todo α, $|\alpha| \leqslant l$, obtendremos la desigualdad (13).

Sea, ahora, $f \in \mathring{H}^{l+1+\left[\frac{n}{2}\right]}(Q)$ y sea $f_m(x)$, $m = 1, 2, \ldots$, una sucesión de funciones de $\dot{C}^{l+1+\left[\frac{n}{2}\right]}(\bar{Q})$ que converge en la norma de $H^{l+1+\left[\frac{n}{2}\right]}(Q)$ hacia f. En virtud de (13)

$$\|f_m - f_s\|_{C^l(\bar{Q})} \leqslant C\|f_m - f_s\|_{H^{l+1+\left[\frac{n}{2}\right]}(Q)} \to 0$$

para $m, s \to \infty$, es decir, la sucesión f_m, $m = 1, 2, \ldots$, resulta ser fundamental en la norma de $C^l(\bar{Q})$. Esto significa que la función límite f pertenece a $C^l(\bar{Q})$. Pasando en la desigualdad $\|f_m\|_{C^l(\bar{Q})} \leqslant C\|f_m\|_{H^{l+1+\left[\frac{n}{2}\right]}(Q)}$ al límite para $m \to \infty$, llegamos a la conclusión de que la desigualdad (13) es válida para cualquier $f \in \mathring{H}^{l+1+\left[\frac{n}{2}\right]}(Q)$.

Sea una función $f \in H_{\text{loc}}^{l+1+\left[\frac{n}{2}\right]}(Q)$. Tomemos arbitrariamente un subdominio $Q' \Subset Q$ y construyamos una función $\zeta(x) \in \dot{C}^\infty(\bar{Q})$ que en Q' sea igual a 1. La función $f \cdot \zeta \in \mathring{H}^{l+1+\left[\frac{n}{2}\right]}(Q)$, por eso pertenece a $\dot{C}^l(\bar{Q})$ y, consecuentemente, la función f pertenece a $C^l(\bar{Q}')$. Por ser Q' arbitrario, la función f pertenece a $C^l(Q)$. De este modo queda demostrada la afirmación siguiente.

TEOREMA 2. *Cualquier función del espacio* $H_{\text{loc}}^{l+1+\left[\frac{n}{2}\right]}(Q)$ *pertenece al espacio* $C^l(Q)$, *es decir,* $H_{\text{loc}}^{l+1+\left[\frac{n}{2}\right]}(Q) \subset C^l(Q)$.

Sea, ahora, $f \in H^{l+1+\left[\frac{n}{2}\right]}(Q)$. Supongamos que $\partial Q \subset C^{l+1+\left[\frac{n}{2}\right]}$. Entonces, en virtud del teorema sobre la prolongación para un dominio (cualquiera) Q', $Q' \Supset Q$, existe una función F, perteneciente a $\overset{\circ}{H}{}^{l+1+\left[\frac{n}{2}\right]}(Q')$, que en Q coincide con f, con la particularidad de que $\|F\|_{H^{l+1+\left[\frac{n}{2}\right]}(Q')} \leqslant C'\|f\|_{H^{l+1+\left[\frac{n}{2}\right]}(Q)}$, donde la constante C' no depende de f. La función $F \in C^l(\overline{Q}')$ y para ella tiene lugar la desigualdad $\|F\|_{C^l(\overline{Q}')} \leqslant C''\|F\|_{H^{l+1+\left[\frac{n}{2}\right]}(Q')}$ (desigualdad (13) para la función F en el dominio Q'). Por lo tanto, $f \in C^l(\overline{Q})$ y se cumple la desigualdad

$$\|f\|_{C^l(\overline{Q}')} \leqslant C'C''\|f\|_{H^{l+1+\left[\frac{n}{2}\right]}(Q)}.$$

De este modo queda demostrada la siguiente afirmación.

TEOREMA 3. *Si es que $\partial Q \in C^{l+1+\left[\frac{n}{2}\right]}$, entonces $H^{l+1+\left[\frac{n}{2}\right]}(Q) \subset \subset C^l(\overline{Q})$. En este caso para toda función $f \in H^{l+1+\left[\frac{n}{2}\right]}(Q)$ tiene lugar la desigualdad* (13) *en la cual la constante $C > 0$ no depende de f.*

§ 7. Espacios $C^{r,0}$ y $C^{2s,s}$ Espacios $H^{r,0}$ y $H^{2}_{s,s}$

Hasta ahora examinábamos espacios funcionales (C^k, H^k, $k = 0, 1, \ldots$), compuestos de funciones cuyas propiedades diferenciales son iguales con relación a todas las variables independientes: H^k, por ejemplo, consta de todas las funciones, pertenecientes a L_2, cuyas derivadas generalizadas hasta el k-ésimo orden inclusive pertenecen a L_2. En la teoría de ecuaciones diferenciales también se emplean conjuntos de funciones que tienen diferentes propiedades diferenciales respecto a diferentes variables. En particular, en el capítulo sexto dedicado a las ecuaciones parabólicas serán empleados los espacios de funciones que vamos a introducir a continuación.

Sea D un dominio acotado del espacio R_n ($x = (x_1, \ldots, x_n)$ es un punto en R_n) y sea $Q_T = \{x \in D,\ 0 < t < T\}$ un cilindro de altura $T > 0$ en el espacio $R_{n+1} = R_n \times \{-\infty < t < \infty\}$.

1. Espacios de Banach $C^{r,0}(\overline{Q}_T)$ y $C^{2s,s}(\overline{Q}_T)$. Designemos con $C^{r,0}(\overline{Q}_T)$, donde $r \geqslant 1$ es un número entero, un conjunto de todas las funciones $f(x, t)$ continuas en $\overline{Q}_T$ y que admiten derivadas $\frac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$, continuas en $\overline{Q}_T$, para cualesquiera (enteros y no negativos) $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n \leqslant r$.

Designemos con $C^{2s,s}(\overline{Q}_T)$, donde $s \geqslant 1$ es un número entero, un conjunto de todas las funciones $f(x, t)$ continuas en $\overline{Q}_T$ y que admiten derivadas $\frac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n+\beta} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n} \partial t^{\beta}}$, continuas en $\overline{Q}_T$, para cualesquiera (enteros y no negativos) $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta, \alpha_1+\ldots+\alpha_n+2\beta\leqslant 2s$.

Por $C^{r,0}(\overline{Q}_T)$ para $r=0$ y por $C^{2s,s}(\overline{Q}_T)$ para $s=0$, vamos a entender un espacio $C^{0,0}(\overline{Q}_T)=C(\overline{Q}_T)$.

Está claro que el conjunto $C^{r,0}(\overline{Q}_T)$, $r\geqslant 0$, es un espacio de Banach cuya norma es

$$\|f\|_{C^{r,0}(\overline{Q}_T)}=\sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_n=r}\max_{\overline{Q}_T}\left|\frac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n}f}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}\right|,$$

y el conjunto $C^{2s,s}(\overline{Q}_T)$, $s\geqslant 0$, es un espacio de Banach con la norma

$$\|f\|_{C^{2s,s}(\overline{Q}_T)}=\sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_n+2\beta\leqslant 2s}\max_{\overline{Q}_T}\left|\frac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n+\beta}f}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}\partial t^{\beta}}\right|.$$

2. Espacios de Hilbert $H^{r,0}(Q_T)$ y $H^{2s,s}(Q_T)$. Designemos con $H^{r,0}(Q_T)$, donde $r\geqslant 1$ es un número entero, un conjunto de todas las funciones $f(x,t)$, pertenecientes a $L_2(Q_T)$, cuyas derivadas generalizadas $\frac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n}f}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}$, para todo $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, $\alpha_1+\ldots+\alpha_n\leqslant r$ (entero y no negativo), existen y pertenecen a $L_2(Q_T)$. Designemos con $H^{2s,s}(Q_T)$, donde $s\geqslant 1$ es un número entero, un conjunto de todas las funciones $f(x,t)$, pertenecientes a $L_2(Q_T)$, cuyas derivadas generalizadas $\frac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n+\beta}f}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}\partial t^{\beta}}$, para todo $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, β (entero y no negativo) tales que $\alpha_1+\ldots+\alpha_n+2\beta\leqslant 2s$, existen y pertenecen a $L_2(Q_T)$.

Por $H^{r,0}(Q_T)$ para $r=0$ y por $H^{2s,s}(Q_T)$ para $s=0$, vamos a entender el espacio $H^{0,0}(Q_T)=L_2(Q_T)$.

Indiquemos al principio las siguientes propiedades de los conjuntos $H^{r,0}(Q_T)$ y $H^{2s,s}(Q_T)$ que se deducen inmediatamente de las definiciones.

1. Un conjunto $H^{r,0}(Q_T)$, $r\geqslant 0$, es un espacio de Hilbert con el producto escalar

$$(f,g)_{H^{r,0}(Q_T)}=\int_{Q_T}\sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_n\leqslant r}\frac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n}f}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}\cdot\overline{\frac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n}g}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}}\,dx\,dt,$$

mientras que el conjunto $H^{2s,s}(Q_T)$, $s\geqslant 0$, es un espacio de Hilbert con el producto escalar

$$(f,g)_{H^{2s,s}(Q_T)}=\int_{Q_T}\sum_{2\beta+\alpha_1+\ldots+\alpha_n\leqslant 2s}\frac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n+\beta}f}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}\partial t^{\beta}}\times$$

$$\times\overline{\frac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n+\beta}g}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}\partial t^{\beta}}}\,dx\,dt.$$

2. Cualesquiera que sean r y s, $0\leqslant r\leqslant 2s$. $H^{2s,s}(Q_T)\subset\subset H^{2s,0}(Q_T)\subset H^{r,0}(Q_T)$.

3. Si $f(x,t)\in H^{r,0}(Q_T)$, para

$$\alpha_1+\ldots+\alpha_n=r'\leqslant r,\quad \frac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n}f}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}\in H^{r-r',0}(Q_T).$$

4. Si $f(x,t)\in H^{2s,s}(Q_T)$, para $\alpha_1+\ldots+\alpha_n+2\beta\leqslant 2s'$, donde $s'\leqslant s$, la función $\frac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n+\beta}f}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}\partial t^{\beta}}\in H^{2(s-s'),s-s'}(Q_T)$.

Mostremos ahora que las funciones de los espacios $H^{r,0}(Q_T)$ y $H^{2s,s}(Q_T)$, siendo suficientemente suave el contorno ∂D del dominio D, pueden ser prolongadas, conservando la suavidad, a los dominios más amplios que Q_T. Para precisar, establezcamos la validez de la afirmación siguiente.

5. Sea D' un dominio arbitrario de R_n tal que $D\Subset D'$, y sean t^0 y t^1 números arbitrarios que satisfacen las desigualdades $t^0<0$, $t^1>T$. Designemos por Q'_{t^0,t^1} el cilindro $\{x\in D',\ t^0<t<t^1\}$. Si $\partial D\in C^r$, $r\geqslant 1$, para cualquier función $f\in H^{r,0}(Q_T)$, existe una prolongación $F\in H^{r,0}(Q'_{t^0,t^1})$ que es terminal en Q'_{t^0,t^1}, y, además, tiene lugar la desigualdad

$$\|F\|_{H^{r,0}(Q'_{t^0,t^1})}\leqslant C\|f\|_{H^{r,0}(Q_T)},\tag{1}$$

en la cual la constante positiva C no depende de la función f. Si $\partial D\in C^{2s}$, $s\geqslant 1$, para cualquier función $f\in H^{2s,s}(Q_T)$ existe una prolongación $F\in H^{2s,s}(Q'_{t^0,t^1})$ que es terminal en Q'_{t^0,t^1}, y, además, tiene lugar la desigualdad

$$\|F\|_{H^{2s,s}(Q'_{t^0,t^1})}\leqslant C\|f\|_{H^{2s,s}(Q_T)},\tag{2}$$

donde la constante positiva C no depende de f.

La prolongación buscada F de la función f de $H^{r,0}(Q_T)$, o de $H^{2s,s}(Q_T)$, se construye en dos etapas: primero se halla la prolongación F_1 de la función f por la superficie lateral del cilindro Q_T a un cilindro más amplio $Q'_T=\{x\in D',\ 0<t<T\}$ y de la misma altura T; luego, la función F_1 se prolonga por la base superior $\{x\in D',\ t=T\}$ y por la inferior $\{x\in D',\ t=0\}$ del cilindro Q'_T.

Para construir la función F_1 emplearemos el mismo esquema que al prolongar las funciones de $H^k(D)$ a D' (véase p. 2, § 4). Hagamos uso, además, de la prolongación, construida en el p. 2, § 4, de las funciones desde un paralelepípedo rectángulo.

Designemos por $\Pi_{a,T}$, $a>0$, un paralelepípedo rectángulo $\{|x_i|<a,\ i=1,\ldots,n,\ 0<t<T\}$, y por $\Pi^+_{a,T}$ y $\Pi^-_{a,T}$, los

paralelepípedos rectángulos $\{|x_i|<a,\ i=1,\ \ldots,\ n-1,\ 0<x_n<a,\ 0<t<T\}$ y $\{|x_i|<a,\ i=1,\ \ldots,\ n-1,\ -a<x_n<0,\ 0<t<T\}$, respectivamente. Sea la función $z(x,\ t)\in C^k(\overline{\Pi}_{a,\ T})$ para cierto $k\geqslant 1$. La prolongación $Z(x,\ t)$ de la función $z(x,\ t)$ en el paralelepípedo $\Pi_{a,\ T}$ se define en el paralelepípedo $\Pi^-_{a,\ T}$ de la manera siguiente:

$$Z(x,\ t)=\sum_{i=1}^{k+1}A_i z\left(x',\ -\frac{x_n}{i},\ t\right), \tag{3}$$

donde $x'=(x_1,\ \ldots,\ x_{n-1})$ y $A_1,\ \ldots,\ A_{k+1}$ es la solución del sistema algebraico lineal

$$\sum_{i=1}^{k+1}A_i\left(-\frac{1}{i}\right)^s=1,\qquad s=0,\ 1,\ \ldots,\ k.$$

Al demostrar el lema 1 p. 2, § 4, hemos establecido que $Z(x,\ t)\in C^k(\overline{\Pi}_{a,\ T})$ y para cualesquiera $\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n,\ \beta,\ \alpha_1\geqslant 0,\ \ldots,\ \beta\geqslant 0,\ \alpha_1+\ \ldots\ +\alpha_n+\beta\leqslant k$,

$$\left\|\frac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n+\beta}Z}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}\partial t^\beta}\right\|_{L_2(\Pi_{a,T})}\leqslant C\left\|\frac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\beta}z}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial t^\beta}\right\|_{L_2(\Pi^+_{a,T})},$$

donde la constante $C>0$ no depende de z. Por ello, para todo $r\leqslant k$

$$\|Z\|_{H^{r,0}(\Pi_{a,\ T})}\leqslant C\|z\|_{H^{r,0}(\Pi^+_{a,\ T})}, \tag{4}$$

y para todo $s,\ 2s\leqslant k$

$$\|Z\|_{H^{2s,s}(\Pi_{a,\ T})}\leqslant C\|z\|_{H^{2s,s}(\Pi^+_{a,\ T})}, \tag{5}$$

donde la constante positiva C no depende de z.

Puesto que en el espacio $H^{r,0}(\Pi^+_{a,T})$ y en el espacio $H^{2s,s}(\Pi^+_{a,T})$ el conjunto $C^\infty(\overline{\Pi}^+_{a,T})$ y, consecuentemente, el conjunto $C^k(\overline{\Pi}^+_{a,T})$ son siempre densos para todo $k\geqslant r$ o para todo $k\geqslant 2s$, respectivamente (esta afirmación se demuestra como la afirmación análoga para el espacio $H^k(D)$, véase la propiedad 6 p. 1, § 4), entonces, en virtud de que los conjuntos mencionados son completos, de lo dicho se desprende que también para cualquier función z, perteneciente a $H^{r,0}(\Pi^+_{a,T})$ o a $H^{2,ss}(\Pi^+_{a,T})$, existe la prolongación Z a $\Pi_{a,T}$, perteneciente a $H^{r,0}(\Pi_{a,T})$ o, respectivamente, a $H^{2s,s}(\Pi_{a,T})$, con la particularidad de que la función Z se define en $\Pi^-_{a,T}$ por la fórmula 3 y se cumple la desigualdad (4) o la (5), respectivamente. Reiterando textualmente los razonamientos aplicados al demostrar el teorema 1 (p. 2, § 4), obtendremos una función $F_1(x,\ t)$ que es prolongación de la función $f(x,\ t)$ en el cilindro Q'_T, con la particularidad de que si $f \in H^{r,0}(Q_T)$, entonces $F_1 \in H^{r,0}(Q'_T)$ y tendrá lugar la desigualdad

$$\| F_1 \|_{H^{r,0}(Q'_T)} \leqslant C_1 \| f \|_{H^{r,0}(Q_T)},$$

mientras que si $f \in H^{2s,s}(Q_T)$, entonces $F_1 \in H^{2s,s}(Q'_T)$ y se verifica la desigualdad

$$\| F_1 \|_{H^{2s,s}(Q'_T)} \leqslant C_2 \| f \|_{H^{2s,s}(Q_T)}$$

(las constantes positivas C_1 y C_2 en estas desigualdades no dependen de f). Además, la función $F_1 = 0$ en $Q'_T \setminus Q''_T$, donde $Q''_T = \{x \in \in D'', 0 < t < T\}$, y D'' es un dominio en R_n tal que $D \Subset D'' \Subset D'$.

Construyamos ahora la prolongación F que necesitamos de la función f en el cilindro Q'_{t^0, t^1}.

En el caso cuando $f \in H^{r,0}(Q_T)$, a título de F tomemos una función igual a F_1 en Q'_T y que es nula en $Q'_{t^0,t^1} / Q'_T$. Es evidente que la función F pertenece a $H^{r,0}(Q'_{t^0,t^1})$ y es terminal en Q'_{t^0,t^1}; en este caso tiene lugar la desigualdad (1).

Cuando la función $f \in H^{2s,s}(Q_T)$, su prolongación F en el cilindro Q'_{t^0,t^1} la definiremos por la ecuación $F = \zeta(t) F_2(x, t)$, en la que $\zeta(t) \in C^\infty(-\infty, +\infty)$, $\zeta(t) = 1$ para $t \in (0, T)$, $\zeta(t) = 0$ para $t > > \frac{T+t^1}{2}$ y para $t < \frac{t^0}{2}$; en cuanto a la función $F_2(x, t)$, ella es igual a $F_1(x, t)$ en Q'_T, igual a $\sum_{i=1}^{s+1} A'_i F_1\left(x, \frac{tT}{it^0}\right)$ en $\{x \in D', t^0 < t < 0\}$ e igual a $\sum_{i=1}^{s+1} A''_i F_1\left(x, T - \frac{t-T}{i} \cdot \frac{T}{t^1 - T}\right)$ en $\{x \in D', T < t < t^1\}$, donde $A'_1, \ldots, A'_{s+1}$ es la solución del sistema algebraico lineal de ecuaciones $\sum_{i=1}^{s+1} A'_i \left(\frac{T}{it^0}\right)^p = 1$, $p = 0, \ldots, s$, mientras que $A''_1, \ldots, A''_{s+1}$ es la solución del sistema $\sum_{i=1}^{s+1} A''_i \left(-\frac{T}{i(t^1 - T)}\right)^p$, $p = 0, \ldots, s$. Es evidente que la función $F \in H^{2s,s}(Q'_{t^0,t^1})$ es terminal en Q'_{t^0,t^1} y tiene lugar la desigualdad (2).

De la propiedad 5, en virtud del lema 1 p. 2, § 3, obtenemos inmediatamente la validez de la afirmación siguiente (véase en el p. 3, § 4 la afirmación correspondiente para el espacio H^k).

6. Si el contorno $\partial D \in C^r$, $r \geqslant 1$, el conjunto $C^\infty(\overline{Q}_T)$ es siempre denso en $H^{r,0}(Q_T)$. Cuando $\partial D \in C^{2s}$, $s \geqslant 1$, el conjunto $C^\infty(\overline{Q}_T)$ es siempre denso en $H^{2s,s}(Q_T)$.

7. Sea $f(x, t) \in H^{1,0}(Q_T)$ y sea S una superficie $(n-1)$-dimensional de clase C^1 perteneciente a $\overline{D}$; en particular, S puede coincidir con el contorno ∂D del dominio D.

Designemos con $\Gamma_{S,T}$ la superficie cilíndrica $\{x \in S, 0 < t < T\}$; la superficie lateral $\Gamma_{\partial D,T} = \{x \in \partial D, \ 0 < t < T\}$ del cilindro Q_T la designaremos con Γ_T.

De acuerdo con la propiedad 6 ($\partial D \in C^1$), existe una sucesión f_k, $k = 1, 2, \ldots$, de funciones de $C^1(\overline{Q}_T)$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty} \| f_k - f \|_{H^{1,0}(Q_T)} = 0$. Ya que las funciones $f_k(x, t)$, $k = 1, \ldots$, siendo funciones de x, pertenecen a $C^1(\overline{D})$ para todo $t \in [0, T]$, tienen lugar, para todo $t \in [0, T]$, las desigualdades

$$\| f_k - f_s \|^2_{L_2(S)} \leqslant C^2 \| f_k - f_s \|^2_{H^1(D)}, \quad k, s = 1, 2, \ldots, \tag{6}$$

en las que C, siendo constante positiva, depende sólo del dominio D y de la superficie S (véase la desigualdad (3) p. 1, § 5). Integrando (6) respecto de $t \in (0, T)$, obtendremos las desigualdades

$$\| f_k - f_s \|_{L_2(\Gamma_{S,T})} \leqslant C \| f_k - f_s \|_{H^{1,0}(Q_T)}, \quad k, s = 1, 2, \ldots$$

Puesto que la sucesión f_k, $k = 1, 2, \ldots$, es fundamental en $H^{1,0}(Q_T)$, de las últimas desigualdades fluye que en la superficie $\Gamma_{S,T}$ una sucesión de valores de estas funciones $f_k|_{(x,t)\in\Gamma_{S,T}}$, $k = 1, 2, \ldots$, es fundamental en $L_2(\Gamma_{S,T})$. Por consiguiente, existe una función $f_{\Gamma_{S,T}} \in L_2(\Gamma_{S,T})$ hacia la cual converge en $L_2(\Gamma_{S,T})$ la sucesión $f_k|_{(x,t)\in\Gamma_{S,T}}$, $k = 1, \ldots$, con la particularidad (lo que se comprueba con facilidad reiterando los razonamientos correspontes del p.1, § 5) de que la función $f_{\Gamma_{S,T}}$ no depende de cómo se elija la sucesión f_k, $k = 1, 2, \ldots$, que aproxima la función f.

Es natural llamar la función $f_{\Gamma_{S,T}}$ *traza de la función* f (de $H^{1,0}(Q_T)$) en la superficie cilíndrica $\Gamma_{S,T}$ y designarla con el símbolo $f|_{\Gamma_{S,T}}$.

Como en el p. 1, § 5, nos convencemos sin dificultad de que

$$\| f \|_{L_2(\Gamma_{S,T})} \leqslant C \| f \|_{H^{1,0}(Q_T)}$$

(aquí, $\| f \|_{L_2(\Gamma_{S,T})} = \| f|_{\Gamma_{S,T}} \|_{L_2(\Gamma_{S,T})}$) donde $C > 0$ no depende de f.

Indiquemos que si $\mathcal{M}$ es un conjunto acotado arbitrario de funciones de $H^{1,0}(Q_T)$, el conjunto $\mathcal{M}'$ de las trazas de estas funciones en $\Gamma_{S,T}$ será, a causa de la última desigualdad, acotado en $L_2(\Gamma_{S,T})$ pero, a diferencia del caso referente al espacio $H^1(Q_T)$, no es compacto.

El concepto de traza introducido permite extender a las funciones de $H^{1,0}(Q_T)$ la fórmula de integración por partes. A saber, para cualesquiera dos funciones f y g de $H^{1,0}(Q_T)$ tiene lugar la fórmula de integración por partes (fórmula de Ostrogradski)

$$\int_{Q_T} f_{x_i} g\,dx\,dt = \int_{\Gamma_T} fgn_i\,dS\,dt - \int_{Q_T} fg_{x_i}\,dx\,dt,$$

donde n_i es la i-ésima coordenada de un vector (unitario) n-dimensional de la normal exterior a la superficie ∂D, $i = 1, 2, \ldots, n$, y las funciones f, g que se encuentran bajo el signo de la integral, extendida por la superficie lateral Γ_T del cilindro Q_T, son trazas de las funciones f y g en Γ_T. La demostración de esta fórmula se obtiene con facilidad (compárese con el p. 2, § 5), aproximando en $H^{1,0}(Q_T)$ las funciones f y g por las funciones de $C^1(\overline{Q}_T)$.

Cuando $f \in H^{r,0}(Q_T)$, $r \geqslant 1$, cualquier derivada de esta función respecto a $x_1, \ldots, x_n$ de orden inferior a r tiene una traza sobre la superficie lateral Γ_T del cilindro Q_T. Cuando $f \in H^{2s,s}(Q_T)$, $s \geqslant 1$, tiene traza en la superficie lateral Γ_T del cilindro Q_T cualquier derivada $\dfrac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n+\beta} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n} \partial t^{\beta}}$, para $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n + 2\beta < 2s$.

§ 8. Ejemplos de operadores en espacios funcionales

1. Operadores integrales. Ecuación integral de Fredholm. Sea Q un dominio acotado del espacio n-dimensional R_n. Examinemos en $Q \times Q$ una función medible $K(x, y)$. Sea la función $f(y)$ tal que para casi todo $x \in Q K(x, y) f(y) \in L_1(Q)$ (por ejemplo, $f = 0$). A toda $f(y)$ de este tipo la pondremos en correspondencia una función

$$g(x) = \int_Q K(x, y) f(y)\,dy. \tag{1}$$

Esta representación puede considerarse como un operador (lineal, evidentemente) que actúa de $L_1(Q)$ en $L_1(Q)$, de $L_2(Q)$ en $L_2(Q)$, de $C(\overline{Q})$ en $C(\overline{Q})$, etc. La función $K(x, y)$ se denomina *núcleo* de este operador. El operador en cuestión puede ser definido, por supuesto, no en todo el espacio, por ejemplo, para un operador que actúa de $C(\overline{Q})$ en $C(\overline{Q})$ el papel de campo de definición lo desempeña un conjunto de aquellas funciones de $C(\overline{Q})$ para las cuales $g(x) \in C(\overline{Q})$. No obstante, es facil ver que si el núcleo $K(x, y) \in C(\overline{Q \times Q})$, el operador está definido siempre (en $L_1(Q)$, en $L_2(Q)$, en $C(\overline{Q})$) y es acotado.

Vamos a considerar el operador con el núcleo $K(x, y) = K_0(x, y) |x - y|^{-\alpha}$, donde $K_0(x, y) \in C(\overline{Q \times Q})$, y $0 \leqslant \alpha < n$, y definido por la fórmula (1), como un operador que actúa de $C(\overline{Q})$ en $C(\overline{Q})$ y como un operador que actúa de $L_2(Q)$ en $L_2(Q)$, designándolo en ambos casos con K:

$$g = Kf. \tag{2}$$

El operador K se llama *operador integral de Fredholm*. De acuerdo con los resultados del p. 12, § 1, cap. II, para toda función $f \in C(\overline{Q})$ la función $g \in C(\overline{Q})$. Esto significa que el operador K, que actúa de $C(\overline{Q})$ en $C(\overline{Q})$, está definido en todo $C(\overline{Q})$.

Puesto que las funciones $\int\limits_Q |K(x, y)| dy$ y $\int\limits_Q |K(x, y)| dx$ son continuas en $\overline{Q}$, ellas son acotadas, es decir,

$$A = \max\left\{\max_{y \in \overline{Q}} \int\limits_Q |K(x, y)| dx, \ \max_{x \in \overline{Q}} \int\limits_Q |K(x, y)| dy\right\} < \infty \tag{3}$$

Como para todo punto $x \in Q$ tiene lugar

$$|g(x)| \leqslant \|f\|_{C(\overline{Q})} \int\limits_Q |K(x, y)| dy \leqslant A \|f\|_{C(\overline{Q})},$$

entonces $\|g\|_{C(\overline{Q})} \leqslant A \|f\|_{C(\overline{Q})}$. Quiere decir, el operador K, que actúa de $C(\overline{Q})$ en $C(\overline{Q})$, es acotado y $\|K\| \leqslant A$.

Sea $f(x) \in L_2(Q)$. Puesto que las funciones $|f(y)|^2 \int\limits_Q |K(x, y)| dx$ y $\int\limits_Q |K(x, y)| dx$ pertenecen a $L_1(Q)$ (la última pertenece incluso a $C(\overline{Q})$), entonces, según el corolario del teorema de Fubini, las funciones $K(x, y)|f(y)|^2$ y $K(x, y)$ pertenecen a $L_1(Q \times Q)$. Por lo tanto, al espacio $L_1(Q \times Q)$ pertenece también la función $K(x, y) f(y)$, ya que $|K(x, y) f(y)| \leqslant \frac{|K(x, y)|}{2} + \frac{|K(x, y)||f(y)|^2}{2}$. En este caso, de acuerdo con el teorema de Fubini, las funciones $g(x) = \int\limits_Q K(x, y) f(y) dy$, $\int\limits_Q |K(x, y)| dy$ y $\int\limits_Q |K(x, y)||f(y)|^2 dy$ pertenecen a $L_1(Q)$. Para casi todo $x \in Q$ tenemos la desigualdad

$$|g(x)|^2 \leqslant \int\limits_Q |K(x, y)| dy \cdot \int\limits_Q |K(x, y)||f(y)|^2 dy \leqslant$$
$$\leqslant A \int\limits_Q |K(x, y)||f(y)|^2 dy,$$

de la cual se deduce que $g(x) \in L_2(Q)$. Integrando esta desigualdad en Q y aprovechando el teorema de Fubini, obtendremos

$$\|g\|^2_{L_2(Q)} \leqslant A \int_Q dx \int_Q |K(x, y)| |f(y)|^2 dy =$$

$$= A \int_Q |f(y)|^2 \left(\int_Q |K(x, y)| dx \right) dy \leqslant A^2 \|f\|^2_{L_2(Q)}.$$

De este modo, el operador K, que actúa de $L_2(Q)$ en $L_2(Q)$, está definido en todo el $L_2(Q)$, es acotado y $\|K\| \leqslant A$.

LEMA 1. *El operador K que actúa de $L_2(Q)$ en $L_2(Q)$ es totalmente continuo. El operador K que actúa de $C(\overline{Q})$ en $C(\overline{Q})$ es totalmente continuo.*

1. Examínemos primero un operador K que actúa de $L_2(Q)$ en $L_2(Q)$. Una función $K_N(x, y)$ definida para cualquier $N > 0$ por la igualdad

$$K_N(x, y) = \begin{cases} K(x, y) & \text{para } |x-y| \geqslant N^{-1} \\ K_0(x, y) N^\alpha & \text{para } |x-y| < N^{-1}, \end{cases}$$

pertenece a $C(\overline{Q \times Q})$. Como para un punto arbitrario $x \in \overline{Q}$ tiene lugar la desigualdad

$$\int_Q |K(x, y) - K_N(x, y)| dy =$$

$$= \int_{Q \cap \{|x-y| < N^{-1}\}} |K_0(x, y)| \left(\frac{1}{|x-y|^\alpha} - N^\alpha \right) dy \leqslant$$

$$\leqslant B \int_{|x-y| < N^{-1}} \frac{dy}{|x-y|^\alpha} = B \int_{|\xi| < N^{-1}} \frac{d\xi}{|\xi|^\alpha} =$$

$$= B\sigma_n \int_0^{N^{-1}} \frac{d\rho}{\rho^{\alpha+1-n}} = \frac{B\sigma_n}{(n-\alpha) N^{n-\alpha}},$$

donde $B = \|K_0\|_{C(\overline{Q \times Q})}$, σ_n es el área de la superficie de una esfera unitaria $(n-1)$-dimensional, entonces respecto a todo $\varepsilon > 0$ se puede indicar tal N que

$$\max_{x \in \overline{Q}} \int_Q |K(x, y) - K_N(x, y)| dy < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Puesto que $K_N(x, y) \in C(\overline{Q \times Q})$, existe un polinomio $P(x, y)$ tal que $|P(x, y) - K_N(x, y)| < \frac{\varepsilon}{2|Q|}$ para todo $(x, y) \in \overline{Q \times Q}$.

Esto significa que

$$\max_{x\in\overline{Q}} \int_Q |K(x, y)-P(x, y)|\,dy \leqslant \max_{x\in\overline{Q}} \int_Q |K(x, y)-K_N(x, y)|\,dy +$$
$$+\max_{x\in\overline{Q}} \int_Q |K_N(x, y)-P(x, y)|\,dy < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon. \qquad (4)$$

De manera análoga se establece que

$$\max_{y\in\overline{Q}} \int_Q |K(x, y)-P(x, y)|\,dx < \varepsilon. \qquad (4')$$

El polinomio $P(x, y)$ y la función $G(x, y)=K(x, y)-P(x, y)=$ $=\frac{K_0(x, y)-P(x, y)|x-y|^{\alpha}}{|x-y|^{\alpha}}$ se pueden considerar como núcleos de los operadores integrales del tipo (2). Designemos estos operadores con P y G, respectivamente. En este caso tendremos la ecuación

$$K=P+G,$$

y, en virtud de (4) y (4'), la acotación

$$\|G\|<\varepsilon.$$

Así pues, el operador K está representado como una suma del operador G cuya norma es tan pequeña como se quiera y del operador P de medida finita (este último transforma $L_2(Q)$ en un conjunto de polinomios cuyo grado no es superior al del polinomio $P(x, y)$). Por eso, en virtud del teorema 4 p. 9, § 3, cap. II, K es totalmente continuo.

2. Examinemos ahora el operador K que actúa de $C(\overline{Q})$ en $C(\overline{Q})$. Ya que K es acotado, cualquier conjunto $\mathscr{M}$, acotado en $C(\overline{Q})$, se transforma por él en un conjunto acotado $\mathscr{M}'$. En vista de los resultados obtenidos en el p. 12, § 1, cap. II, para todo $\varepsilon>0$ existe tal $\delta>0$ que $\int_Q |K(x', y)-K(x'', y)|\,dy<\varepsilon$, siempre que $|x'-$ $-x''|<\delta$. Por ello, para $|x'-x''|<\delta$

$$|g(x')-g(x'')| \leqslant \int_Q |K(x', y)-K(x'', y)|\,|f(y)|\,dy \leqslant \varepsilon \|f\|_{C(\overline{Q})}.$$

Resulta pues, que el conjunto $\mathscr{M}'$ de funciones continuas en $\overline{Q}$ es equiacotado y equicontinuo. Por consiguiente, según el teorema de Arzelá, es compacto. El lema está demostrado.

La ecuación $\varphi=\mu K\varphi+f$, donde μ es un parámetro complejo y K, un operador integral de Fredholm, es decir, una ecuación

$$\varphi(x)=\mu\int_Q K(x, y)\varphi(y)\,dy+f(x), \qquad (5)$$

se llama *ecuación integral de Fredholm* (de segundo género).

Consideremos la ecuación (5) en $L_2(Q)$ ($f \in L_2(Q)$ y busquemos la solución de φ en $L_2(Q)$).

En virtud del lema 1, para la ecuación (5) son válidos los teoremas de Fredholm (pp. 3—7, § 4, cap. II). En particular, si μ no es el número característico del operador K (la cantidad de tales números es a lo sumo un conjunto numerable), existe un operador acotado $(I-\mu K)^{-1}$, es decir, la ecuación (5) tiene la única solución $\varphi \in \in L_2(Q)$, cualquiera que sea el término independiente $f \in L_2(Q)$.

Si el núcleo $K(x, y)$ posee la propiedad de que $K(x, y) = \overline{K(y, x)}$, entonces el operador K que actúa de $L_2(Q)$ en $L_2(Q)$ es *autoconjugado*.

En efecto, según el teorema de Fubini, para cualesquiera φ y ψ de $L_2(Q)$

$$(K\varphi, \psi)_{L_2(Q)} =$$
$$= \int\limits_Q \int\limits_Q K(x, y)\, \varphi(y)\, dy\, \overline{\psi(x)}\, dx = \int\limits_Q \varphi(y) \left(\int\limits_Q K(x, y)\, \overline{\psi(x)}\, dx \right) dy =$$
$$= \int\limits_Q \varphi(y) \left(\int\limits_Q \overline{K(y, x)\, \psi(x)\, dx} \right) dy = (\varphi, K\psi)_{L_2(Q)}.$$

Por esta razón, para el operador K son válidos los resultados demostrados en el § 5, cap. II, para un operador general autoconjugado totalmente continuo. En particular, todos los valores propios y números característicos del operador K son reales y en el espacio $L_2(Q)$ existe una base ortonormal compuesta de valores propios de este operador (corolario 2 del teorema 2, p. 2, § 5, cap. II).

2. Operadores diferenciales. Supongamos que en un dominio n-dimensional Q está definida una función mediable acotada $a_\alpha(x)$ para todo vector de números enteros $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, n$, $|\alpha| \leqslant k$, donde $k \geqslant 1$. Un operador lineal de $L_2(Q)$ en $L_2(Q)$ que le asigna a la función f una función

$$(\mathcal{L}f)(x) = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x)\, D^\alpha f(x) \tag{6}$$

se denomina *operador lineal diferencial* (de $L_2(Q)$ en $L_2(Q)$). Vamos a considerar que el operador $\mathcal{L}$ es del orden k, es decir, por lo menos uno de los coeficientes $a_\alpha(x)$, para $|\alpha| = k$, es distinto de cero (un conjunto en el que $a_\alpha(x) \neq 0$ no es conjunto de medida nula).

El operador $\mathcal{L}$ por supuesto, no está definido en todo el $L_2(Q)$. No obstante, un conjunto de funciones f, para las cuales tiene sentido la expresión (6) ($D^\alpha f$ es una derivada generalizada), contiene $H^k(Q)$. Por ello, $H^k(Q)$ se puede tomar como campo de definición de este operador.

Si todas las funciones $a_\alpha(x)$, $|\alpha| \leqslant k$, son continuas en $\overline{Q}$, la fórmula (6) define también el operador lineal de $C(\overline{Q})$ en $C(\overline{Q})$ (operador lineal diferencial que actúa de $C(\overline{Q})$ en $C(\overline{Q})$). A título de campo de definición del operador $\mathcal{L}$ se puede tomar, en este caso, $C^k(\overline{Q})$.

Como caso particular del operador $\mathcal{L}$, que actúa de $L_2(Q)$ en $L_2(Q)$ (de $C(\overline{Q})$ en $C(\overline{Q})$), puede considerarse el operador D^α, $|\alpha| = k$, que a la función f de $H^k(Q)$ (de $C^k(\overline{Q})$) pone en correspondencia su derivada generalizada (clásica). El operador D^α, que actúa de $L_2(Q)$ en $L_2(Q)$, no es acotado, ya que él transforma una sucesión $f_m(x) = e^{im(x_1+\ldots+x_n)}$, $m = 1, 2, \ldots$, de funciones de $H^k(Q)$, acotada en $L_2(Q)$ ($\|f_m\|_{L_2(Q)} = \sqrt{|Q|}$, $m = 1, 2, \ldots$), en otra sucesión $g_m(x) = (im)^{|\alpha|} e^{im(x_1+\ldots+x_n)}$, $m = 1, 2, \ldots$, no acotada en $L_2(Q)$ ($\|g_m\|_{L_2(Q)} = m^{|\alpha|}\sqrt{|Q|} \to \infty$ cuando $m \to \infty$).

De modo análogo se puede demostrar que también $\mathcal{L}$, $k \geqslant 1$, que actúa de $L_2(Q)$ en $L_2(Q)$, no es acotado, como tampoco son acotados los operadores D^α y $\mathcal{L}$ de $C(\overline{Q})$ en $C(\overline{Q})$.

El operador $\mathcal{L}$, considerado como un operador que actúa de $H^k(Q)$ en $L_2(Q)$, o de $C^k(\overline{Q})$ en $C(\overline{Q})$, será acotado, puesto que para toda $f \in H^k(Q)$ $(C^k(\overline{Q}))$

$$\|\mathcal{L}f\|_{L_2(Q)} \leqslant \mathrm{const}\,\|f\|_{H^k(Q)} \quad (\|\mathcal{L}f\|_{C(\overline{Q})} \leqslant \mathrm{const}\,\|f\|_{C^k(\overline{Q})}).$$

PROBLEMAS DEL CAPITULO III.

1. Una bola $s = \{\|x\| < 1\}$ del espacio de Banach llamaremos *estrictamente convexa*, si para cualesquiera puntos x e y, $x \neq y$, de la esfera unitaria $\|x\| = \|y\| = 1$, y para cualquier $\alpha \in (0, 1)$ el punto $\alpha x + (1-\alpha)y \in S$, es decir, $\|\alpha x + (1-\alpha)y\| < 1$.

¿Será la bola unitaria estrictamente convexa en los espacios $C(\overline{Q})$, $L_1(Q)$, $L_2(Q)$?

2. Sea x un punto de la esfera unitaria en $C(\overline{Q})$ $(L_1(Q))$. Hállese el conjunto de todos los puntos y de la esfera unitaria para los cuales todos los puntos del segmento $\alpha x + (1-\alpha)y$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, pertenezcan a esta esfera.

3. Un conjunto $\dot{C}^k(\overline{Q})$ es una variedad lineal en $C^k(\overline{Q})$. Designemos por $\mathring{C}^k(\overline{Q})$ la adherencia de este conjunto según la norma $\max\limits_{x\in\overline{Q}} \sum\limits_{|\alpha|\leqslant k} |D^\alpha f(x)|$: $\mathring{C}^k(\overline{Q}) = \overline{\dot{C}^k(\overline{Q})}$). ¿De qué funciones consta $\mathring{C}^k(\overline{Q})$?

4. Muéstrese que si $\partial Q \in C^k$, $C^\infty(\overline{Q})$ será siempre denso en $C^k(\overline{Q})$.

Sea B un espacio de Banach y sean $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ subespacios suyos. Suele decirse que B es una suma directa de $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$: $B = \mathcal{M} \oplus \mathcal{N}$, si cualquier elemento f de B se representa unívocamente como la suma $f_1 + f_2$, donde $f_1 \in \mathcal{M}$, y $f_2 \in \mathcal{N}$. Si un espacio de Hilbert $H = \mathcal{M} \oplus \mathcal{N}$, y, al mismo tiempo $\mathcal{M} \perp \mathcal{N}$, entonces $\mathcal{M}$ (y $\mathcal{N}$) se llama complemento ortogonal a $\mathcal{N}$ (respectivamente a $\mathcal{M}$) en H.

5. Represéntese el espacio $C^k([a, b])$ como la suma directa del subespacio $\dot{C}^k([a, b])$ y de algún subespacio $\mathcal{N}$. Hállese la dimensión de $\mathcal{N}$.

6. Un conjunto de funciones de $L_2(Q)$ iguales a cero (casi siempre) en el dominio Q', $Q' \subset Q$, es un subespacio del espacio $L_2(Q)$. Hállese su complemento ortogonal.

7. En el plano $x = (x_1, x_2) = (r \cos \varphi, r \operatorname{sen} \varphi)$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, examinemos la función $f(x) = r^{\alpha}\varphi$. ¿Para qué α la función $f \in H'(Q)$, donde el dominio Q es a) un círculo $\{r < 1\}$, b) $\{r < 1, \varphi \neq 0\}$?

8. Supongamos que la sucesión $f_m(x)$, $m = 1, 2, \ldots$, de funciones de $C^k(\overline{Q})$ es débilmente convergente en $L_2(Q)$ hacia una función f, y la sucesión $D^{\alpha} f_m$, $m = 1, 2, \ldots$, para $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $|\alpha| = k$, es acotada en $L_2(Q)$. Muéstrese que la función f admite la derivada generalizada $D^{\alpha}f$.

9. Supongamos que la sucesión $f_m(x)$, $m = 1, 2, \ldots$, de funciones de $C^1(\overline{Q})$ es débilmente convergente en $L_2(Q)$ y las sucesiones $\frac{\partial f_m}{\partial x_i}$, $i = 1, \ldots, n$, $m = 1, 2, \ldots$, son acotadas en $L_2(Q)$. Muéstrese que la sucesión f_m, $m = 1, 2, \ldots$, converge fuertemente en $L_2(Q)$. Dese un ejemplo de la sucesión que satisfaga las condiciones enunciadas y que sea no compacta en $H^1(Q)$.

10. Muéstrese que si una sucesión $f_m(x)$, $m = 1, 2, \ldots$, de funciones de $\dot{C}^k(\overline{Q})$, $k \geqslant 1$, converge débilmente en $L_2(Q)$ hacia la función f, y para todo $\alpha\ (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $|\alpha| = k$, $\| D^{\alpha} f_m \|_{L_2(Q)} \leqslant \text{const}$, $m = 1, 2, \ldots$, entonces, a) $f \in \dot{H}^k(Q)$, b) la sucesión f_m, $m = 1, 2, \ldots$, en $H^{k-1}(Q)$ converge fuertemente hacia f.

11. Demuéstrese que para toda función $f(x)$ de $H^k(K)$ (de $C^k(\overline{K})$), donde K es un cubo n-dimensional, existe una prolongación terminal $F(x)$ en el dominio más amplio Q, $Q \Supset K$, que pertenece a $H^k(Q)$ ($C^k(\overline{Q})$). En este caso tiene lugar la desigualdad $\| F \|_{H^k(Q)} \leqslant C \| f \|_{H^k(K)}$ en la cual la constante $C > 0$ no depende de f.

12. Sea x^0 un punto del dominio Q de un espacio n-dimensional R_n, $n > 1$. Muéstrese que la adherencia de una variedad lineal de funciones continuamente derivables en $\overline{Q}$, que se reducen a cero en un entorno (para cada función se tiene su propio entorno) del punto x^0, coincide con $H^1(Q)$.

13. Demuéstrese que un conjunto $\widetilde{H}^1(a, b)$ de todas las funciones f de $H^1(a, b)$ para las cuales $f(a) = f(b)$, es un subconjunto del espacio $H^1(a, b)$. Muéstrese que tienen lugar las siguientes incorporaciones $\mathring{H}^1(a, b) \subset \widetilde{H}^1(a, b) \subset \subset H^1(a, b)$. Hállense los complementos ortogonales de $\mathring{H}^1(a, b)$ en $\widetilde{H}^1(a, b)$ y de $\widetilde{H}^1(a, b)$, en $H^1(a, b)$ y constrúyanse bases ortonormales de los espacios $\mathring{H}^1(a, b)$ $\widetilde{H}^1(a, b)$ y $H^1(a, b)$.

Sea la función $f \in L_2(K)$, donde K es un cubo $\{|x_i| < a, i = 1, \ldots, n\}$. De acuerdo con el teorema de Fubini, para casi todo $x_n = \xi \in (-a, a)$ está definida una función $f(x', \xi)$, perteneciente a $L_2(K')$, donde K' es un cubo $(n-1)$-dimensional $\{|x_i| < a, i = 1, \ldots, n-1\}$. Esta función la llamaremos valor de la función f en la sección $K \cap \{x_n = \xi\}$. De modo análogo, para casi todo $x' = \xi' \in K'$ está definida una función $f(\xi', x_n)$ que pertenece a $L_2(-a, a)$. Llamaremos esta función valor de la función f en la sección $K \cap \{x' = \xi'\}$.

Para la función $f \in H^1(K)$ existe una traza $f|_{x_n = \xi}$ de $L_2(K')$, cualesquiera que sea $x_n = \xi \in [-a, a]$.

14. Demuéstrese que si $f \in H^1(K)$, entonces para casi todo $\xi' \in K'$ su valor $f(\xi', x_n)$ en la sección $K \cap \{x' = \xi'\}$ pertenece al espacio $H^1(-a, a)$, para casi todo $\xi \in (-a, a)$ la traza $f|_{x_n = \xi}$ y el valor $f(x', \xi)$ de la función f en la sección $K \cap \{x_n = \xi\}$ pertenecen a $H^1(K')$.

15. Demuéstrese que un conjunto de trazas de todas las funciones de $H^1(Q)$ en la superficie $(n-1)$-dimensional $S \subset \overline{Q}$ no coincide con $L_2(S)$.

16. Demuéstrense las siguientes afirmaciones:

a) si una función $f \in H^1(Q)$, la función $|f|$ también pertenece a $H^1(Q)$,

b) si las funciones $f_1, \ldots, f_N$ pertenecen a $H^1(Q)$, las funciones $\max \times \times f_1, \ldots, f_N)$ y $\min(f_1, \ldots, f_N)$ también pertenecen a $H^1(Q)$.

17. Diremos que una función $f(x)$ pertenece a la clase $C^\alpha(Q)$ para cierto α, $0 < \alpha < 1$, si para todo subdominio Q' estrictamente interior, $Q' \Subset Q$, existe una constante $C = C(Q')$ tal que para todos los puntos x' y x'' de $\overline{Q'}$ tiene lugar la desigualdad $|f(x') - f(x'')| \leqslant C|x' - x''|^\alpha$. Si para cierta constante C, esta desigualdad se cumple en todos los x' y x'' de $\overline{Q}$, diremos que la función $f(x)$ pertenece a la clase $C^\alpha(\overline{Q})$.

Demuéstrese que si $f \in H_{\text{loc}}^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}(Q)$ (Q es un dominio n-dimensional), $f \in C^\alpha(Q)$ para cualquier $\alpha < [n/2]+1-n/2$, y si la función $f \in \mathring{H}^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}(Q)$ o $f \in H^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}(Q)$ y $\partial Q \in C^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}$, entonces $f \in C^\alpha(\overline{Q})$ para cualquier $\alpha < < [n/2]+1-n/2$.

18. Demuéstrese que todo conjunto acotado en $H^{k+1+\left[\frac{n}{2}\right]}(Q)$ (Q es un dominio n-dimensional, $\partial Q \in C^{k+1+\left[\frac{n}{2}\right]}$) es compacto en $C^k(\overline{Q})$.

19. Supongamos que las funciones $k(x)$, $a(x)$, $\rho(x)$ pertenecen a $C(\overline{Q})$, $\sigma(x) \in C(\partial Q)$, $k(x) > 0$, $a(x) \geqslant 0$, $\rho(x) \geqslant 0$ en $\overline{Q}$, $\sigma(x) \geqslant 0$ en ∂Q. Muéstrese que las formas bilineales definidas en $H^1(Q)$

$$W_1(f, g) = \int_Q (k\nabla f\nabla\overline{g} + af\overline{g})\,dx + \left(\int_Q \rho f\,dx\right)\left(\int_Q \rho\overline{g}\,dx\right),$$

para $a + \rho \not\equiv 0$ y

$$W_2(f, g) = \int_Q (k\nabla f\nabla\overline{g} + af\overline{g})\,dx + \left(\int_{\partial Q} \sigma f\,dS\right)\left(\int_{\partial Q} \sigma\overline{g}\,dS\right),$$

si (o) $a \not\equiv 0$ ó $\sigma \not\equiv 0$, definen en $H^1(Q)$ productos escalares equivalentes al producto

$$(f, g)_{H^1(Q)} = \int_Q (\nabla f\nabla\overline{g} + f\overline{g})\,dx.$$

20. Supongamos que una función $k(x) \in C^1([0, 1])$ y $k(x) > 0$ cuando $x > 0$. Denotemos con $H_k(0, 1)$ una completación del conjunto de todas las funciones de $C^1([0, 1])$ que se reducen a cero para $x = 1$ según una norma generada por el producto escalar $\int_0^1 k(x) f'(x)\overline{g}'(x)\,dx$. Demuéstrese que $H_k(0, 1) \subset L_2(0, 1)$ cuando, y sólo cuando, $\lim\limits_{x\to+0} k(x)\cdot x^{-2} > 0$.

21. Muéstrese que en el espacio $\mathring{H}^k(Q)$ los productos escalares $(f, g)' = \int_Q \sum_{|\alpha| \leqslant k} D^\alpha f D^\alpha\overline{g}\,dx$ y $(f, g)'' = \int_Q \sum_{|\alpha|=k} D^\alpha f D^\alpha\overline{g}\,dx$ son equivalentes.

22. Sea $f \in L_2(0, 1)$. Una funcional lineal $l_f(u) = (f, u)_{L_2(Q)}$ es acotada en $\mathring{H}^k(0, 1)$ cualquiera que sea $k \geqslant 0$. Según el teorema de Riesz, existe un elemento (único) $F \in \mathring{H}^k(0, 1)$ tal que para todos los $u \in \mathring{H}^k(0, 1)$ se tiene $l_f(u) = (F, u)_{\mathring{H}^k(0,1)}$. Hállese F y pruébese que $F \in \mathring{H}^k(0, 1) \cap H^{2k}(0, 1)$. (A título de un producto escalar tómense a) producto escalar $(f, g) = \int\limits_0^1 f^{(k)}\bar{g}^{(k)}dx$, b) producto escalar $(f, g) = \int\limits_0^1 (f^{(k)}\bar{g}^{(k)} + f\bar{g})\, dx$, donde $f^{(k)} = \dfrac{d^k f}{dx^k}$).

LITERATURA ADICIONAL PARA EL CAPITULO III

O. V. Bésov, V. P. Iljin, S. M. Nikólski, Representaciones integrales de funciones y teoremas de inmersión, «Naúka», 1975 (en ruso).

S. M. Nikólski, Aproximación de las funciones de varias variables y teoremas de inmersión, «Naúka», 1969 (en ruso).

S. L. Sóbolev, Aplicaciones del análisis funcional en la física matemática, Edición de la universidad estatal de Leningrado, 1950 (en ruso).

§ 1. Soluciones generalizadas de los problemas de contorno. Problemas de valores propios

1. Soluciones clásicas y generalizadas de los problemas de contorno. Sea dada en un dominio n-dimensional Q una ecuación elíptica

$$\mathcal{L}u \equiv \operatorname{div}(k(x)\nabla u) - a(x)u = f(x), \tag{1}$$

cuyos coeficientes son de valores reales y satisfacen las condiciones $a(x) \in C(\overline{Q})$, $k(x) \in C^1(\overline{Q})$, $k(x) \geqslant k_0 > 0$ para todo $x \in Q$.

La función $u(x)$ y el término independiente $f(x)$ de la ecuación, hablando en general, pueden ser de valores complejos.

La función $u(x)$ de $C^2(Q) \cap C(\overline{Q})$ se llama *solución (solución clásica) del primer problema de contorno o del problema de Dirichlet* para la ecuación (1), si en Q ella satisface la ecuación (1) y en el contorno ∂Q, la condición

$$u|_{\partial Q} = \varphi(x), \tag{2}$$

donde $\varphi(x)$ es una función prefijada.

La función $u(x) \in C^2(Q) \cap C^1(\overline{Q})$ se llama *solución (solución clásica) del tercer problema de contorno* para la ecuación (1), si en Q ella satisface la ecuación (1) y en el contorno ∂Q, la condición

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma(x)u\right)\Big|_{\partial Q} = \varphi(x), \tag{3}$$

ponde $\sigma(x)$ es una función prefijada de $C(\partial Q)$ y $\varphi(x)$ es una función prefijada. Convengamos en considerar $\sigma(x) \geqslant 0$.

Si la función $\sigma(x)$ en (3) es idénticamente igual a cero, el tercer problema de contorno se denomina *segundo problema de contorno* o *problema de Neumann*.

Cuando $n = 1$, la ecuación (1) es una ecuación diferencial ordinaria

$$\mathcal{L}u \equiv (k(x)u')' - a(x)u = f(x). \tag{1_1}$$

En este caso el dominio Q representa en sí un intervalo (α, β), y las condiciones límites del primer y tercer problemas de contorno tienen, respectivamente, la forma

$$u|_{x=\alpha} = \varphi_0, \quad u|_{x=\beta} = \varphi_1 \tag{2_1}$$

y

$$(-u'+\sigma_0 U)\,|_{x=\alpha}=\varphi_0,\quad (u'+\sigma_1 u)\,|_{x=\beta}=\varphi_1, \qquad (3_1)$$

donde φ_0, φ_1, $\sigma_0 \geqslant 0$, $\sigma_1 \geqslant 0$ son ciertas constantes dadas.

Sea la función $u(x)$ una solución clásica en el dominio Q del primer problema de contorno (1), (2). Multipliquemos la identidad (1) por una función arbitraria $\overline{v(x)} \in \dot{C}^1(Q)$ e integremos en Q la igualdad obtenida. Valiéndonos de la fórmula de Ostrogradski obtendremos

$$\int_Q (k\nabla u\nabla\bar{v}+au\bar{v})\,dx=-\int_Q f\bar{v}\,dx \qquad (4)$$

(la integral que surge al realizar la operación por el contorno ∂Q es igual a cero, por ser la función v terminal).

Si suponemos, además, que las derivadas parciales de la solución $u_{x_i} \in L_2(Q)$, $i=1, \ldots, n$, es decir, que $u(x) \in H^1(Q)$, y $f(x) \in \in L_2(Q)$, la identidad integral (4) tendrá lugar no sólo para todas las funciones $v(x) \in \dot{C}^1(\overline{Q})$ sino también para todas las $v \in \mathring{H}^1(Q)$. Para cerciorarse de esto tomemos una función arbitraria v de $\mathring{H}^1(Q)$ y una sucesión $v_k(x)$, $k=1, 2, \ldots$, de funciones de $\dot{C}^1(\overline{Q})$ que en la norma de $H^1(Q)$ converge hacia la función v. Para toda función $v_k(x)$ se cumple la igualdad (4). Pasando en esta igualdad al límite para $k \to \infty$, llegamos a la conclusión de que la igualdad (4) es también válida para la función v.

De este modo, si $f \in L_2(Q)$, la solución clásica u del problema (1), (2), perteneciente al espacio $H^1(Q)$, satisface la identidad integral (4) para toda $v \in \mathring{H}^1(Q)$.

Introduzcamos la siguiente definición.

La función $u \in H^1(Q)$ se llama *solución generalizada del problema* (1), (2) para $f \in L_2(Q)$, si ella satisface la identidad (4) para toda $v \in \mathring{H}^1(Q)$ y la condición límite (2). En la condición límite (2) la igualdad se entiende como igualdad de elementos pertenecientes a $L_2(\partial Q)$, siendo $u\,|_{\partial Q}$ una traza de la función u.

Señalemos que el concepto enunciado de una solución generalizada no es en plena medida una generalización del concepto clásico correspondiente, pues para que una solución clásica $u(x)$ sea generalizada, se le deben imponer ciertas condiciones adicionales de carácter «integral», a saber, suponer que $u \in H^1(Q)$ y $\mathcal{L}u \in L_2(Q)$, donde $\mathcal{L}$ es un operador en (1).

Del modo análogo se puede introducir el concepto de la solución generalizada del tercer (segundo) problema de contorno para la ecuación (1). Sea la función $u(x)$ una solución clásica del tercer problema de contorno (1), (3). Supongamos que el segundo miembro

$f(x)$ en la ecuación (1) pertenece a $L_2(Q)$, y la función $\varphi(x)$ en la condición límite (3) pertenece a $L_2(\partial Q)$. Multipliquemos la identidad (1) por una función arbitraria $\overline{v(x)}$ de $H^1(Q)$ e integremos la igualdad obtenida en el dominio Q. Valiéndonos de la fórmula de Ostrogradski obtendremos la identidad integral

$$\int_Q (k\nabla u\nabla\bar{v}+au\bar{v})\,dx+\int_{\partial Q} k\sigma u\bar{v}\,dS=-\int_Q f\bar{v}\,dx+\int_{\partial Q} k\varphi\bar{v}\,dS, \quad (5)$$

la cual es satisfecha por la solución clásica $u(x)$ para todas las $v(x)\in$ $\in H^1(Q)$.

Introduzcamos la siguiente definición.

Una función $u\in H^1(Q)$ se denomina *solución generalizada del tercer (del segundo, si $\sigma(x)\equiv 0$) problema de contorno para la ecuación* (1), siendo $f\in L_2(Q)$, $\varphi\in L_2(\partial Q)$, si para ella se cumple la identidad (5) cualquiera que sea $v\in H^1(Q)$.

Enunciando las definiciones de soluciones generalizadas, suponíamos que las funciones v en (4) y (5) son de valores complejos. No obstante, pueden ser, del mismo modo, consideradas de valores reales. En efecto, si la función u de $H^1(Q)$ satisface, por ejemplo, la identidad (4) para todas las v de valores complejos de $\mathring{H}^1(Q)$, es obvio que satisfacerá la misma identidad para todas las v de valores reales de $\mathring{H}^1(Q)$. Y viceversa, supongamos que la función u de $H^1(Q)$ satisface la identidad (4) para todas las v de valores reales de $\mathring{H}^1(Q)$. En este caso, la identidad (4) es también válida para cualquier $v=$ $=\operatorname{Re} v+i\operatorname{Im} v$ de valores reales del espacio $\mathring{H}^1(Q)$, ya que (4) es válida para las funciones $\operatorname{Re} v$ y $\operatorname{Im} v$, pertenecientes a $\mathring{H}^1(Q)$.

Indiquemos que de hecho ya nos hemos chocado (en el caso bidimensional) con soluciones generalizadas de los problemas de contorno para la ecuación (1), al obtener, en el p. 1, § 3, cap. I, las condiciones de equilibrio para una membrana: las identidades integrales (4) y (5), que figuraban en la definición de las soluciones generalizadas, coinciden con las identidades (4) y (1), p. 1, § 3, cap I.

Las definiciones de las soluciones generalizadas de los problemas de contorno para la ecuación (1) pueden también ser extendidas, por supuesto, al caso unidimensional. La función u del espacio $H^1(\alpha,\beta)$ que satisface las condiciones límites (2_1) (del teorema 3, p. 2, § 6, cap. III, se desprende que $u\in C([\alpha,\beta])$, será la solución generalizada del primer problema de contorno para la ecuación (1_1), si para cualquier $v\in\mathring{H}^1(\alpha,\beta)$ se cumple la igualdad

$$\int_\alpha^\beta (ku'\bar{v}'+au\bar{v})\,dx=-\int_\alpha^\beta f\bar{v}\,dx. \quad (4_1)$$

Una función u de $H^1(\alpha, \beta)$ es la solución generalizada del tercer (segundo) problema de contorno para la ecuación (1_1), si para toda $v \in H^1(\alpha, \beta)$ se cumple la igualdad

$$\int_\alpha^\beta (ku'\bar{v}' + au\bar{v})\,dx + k(\beta)\,\sigma_1 u(\beta)\,\bar{v}(\beta) + k(\alpha)\,\sigma_0 u(\alpha)\bar{v}(\alpha) =$$

$$= -\int_\alpha^\beta f\bar{v}\,dx + k(\beta)\,\varphi_1\bar{v}(\beta) + k(\alpha)\,\varphi_0\bar{v}(\alpha). \qquad (5_1)$$

En este párrafo se estudian las soluciones generalizadas de los problemas de contorno. Puesto que las soluciones generalizadas son elementos del espacio de Hilbert $H^1(Q)$, usaremos ampliamente los resultados generales correspondientes obtenidos en el capítulo segundo.

La investigación de las soluciones clásicas de los problemas de contorno es una tarea mucho más complicada y es natural dividirla en dos problemas más simples: primero construir una solución generalizada y luego, al establecer (admitiendo ciertas suposiciones) su suavidad, mostrar que es una solución clásica. La demostración de la suavidad de las soluciones generalizadas será llevada a cabo en el punto siguiente.

2. Existencia y unicidad de la solución generalizada en el caso más simple. El estudio de las cuestiones relacionadas con la existencia y la unicidad de las soluciones generalizadas de los problemas de contorno es más conveniente empezarlo por el caso en que las condiciones límites son homogéneas (es decir, la función φ es igual a cero). Por definición, la solución generalizada del problema de contorno (1), (2) para $\varphi = 0$ es una función u de $\mathring{H}^1(Q)$, que satisface para toda $v \in \mathring{H}^1(Q)$ la identidad integral (4):

$$\int_Q (k\nabla u\nabla\bar{v} + au\bar{v})\,dx = -\int_Q f\bar{v}\,dx.$$

La solución generalizada del tercer (segundo) problema de contorno (1), (3) para $\varphi = 0$ es una función $u \in H^1(Q)$, que para toda $v \in H^1(Q)$ satisface la identidad integral

$$\int_Q (k\nabla u\nabla\bar{v} + au\bar{v})\,dx + \int_{\partial Q} k\sigma u\bar{v}\,dS = -\int_Q f\bar{v}\,dx. \qquad (6)$$

Sea $a(x) \geqslant 0$ en Q. Entonces, según el corolario del teorema 6, p. 6, § 5, cap. III, en el espacio $\mathring{H}^1(Q)$ se puede introducir un producto escalar que sea equivalente al producto ordinario $\Big((u, v) =$

$$= \int_Q (\nabla u \, \Delta\bar{v} + u\bar{v})\, dx\Big)$$

$$(u, v)_{\mathring{H}^1(Q)} = \int_Q (k\nabla u \nabla\bar{v} + au\bar{v})\, dx. \tag{7}$$

Por lo tanto, a la identidad (4) se le puede dar la forma siguiente

$$(u, v)_{\mathring{H}^1(Q)} = -(f, v)_{L_2(Q)}. \tag{8}$$

Para f fijada de $L_2(Q)$, $(f, v)_{L_2(Q)}$ será una funcional lineal definida en $\mathring{H}^1(Q)$, $v \in \mathring{H}^1(Q)$. Como

$$|(f, v)_{L_2(Q)}| \leqslant \|f\|_{L_2(Q)} \|v\|_{L_2(Q)} \leqslant C \|f\|_{L_2(Q)} \|v\|_{\mathring{H}^1(Q)},$$

donde la constante positiva C no depende de f y v, esta funcional es acotada y su norma no supera a $C \|f\|_{L_2(Q)}$.

De acuerdo con el teorema de Riesz (teorema 1, p. 2, § 3, cap. II), en $\mathring{H}^1(Q)$ existe una función F_1 para la cual $(f, v)_{L_2(Q)} = (F_1, v)_{\mathring{H}^1(Q)}$ cualquiera que sea $v \in \mathring{H}^1(Q)$. Tal función es única y satisface la desigualdad $\|F_1\|_{\mathring{H}^1(Q)} \leqslant C \|f\|_{L_2(Q)}$. Por consiguiente, en $\mathring{H}^1(Q)$ existe una única función $u = F_1$ que satisface la identidad (8).

De esta manera queda demostrado el siguiente teorema.

TEOREMA 1. *Cuando $a(x) \geqslant 0$ en Q, para toda $f \in L_2(Q)$, existe también una sola solución generalizada del problema* (1), (2) *(para $\varphi = 0$). Con ello,*

$$\|u\|_{\mathring{H}^1(Q)} \leqslant C \|f\|_{L_2(Q)}, \tag{9}$$

donde la constante positiva C no depende de f.

Si $a(x) \geqslant 0$ en Q y si por lo menos una de las funciones $a(x)$ o $\sigma(x)$ no es idénticamente nula, entonces, de acuerdo con el corolario del teorema 5, p. 6, § 5, cap. III, en $H^1(Q)$ se puede introducir el producto escalar

$$(u, v)_{H^1(Q)} = \int_Q (k\nabla u \nabla\bar{v} + au\bar{v})\, dx + \int_{\partial Q} k\sigma u\bar{v}\, dS, \tag{10}$$

que sea equivalente al producto ordinario.

Por consiguiente, se puede escribir (6) en la forma

$$(u, v)_{H^1(Q)} = -(f, v)_{L_2(Q)}. \tag{11}$$

Puesto que para $f \in L_2(Q)$ fijada la funcional $(f, v)_{L_2(Q)}$, lineal respecto a $v \in H^1(Q)$, es acotada: $|(f, v)_{L_2(Q)}| \leqslant \|f\|_{L_2(Q)} \|v\|_{L_2(Q)} \leqslant C \|f\|_{L_2(Q)} \|v\|_{H^1(Q)}$, donde la constante $C > 0$ no depende de f ni de v, entonces, según el teorema de Riesz, en $H^1(Q)$ existe una función F_2 para la cual $(f, v)_{L_2(Q)} = (-F_2, v)_{H^1(Q)}$ cualquiera que sea $v \in H^1(Q)$, con la particularidad de que esta función es única y $\|F_2\|_{H^1(Q)} \leqslant C\|f\|_{L_2(Q)}$. Por consiguiente, en $H^1(Q)$ existe la única función $u = F_2$ que satisface la identidad (11).

De esta manera queda demostrado el siguiente teorema.

TEOREMA 2. *Cuando $a(x) \geqslant 0$ en Q y por lo menos una de las funciones $a(x)$ o $\sigma(x)$ no es idénticamente nula, entonces, para toda $f \in L_2(Q)$ también existe una sola solución generalizada del problema (1), (3) (para $\varphi = 0$). Con ello*

$$\|u\|_{H^1(Q)} \leqslant C\|f\|_{L_2(Q)}, \tag{12}$$

donde la constante positiva C no depende de f.

OBSERVACION. Si la función f tiene valores reales, las soluciones examinadas en los teoremas 1 y 2 de los problemas de contorno también tienen valores reales. En efecto, sea $u = \operatorname{Re} u + i \operatorname{Im} u$ una solución generalizada de cualquiera de estos problemas de contorno. Puesto que los coeficientes de la ecuación y de la función f son reales, la función $\operatorname{Re} u$ es también una solución generalizada del mismo problema, lo que se deduce de (4) (o de (6)) (las funciones v en (4) y (6) se pueden considerar como funciones de valores reales). Por eso, de la unicidad de la solución se desprende que $u = \operatorname{Re} u$.

3. Funciones propias y valores propios. Una función $u(x)$, que no es idénticamente nula, se llama *función propia del primer problema de contorno para el operador $\mathcal{L} = \operatorname{div}(k(x)\nabla) - a(x)$*, si existe un número λ tal que la función $u(x)$ sea una solución clásica del problema siguiente:

$$\mathcal{L}u = \lambda u, \quad x \in Q, \tag{13}$$

$$u|_{\partial Q} = 0. \tag{14}$$

El número λ se llama *valor propio* (correspondiente a la función propia $u(x)$).

Es evidente que a cada función propia le corresponde un valor propio único. La correspondencia recíproca no es unívoca. En particular, si $u(x)$ es una función propia, la función $cu(x)$ para cualquier constante $c \neq 0$ es también propia, correspondiente al mismo valor propio. Por esta causa se puede hablar de funciones propias, normadas, por ejemplo, mediante la condición $\|u\|_{L_2(Q)} = 1$.

Sea λ un valor propio y sea $u(x)$ una función propia del primer problema de contorno y sea, además, $u(x) \in \mathring{H}^1(Q)$. Multiplicando (13) por $\overline{v} \in \mathring{H}^1(Q)$ arbitraria e integrando la igualdad obtenida en el dominio Q, llegamos a la identidad integral

$$\int_Q (k\nabla u \nabla \overline{v}) + au\overline{v}\, dx = -\lambda \int_Q u\overline{v}\, dx, \tag{15}$$

a la cual la función u satisface para toda $v \in \mathring{H}^1(Q)$.

Una función $u \in \mathring{H}^1(Q)$ distinta de cero se llama *función generalizada propia del primer problema de contorno para el operador* $\mathcal{L}$, si existe un número λ tal que la función u satisface la identidad integral (15) para toda $v \in \mathring{H}^1(Q)$; el número λ se denomina *valor propio* (correspondiente a la función generalizada propia u)

Vamos a considerar que $\| u \|_{L_2(Q)} = 1$.

Una función $u(x)$ que no es idénticamente nula se llama *función propia del tercer* (*segundo*) *problema de contorno para el operador* $\mathcal{L} = \operatorname{div}(k(x)\nabla) - a(x)$, si existe un número λ (*valor propio* correspondiente a $u(x)$) tal que la función $u(x)$ sea una solución clásica del problema siguiente:

$$\mathcal{L}u = \lambda u, \quad x \in Q,$$
$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma(x) u\right|_{\partial Q} = 0.$$

Es fácil ver que la función propia del tercer (segundo) problema de contorno para toda $v \in H^1(Q)$ satisface la identidad integral

$$\int_Q (k\nabla u \nabla \bar{v} + au\bar{v})\, dx + \int_{\partial Q} k\sigma u\bar{v}\, dS = -\lambda \int_Q u\bar{v}\, dx. \tag{16}$$

Una función $u \in H^1(Q)$ distinta de cero se llama *función generalizada propia del tercer* (*segundo*) *problema de contorno para el operador* $\mathcal{L}$, si existe un número λ (*valor propio* correspondiente a u) tal que para toda $v \in H^1(Q)$ la función u satisface la identidad integral (16).

Vamos a considerar que $\| u \|_{L_2(Q)} = 1$.

En adelante en este párrafo consideraremos sólo funciones generalizadas propias y los valores propios que les corresponden. Nos será cómodo examinar las identidades (15) y (16), que definen las funciones generalizadas propias, como igualdades de los productos escalares en el espacio $L_2(Q)$ y en los espacios $\mathring{H}^1(Q)$ o $H^1(Q)$, respectivamente.

Sea $m = \min\limits_{x \in \bar{Q}} a(x)$ (aquí no suponemos que $a(x) \geqslant 0$). Entonces la función

$$\tilde{a}(x) = a(x) - m + 1 \quad 1 \text{ en } Q.$$

Por eso, el producto escalar (equivalente al ordinario) puede ser dado en $\mathring{H}^1(Q)$ por la igualdad

$$(u, v)_{\mathring{H}^1(Q)} = \int_Q (k\nabla u \nabla \bar{v} + \tilde{a} u\bar{v})\, dx, \tag{17}$$

y en $H^1(Q)$, por la igualdad

$$(u, v)_{H^1(Q)} = \int_Q (k\nabla u \nabla \bar{v} + \tilde{a} u \bar{v})\, dx + \int_{\partial Q} k\sigma u \bar{v}\, dS. \tag{18}$$

Luego, las identidades (15) y (16) se pueden escribir en la forma

$$(u, v)_{\mathring{H}^1(Q)} = (-\lambda - m + 1)(u, v)_{L_2(Q)} \tag{19}$$

y

$$(u, v)_{H^1(Q)} = (-\lambda - m + 1)(u, v)_{L_2(Q)}. \tag{20}$$

Establezcamos ante todo la validez de las siguientes afirmaciones.

LEMA 1. *Existe un operador lineal acotado A que actúa de $L_2(Q)$ en $\mathring{H}^1(Q)$, cuyo campo de definición es $L_2(Q)$, para el cual tiene lugar la igualdad*

$$(u, v)_{L_2(Q)} = (Au, v)_{\mathring{H}^1(Q)}, \tag{21}$$

cualquiera que sea $v \in \mathring{H}^1(Q)$.

El operador A tiene un operador inverso A^{-1}. El operador A, si es considerado como un operador que actúa de $\mathring{H}^1(Q)$ en $\mathring{H}^1(Q)$, es autoconjugado, positivo y totalmente continuo.

LEMA 1'. *Existe un operador lineal acotado A' que actúa de $L_2(Q)$ en $H^1(Q)$, cuyo campo de definición es $L_2(Q)$, para el cual tiene lugar la igualdad*

$$(u, v)_{L_2(Q)} = (A'u, v)_{H^1(Q)}, \tag{21'}$$

cualquiera que sea $v \in H^1(Q)$.

El operador A' tiene un operador inverso A'^{-1}. El operador A', si es considerado como un operador que actúa de $H^1(Q)$ en $H^1(Q)$, es autoconjugado, positivo y totalmente continuo).*

Demostremos el lema 1. La demostración del lema 1' se efectúa de igual manera.

Para toda función (fijada) $u \in L_2(Q)$ lineal respecto a v, $v \in \mathring{H}^1(Q)$, la funcional $l(v) = (u, v)_{L_2(Q)}$ es acotada, puesto que

$$|l(v)| = |u, v|_{L_2(Q)} \leqslant \|u\|_{L_2(Q)} \|v\|_{L_2(Q)} \leqslant C \|u\|_{L_2(Q)} \|v\|_{\mathring{H}^1(Q)}.$$

Por esta razón, según el teorema de Riesz, existe la única función $U \in \mathring{H}^1(Q)$, $\|U\|_{\mathring{H}^1(Q)} = \|l\| \leqslant C \|u\|_{L_2(Q)}$, tal que $l(v) = (U, v)_{\mathring{H}^1(Q)}$ para toda $v \in \mathring{H}^1(Q)$. Esto equivale a que en $L_2(Q)$ está dado un operador A (lineal, evidentemente): $Au = U$, para el cual tiene lugar (21). Como $\|Au\|_{\mathring{H}^1(Q)} \leqslant C \|u\|_{L_2(Q)}$, el opera-

*) El tipo de los operadores A y A' depende, por supuesto, de cómo se definen en $\mathring{H}^1(Q)$ y en $H^1(Q)$, respectivamente, los productos escalares. Aquí se emplean los productos escalares (17) y (18).

dor A que actúa de $L_2(Q)$ en $\mathring{H}^1(Q)$ es acotado. Si para cierta u de $L_2(Q)$ $Au = 0$, entonces, en vista de (21), para toda $v \in \mathring{H}^1(Q) \times \times (u, v)_{L_2(Q)} = 0$, es decir, $u = 0$. Esto significa que el operador A^{-1} existe.

De (21) se deduce que el operador A que actúa de $\mathring{H}^1(Q)$ en $\mathring{H}^1(Q)$ es autoconjugado: $(Au, v)_{\mathring{H}^1(Q)} = (u, v)_{L_2(Q)} = \overline{(v, u)}_{L_2(Q)} = (Av, u)_{\mathring{H}^1(Q)} = (u, Av)_{\mathring{H}^1(Q)}$. De (21) también se desprende que el operador A es positivo.

Mostremos que el operador A que actúa de $\mathring{H}^1(Q)$ en $\mathring{H}^1(Q)$ es totalmente continuo. Elijamos en $\mathring{H}^1(Q)$ un conjunto de funciones arbitrario acotado. En virtud del teorema 3, p. 4, § 5, cap. III, este conjunto es compacto en $L_2(Q)$. Quiere decir, de cualesquiera de sus subconjuntos infinitos se puede extraer una sucesión u_s, $s = 1, 2, \ldots$, fundamental en $L_2(Q)$. Puesto que el operador A que actúa de $L_2(Q)$ en $\mathring{H}^1(Q)$ es acotado y, por lo tanto, continuo, la sucesión Au_s, $s = 1, 2, \ldots$, es fundamental en $\mathring{H}^1(Q)$. El lema está demostrado.

De acuerdo con el lema 1, la identidad (19) se puede escribir en forma de una ecuación operacional en el espacio $\mathring{H}^1(Q)$:

$$-(\lambda + m - 1)\, Au = u, \quad u \in \mathring{H}^1(Q). \tag{22}$$

De acuerdo con el lema 1', la identidad (20) se puede escribir en la forma de una ecuación operacional en el espacio $H^1(Q)$:

$$-(\lambda + m - 1)\, A'u = u, \quad u \in H^1(Q). \tag{22'}$$

Así pues, el número λ es el valor propio del primer (segundo, correspondientemente) problema de contorno para el operador $\mathscr{L}$, y u, es la función propia generalizada que se le asigna a λ, cuando, y sólo cuando, $-(\lambda + m - 1)$ es el número característico del operador autoconjugado totalmente continuo A que actúa de $\mathring{H}^1(Q)$ en $\mathring{H}^1(Q)$ (A' actúa de $H^1(Q)$ en $H^1(Q)$), y u es un elemento que corresponde a este número característico.

Por eso, de los resultados obtenidos en el § 5, cap. II, se infiere que existe a lo sumo un conjunto numerable de valores propios del primer (tercer) problema de contorno; este conjunto no tiene puntos límites finitos, todos los valores propios son reales; a todo valor propio le corresponde un número finito (multiplicidad del valor propio) de funciones propias ortogonales entre sí en $\mathring{H}^1(Q)$ (en $H^1(Q)$); las funciones propias correspondientes a diferentes valores propios son ortogonales en $\mathring{H}^1(Q)$ (en $H^1(Q)$).

Señalemos que para todo valor propio λ del primer (tercer) problema de contorno se puede elegir exactamente k (k es la multiplicidad de λ) funciones propias reales ortogonales a pares en $\mathring{H}^1(Q)$ (en $H^1(Q)$). Sea $u = \operatorname{Re} u + i \operatorname{Im} u$ una función propia, correspondiente al valor propio λ. Puesto que λ y los coeficientes $k(x)$ y $a(x)$ son reales, las funciones $\operatorname{Re} u$ e $\operatorname{Im} u$, como se ve de (15) y (16) (las funciones v en el (15) y (16) pueden considerarse reales) son también funciones propias correspondientes al mismo número λ. En este caso, no es difícil ver que el número máximo de funciones reales propias, ortogonales a pares, es igual a k.

Sea

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s, \ldots \tag{23}$$

una sucesión que contiene todos los valores propios del primer (tercer) problema de contorno para el operador $\mathcal{L}$, con la particularidad de que cada valor propio se repetirá tantas veces como es la multiplicidad del operador. Sea

$$u_1, u_2, \ldots, u_s, \ldots \tag{24}$$

un sistema de funciones propias generalizadas ($\| u_s \|_{L_2(Q)} = 1$) ortogonales entre sí en $\mathring{H}^1(Q)$ (en $\mathring{H}^1(Q)$; cada u_s corresponde al valor propio λ_s:

$$-(\lambda_s + m - 1) A u_s = u_s, \quad s = 1, \ldots, \tag{25}$$

para el primer problema de contorno y

$$-(\lambda_s + m - 1) A' u_s = u_s, \quad s = 1, \ldots, \tag{25'}$$

para el tercer problema de contorno.

Multiplicando de modo escalar (25) ((25′)) en $\mathring{H}^1(Q)$ (en $H^1(Q)$) por u_s, obtendremos, en virtud de (21) ((21′)), las igualdades

$$\| u_s \|^2_{\mathring{H}^1(Q)} = -(\lambda_s + m - 1) \| u_s \|^2_{L_2(Q)} = -(\lambda_s + m - 1), \tag{26}$$

$$\| u_s \|^2_{H^1(Q)} = -(\lambda_s + m - 1) \| u_s \|^2_{L_2(Q)} = -(\lambda_s + m - 1), \tag{26'}$$

las cuales (los productos escalares en $\mathring{H}^1(Q)$ y en $H^1(Q)$ están definidos por las fórmulas (17) y (18)) pueden escribirse en la forma

$$\int_Q k |\nabla u_s|^2 \, dx + \int_Q (a + \lambda_s) |u_s|^2 \, dx = 0 \tag{27}$$

para el primer problema de contorno y

$$\int_Q k |\nabla u_s|^2 \, dx + \int_Q (a + \lambda_s) |u_s|^2 \, dx + \int_{\partial Q} k\sigma |u_s|^2 \, dS, \tag{27'}$$

para el tercer problema de contorno.

De la igualdad (27) se deduce que para todo $s = 1, 2, \ldots$ tenemos

$$\lambda_s < -m = -\min_{x \in \overline{Q}} a(x) \tag{28}$$

De la igualdad (27') se deduce que para todo $s = 1, 2, \ldots$ tenemos

$$\lambda_s \leqslant -m = -\min_{x \in \overline{Q}} a(x), \tag{28'}$$

con la particularidad de que para cualquier $s = 1, \ldots$ tiene lugar una desigualdad rigurosa, si (o) $a(x) \not\equiv \text{const}$, o $\sigma(x) \not\equiv 0$. Si, en cambio, $\sigma(x) \equiv 0$ (segundo problema de contorno) y $a(x) \equiv \text{const}$, $a(x) \equiv m$, entonces entre los valores propios del segundo problema de contorno existe un valor, igual a $-m$, con la función propia igual a $\text{const} = 1/\sqrt{|Q|}$. La multiplicidad de este valor propio es 1, puesto que debido a (27') todas las funciones propias que le corresponden satisfacen la igualdad $\int\limits_Q k|\nabla u|^2\,dx = 0$, es decir, son constantes.

De (26) ((26')) se deduce que el sistema

$$\frac{u_1}{\sqrt{1-m-\lambda_1}}, \ldots, \frac{u_s}{\sqrt{1-m-\lambda_s}}, \ldots \tag{$\widetilde{24}$}$$

es ortonormado en $\mathring{H}^1(Q)$ (en $H^1(Q)$). En vista del corolario 1 del teorema 2, p. 2, § 5, cap. II, el sistema es la base ortonormal en $\mathring{H}^1(Q)$ (en $H^1(Q)$). Y como el espacio $\mathring{H}^1(Q)$ ($H^1(Q)$) es de dimensiones infinitas, el conjunto ($\widetilde{24}$) y, consecuentemente, (23) es infinito. Por ello, $\lambda_s \to -\infty$ cuando $s \to \infty$.

Multipliquemos de modo escalar (25) ((25')) en $\mathring{H}^1(Q)$ (en $H^1(Q)$) por u_j, $j \neq s$. Valiéndonos de (21) ((21')), obtenemos la igualdad $-(\lambda_s + m - 1)(u_s, u_j)_{L_2(Q)} = 0$, es decir, el sistema (24) es ortonormado en $L_2(Q)$. Ya que una variedad lineal tendida en el sistema ($\widetilde{24}$) (y, por lo tanto, en el sistema (24)) es siempre densa en $\mathring{H}^1(Q)$ (en $H^1(Q)$), será también siempre densa en $L_2(Q)$. Por consiguiente, el sistema (24) es la base ortonormal en $L_2(Q)$, es decir cualquier elemento $f \in L_2(Q)$ se desarrolla en una serie de Fourier convergente en $L_2(Q)$

$$f = \sum_{s=1}^{\infty} f_s u_s, \quad f_s = (f, u_s)_{L_2(Q)}, \tag{29}$$

y se verifica la igualdad de Parseval—Steklov

$$\|f\|^2_{L_2(Q)} = \sum_{s=1}^{\infty} |f_s|^2.$$

Sea una función $f \in \mathring{H}^1(Q)$ $(H^1(Q))$. Ella se desarrolla en una serie de Fourier según la base ortonormal $(\widetilde{24})$, convergente en $\mathring{H}^1(Q)$ (en $H^1(Q)$)

$$f = \sum_{s=1}^{\infty} \left(f, \frac{u_s}{\sqrt{1-m-\lambda_s}}\right)_{\mathring{H}^1(Q)} \frac{u_s}{\sqrt{1-m-\lambda_s}} \tag{30}$$

en el caso del primer problema de contorno ($f \in \mathring{H}^1(Q)$) y

$$f = \sum_{s=1}^{\infty} \left(f, \frac{u_s}{\sqrt{1-m-\lambda_s}}\right)_{H^1(Q)} \frac{u_s}{\sqrt{1-m-\lambda_s}}, \tag{30'}$$

en el caso del tercer problema de contorno ($f \in H^1(Q)$). Aquí se verifican las desigualdades de Parseval — Steklov

$$\sum_{s=1}^{\infty} \left| \left(f, \frac{u_s}{\sqrt{1-m-\lambda_s}}\right)_{\mathring{H}^1(Q)} \right|^2 = \|f\|^2_{\mathring{H}^1(Q)}$$

y, correspondientemente,

$$\sum_{s=1}^{\infty} \left| \left(f, \frac{u_s}{\sqrt{1-m-\lambda_s}}\right)_{H^1(Q)} \right|^2 = \|f\|^2_{H^1(Q)}.$$

La serie (30) ((30')) converge, claro está, hacia f también en la norma de $L_2(Q)$. Comparando las series (30) y (29), obtenemos $f_s = (f, u_s)_{L_2(Q)} = \left(f, \frac{u_s}{\sqrt{1-m-\lambda_s}}\right)_{\mathring{H}^1(Q)} \frac{1}{\sqrt{1-m-\lambda_s}}$ $\Big(f_s = \left(f, \frac{u_s}{\sqrt{1-m-\lambda_s}}\right)_{H^1(Q)} \frac{1}{\sqrt{1-m-\lambda_s}}\Big)$. Por eso,

$$\|f\|^2_{\mathring{H}^1(Q)} = \sum_{s=1}^{\infty} \left| \left(f, \frac{u_s}{\sqrt{1-m-\lambda_s}}\right)_{\mathring{H}^1(Q)} \right|^2 = \sum_{s=1}^{\infty} (1-m-\lambda_s)|f_s|^2 =$$

$$= (1-m)\|f\|^2_{L_2(Q)} - \sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s |f_s|^2$$

$$\left(\|f\|^2_{H^1(Q)} = (1-m)\|f\|^2_{L_2(Q)} - \sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s |f_s|^2\right),$$

de donde, en virtud de (28),

$$\sum_{s=1}^{\infty} |\lambda_s| |f_s|^2 \leqslant -\sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s |f_s|^2 + 2|m| \sum_{s=1}^{\infty} |f_s|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \|f\|^2_{\mathring{H}^1(Q)} + (2|m| + |m-1|)\|f\|^2_{L_2(Q)}$$

y, correspondientemente (en virtud de (28′)),

$$\sum_{s=1}^{\infty} |\lambda_s| |f_s|^2 \leqslant \|f\|^2_{H^1(Q)} + (2|m| + |m-1|) \|f\|^2_{L_2(Q)}.$$

Por consiguiente, tiene lugar la desigualdad

$$\sum_{s=1}^{\infty} |\lambda_s| |f_s|^2 \leqslant C \|f\|^2_{\mathring{H}^1(Q)} \tag{31}$$

donde λ_s, $s = 1, 2, \ldots$, son los valores propios del primer problema de contorno, mientras que $f \in \mathring{H}^1(Q)$, y la desigualdad

$$\sum_{s=1}^{\infty} |\lambda_s| |f_s|^2 \leqslant C \|f\|^2_{H^1(Q)} \tag{32}$$

donde λ_s, $s = 1, 2, \ldots$, son los valores propios del tercer problema de contorno, en tanto que $f \in H^1(Q)$. La constante C en (31) y (32) no depende de f. De este modo está demostrado el siguiente teorema.

TEOREMA 3. *Los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ del primer o del tercer (segundo) problema de contorno para el operador $\mathcal{L} = \operatorname{div}(k(x)\nabla) - a(x)$ son reales y $\lambda_s \to -\infty$ cuando $s \to \infty$. Los valores propios del primer y tercer problemas de contorno, para $\sigma \not\equiv 0$, así como del segundo ($\sigma \equiv 0$) problema de contorno para $a(x) \not\equiv \text{const}$ satisfacen la desigualdad $\lambda_s < -\min_{x \in \overline{Q}} a(x)$, cualquiera que sea $s = 1, 2, \ldots$. Los valores propios del segundo problema de contorno, para la función constante $a(x) \equiv m$, satisfacen la desigualdad $\lambda_s \leqslant -m$, $s = 1, 2, \ldots$, con la particularidad de que existe un valor propio de multiplicidad 1, igual a $-m$, con una función propia generalizada $1/\sqrt{|Q|}$. Las funciones propias generalizadas $u_1(x), u_2(x), \ldots$ de los problemas de contorno en cuestión forman en $L_2(Q)$ una base ortonormal, es decir, toda función $f \in L_2(Q)$ se desarrolla en una serie de Fourier (29) convergente en $L_2(Q)$. Para la función $f \in \mathring{H}^1(Q)$ la serie (29) formada según funciones propias generalizadas del primer problema de contorno es convergente en $\mathring{H}^1(Q)$ y tiene lugar la desigualdad (31). Para la función $f \in H^1(Q)$ la serie (29) formada según funciones propias generalizadas del tercer (segundo) problema de contorno es convergente en $H^1(Q)$ y tiene lugar la desigualdad (32).*

4. Propiedades variacionales de los valores propios y de las funciones propias. Puesto que el operador A, que actúa de $\mathring{H}^1(Q)$ en $\mathring{H}^1(Q)$ y está definido por la igualdad (21), es totalmente continuo, autoconjugado y positivo (lema 1), entonces, de acuerdo con el teorema 1, p. 1, § 5, cap. II, su primer número característico (positivo, evidentemente) es

$$\mu_1 = \inf_{f \in \mathring{H}^1(Q)} \frac{\|f\|^2_{\mathring{H}^1(Q)}}{(Af, f)_{\mathring{H}^1(Q)}} = \inf_{f \in \mathring{H}^1(Q)} \frac{\|f\|^2_{\mathring{H}^1(Q)}}{\|f\|^2_{L_2(Q)}}$$

(la norma del elemento f en $\mathring{H}^1(Q)$ está concordada con el producto escalar (17)). Con ello, la funcional $\|f\|^2_{\mathring{H}^1(Q)}/\|f\|^2_{L_2(Q)}$ toma el valor μ_1 cuando $f = u_1$, donde u_1 es el primer elemento propio del operador A. Por esta razón, el primer valor propio del primer problema de contorno para el operador $\mathscr{L}$ es

$$\lambda_1 = -m + 1 - \inf_{f \in \mathring{H}^1(Q)} \frac{\|f\|^2_{\mathring{H}^1(Q)}}{\|f\|^2_{L_2(Q)}} = -\inf_{f \in \mathring{H}^1(Q)} \frac{\int\limits_Q (k|\nabla f|^2 + a|f|^2)\,dx}{\int\limits_Q |f|^2\,dx} \tag{33}$$

y la cota inferior exacta de la funcional

$$\int\limits_Q (k|\nabla f|^2 + a|f|^2)\,dx \Big/ \int\limits_Q |f|^2\,dx$$

en el espacio $\mathring{H}^1(Q)$ se consigue en la primera función propia u_1.

De los resultados del p. 1. § 5, cap. II se desprende que el $(k+1)$-ésimo número característico μ_{k+1} del operador A es igual a $\inf\limits_{\substack{f \in \mathring{H}^1(Q) \\ (f, u_i)_{\mathring{H}^1(Q)} = 0 \\ i = 1, \ldots, k}} \frac{\|f\|^2_{\mathring{H}^1(Q)}}{\|f\|^2_{L_2(Q)}}$. Ya que, de acuerdo con (21), $(f, u_i)_{\mathring{H}^1(Q)} = \mu_i (f, Au_i)_{\mathring{H}^1(Q)} = \mu_i (f, u_i)_{L_2(Q)}$, $i = 1, 2, \ldots$, entonces

$$\mu_{k+1} = \inf_{\substack{f \in \mathring{H}^1(Q) \\ (f, u_i)_{L_2(Q)} = 0 \\ i = 1, \ldots, k}} \frac{\|f\|^2_{\mathring{H}^1(Q)}}{\|f\|^2_{L_2(Q)}}$$

Por eso, el $(k+1)$-ésimo valor propio del primer problema de contorno para el operador $\mathscr{L}$

$$\lambda_{k+1} = -m + 1 - \inf_{\substack{f \in \mathring{H}^1(Q) \\ (f, u_i)_{L_2(Q)} = 0 \\ i = 1, \ldots, k}} \frac{\|f\|^2_{\mathring{H}^1(Q)}}{\|f\|^2_{L_2(Q)}} =$$

$$= -\inf_{\substack{f \in \mathring{H}^1(Q) \\ (f, u_i)_{L_2(Q)} = 0 \\ i = 1, \ldots, k}} \frac{\int\limits_Q (k|\nabla f|^2 + a|f|^2)\,dx}{\int\limits_Q |f|^2\,dx}. \tag{34}$$

La cota inferior exacta de la funcional

$$\int_Q (k|\nabla f|^2 + a|f|^2)\,dx \Big/ \int_Q |f|^2\,dx$$

en el subespacio del espacio $\mathring{H}^1(Q)$ compuesto por todas las funciones ortogonales en el producto escalar de $L_2(Q)$ a las funciones propias $u_1, \ldots, u_k$ de este problema de contorno se consigue en la función propia u_{k+1}.

De modo totalmente análogo, para el tercer (segundo) problema de contorno para el operador $\mathscr{L}$

$$\lambda_1 = -m + 1 - \inf_{f \in H^1(Q)} \frac{\|f\|^2_{H^1(Q)}}{\|f\|^2_{L_2(Q)}} =$$

$$= -\inf_{f \in H^1(Q)} \frac{\int_Q (k|\nabla f|^2 + a|f|^2)\,dx + \int_{\partial Q} k\sigma|f|^2\,dS}{\int_Q |f|^2\,dx}, \qquad (33')$$

$$\lambda_{k+1} = -m + 1 - \inf_{\substack{f \in H^1(Q) \\ (f,\, u_i)_{L_2(Q)} = 0 \\ i=1,\,\ldots,\,k}} \frac{\|f\|^2_{H^1(Q)}}{\|f\|^2_{L_2(Q)}} =$$

$$= -\inf_{\substack{f \in H^1(Q) \\ (f,\, u_i)_{L_2(Q)} = 0 \\ i=1,\,\ldots,\,k}} \frac{\int_Q (k|\nabla f|^2 + a|f|^2)\,dx + \int_{\partial Q} k\sigma|f|^2\,dS}{\int_Q |f|^2\,dx}. \qquad (34')$$

La cota inferior exacta de la funcional

$$\frac{\int_Q (k|\nabla f|^2 + a|f|^2)\,dx + \int_{\partial Q} k\sigma|f|^2\,dS}{\int_Q |f|^2\,dx}$$

en $H^1(Q)$ se consigue en la primera función propia u_1. La cota inferior exacta de esta funcional en el subespacio del espacio $H^1(Q)$ compuesto por todos los elementos, ortogonales en el producto escalar de $L_2(Q)$ a las funciones propias $u_1, \ldots, u_k$ del problema de contorno correspondiente, se alcanza en la $(k+1)$-ésima función propia u_{k+1}.

Las fórmulas (33) y (33') se pueden reunir en una:

$$\lambda_1 = -\inf_{f \in G} \frac{\int_Q (k|\nabla f|^2 + a|f|^2)\,dx + \int_{\partial Q} k\sigma|f|^2\,dS}{\int_Q |f|^2\,dx}, \qquad (33'')$$

con la particularidad de que λ_1 sea el primer valor propio del tercer (segundo, cuando $\sigma = 0$) problema de contorno para el operador $\mathcal{L}$, siempre que $G = H^1(Q)$, y λ_1 es el primer valor propio del primer problema de contorno, siempre que $G = \mathring{H}^1(Q)$ (en el caso en que $f \in \mathring{H}^1(Q)$, $\int\limits_{\partial Q} k\sigma\,|f|^2\,dS = 0$).

Análogamente, se pueden también reunir las fórmulas (34) y (34′):

$$\lambda_{k+1} = -\inf_{\substack{f \in G \\ (f,\,u_i)_{L_2(Q)}=0 \\ i=1,\,\ldots,\,k}} \frac{\int\limits_Q (k\,|\nabla f|^2 + a\,|f|^2)\,dx + \int\limits_{\partial Q} k\sigma\,|f|^2\,dS}{\int\limits_Q |f|^2\,dx}. \qquad (34'')$$

El empleo de las fórmulas (34), (34′) y (34″) suele ser a veces dificultoso porque el $(k+1)$-ésimo valor propio λ_{k+1} se calcula, valiéndose de ellas, partiendo de las funciones propias $u_1, \ldots, u_k$ conocidas de antemano. Más abajo obtendremos una fórmula para λ_{k+1}, privada de esta inconveniencia.

Tomemos arbitrariamente k funciones $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ de $L_2(Q)$ y designemos con $R(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)$ un subespacio del espacio $\mathring{H}^1(Q)$, compuesto de las funciones f, ortogonales en el producto escalar de $L_2(Q)$ a las funciones $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$: $(f, \varphi_s)_{L_2(Q)} = 0$, $s = 1, \ldots, k$. Sea

$$d(\varphi_1, \ldots, \varphi_k) = -m + 1 - \inf_{f \in R(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)} \frac{\|f\|^2_{\mathring{H}^1(Q)}}{\|f\|^2_{L_2(Q)}},$$

y sea d_{k+1} la cota inferior exacta del conjunto numérico $\{d(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)\}$, tomada respecto a toda clase de sistema $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ de funciones de $L_2(Q)$:

$$d_{k+1} = \inf_{\substack{(\varphi_1, \ldots, \varphi_k) \\ \varphi_s \in L_2(Q) \\ s=1,\,\ldots,\,k}} d(\varphi_1, \ldots, \varphi_k).$$

Mostremos que $d_{k+1} = \lambda_{k+1}$, donde λ_{k+1} es el $(k+1)$-ésimo valor propio del primer problema de contorno para el operador $\mathcal{L}$.

Puesto que $d(u_1, \ldots, u_k) = \lambda_{k+1}$ (fórmula (34)), entonces $d_{k+1} \leqslant \lambda_{k+1}$. Establezcamos una desigualdad inversa. Para ello es suficiente, al fijar arbitrariamente la elección del sistema $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$, construir una función f de $R(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)$ tal que para ella se tenga $\|f\|_{L_2(Q)} = 1$ y

$$\|f\|^2_{\mathring{H}^1(Q)} \leqslant -\lambda_{k+1} - m + 1.$$

Buscaremos la función f en la forma

$$f=\sum_{s=1}^{k+1} f_s u_s, \quad f_s=(f, u_s)_{L_2(Q)}.$$

En este caso las condiciones $f \in R(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)$ y $\|f\|_{L_2(Q)}=1$ tomarán la forma

$$(f, \varphi_p)_{L_2(Q)}=\sum_{s=1}^{k+1} f_s(u_s, \varphi_p)_{L_2(Q)}=0, \quad p=1, \ldots, k, \tag{35}$$

$$\|f\|^2_{L_2(Q)}=\sum_{s=1}^{k+1}|f_s|^2=1. \tag{36}$$

Como el sistema lineal (35) respecto al vector $(f_1, \ldots, f_{k+1})$ es un sistema homogéneo de k ecuaciones con $k+1$ incógnitas, siempre tendrá una solución no trivial. La condición de normalización (36) siempre puede ser satisfecha en este caso. Dado que en virtud de (26) y (36)

$$\|f\|^2_{\mathring{H}^1(Q)}=\sum_{s=1}^{k+1}|f_s|^2\|u_s\|^2_{\mathring{H}^1(Q)}=\sum_{s=1}^{k+1}|f_s|^2(-\lambda_s-m+1)\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{s=1}^{k+1}|f_s|^2(-\lambda_{k+1}-m+1)=-\lambda_{k+1}-m+1$$

(recordemos que $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_{k+1}$), la función f es la buscada.

Así pues, el $(k+1)$-ésimo valor propio del primer problema de contorno para el operador $\mathscr{L}$ se prefija por la fórmula

$$\lambda_{k+1}=\inf_{\substack{(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)\\ \varphi_s \in L_2(Q)\\ s=1, \ldots, k}}\left(-m+1-\inf_{\substack{f\in \mathring{H}^1(Q)\\ (f, \varphi_i)_{L_2(Q)}=0\\ i=1, \ldots, k}}\frac{\|f\|^2_{\mathring{H}^1(Q)}}{\|f\|^2_{L_2(Q)}}\right)=$$

$$=-m+1-\sup_{\substack{(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)\\ \varphi_s \in L_2(Q)\\ s=1, \ldots, k}}\inf_{\substack{f\in \mathring{H}^1(Q)\\ (f, \varphi_i)_{L_2(Q)}=0\\ i=1, \ldots, k}}\frac{\|f\|^2_{\mathring{H}^1(Q)}}{\|f\|^2_{L_2(Q)}}=$$

$$=-\sup_{\substack{(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)\\ \varphi_s \in L_2(Q)\\ s=1, \ldots, k}}\inf_{\substack{f\in \mathring{H}^1(Q)\\ (f, \varphi_i)_{L_2(Q)}=0\\ i=1, \ldots, k}}\frac{\int_Q (k|\nabla f|^2+a|f|^2)\,dx}{\int_Q |f|^2\,dx} \tag{37}$$

que expresa la así llamada propiedad *mini-máxima* de valores propios.

De la misma manera se obtiene la fórmula para el $(k+1)$-ésimo valor propio del tercer (segundo) problema de contorno para el operador $\mathcal{L}$

$$\lambda_{k+1} = -m + 1 - \sup_{\substack{(\varphi_1, \ldots, \varphi_k) \\ \varphi_i \in L_2(Q) \\ i=1, \ldots, k}} \inf_{\substack{f \in H^1(Q) \\ (f, \varphi_i)_{L_2(Q)}=0 \\ i=1, \ldots, k}} \frac{\|f\|^2_{H^1(Q)}}{\|f\|^2_{L_2(Q)}} =$$

$$= - \sup_{\substack{(\varphi_1, \ldots, \varphi_k) \\ \varphi_i \in L_2(Q) \\ i=1, \ldots, k}} \inf_{\substack{f \in H^1(Q) \\ (f, \varphi_i)_{L_2(Q)}=0 \\ i=1, \ldots, k}} \frac{\int_Q (k|\nabla f|^2 + a|f|^2)\,dx + \int_Q k\sigma |f|^2\,dS}{\int_Q |f|^2\,dx}. \qquad (37')$$

Las fórmulas (37) y (37') pueden ser reunidas en una:

$$\lambda_{k+1} = - \sup_{\substack{(\varphi_1, \ldots, \varphi_k) \\ \varphi_i \in L_2(Q) \\ i=1, \ldots, k}} \inf_{\substack{f \in G \\ (f, \varphi_i)_{L_2(Q)}=1 \\ i=1, \ldots, k}} \frac{\int_Q (k|\nabla f|^2 + a|f|^2)\,dx + \int_{\partial Q} k\sigma |f|^2\,dS}{\int_Q |f|^2\,dx}, \qquad (37'')$$

con la particularidad de que λ_{k+1} es el $(k+1)$-ésimo valor propio del primer problema de contorno para el operador $\operatorname{div}(k(x)\nabla) - a(x)$, siempre que $G = \mathring{H}^1(Q)$, y λ_{k+1}, el $(k+1)$-ésimo valor propio del tercer (segundo, cuando $\sigma \equiv 0$) problema de contorno, si $G = H^1(Q)$.

La propiedad mini-máxima de valores propios presta la oportunidad de comparar los valores propios de diferentes problemas de contorno.

TEOREMA 4.1. *Sean λ_k^{I}, λ_k^{II} y λ_k^{III} los k-ésimos valores propios del primero, segundo y tercer (para cierto $\sigma \geqslant 0$) problemas de contorno para el operador $\mathcal{L} = \operatorname{div}(k(x)\nabla) - a(x)$. Entonces, $\lambda_k^{\mathrm{I}} \leqslant \lambda_k^{\mathrm{III}} \leqslant \lambda_k^{\mathrm{II}}$ cualquiera que sea $k = 1, 2, \ldots$*

2. *Sea λ_k' el k-ésimo valor propio del primero, segundo o tercer (para cierto $\sigma = \sigma' \geqslant 0$) problemas de contorno para el operador $\mathcal{L}' = \operatorname{div}(k'(x)\nabla) - a'(x)$, y sea λ_k'' el k-ésimo valor propio del primero, segundo o tercer (para cierto $\sigma = \sigma'' \geqslant 0$), respectivamente, de los problemas de contorno para el operador $\mathcal{L}'' = \operatorname{div}(k''(x)\nabla) - a''(x)$. Si $k' \leqslant k''$, $a' \leqslant a''$ en Q y, en el caso del tercer problema de contorno, $\sigma' \leqslant \sigma''$ en ∂Q, entonces $\lambda_k' \geqslant \lambda_k''$ para todo $k = 1, 2, \ldots$*

3. *Sea Q' un subdominio del dominio Q, $Q' \subset Q$, y sean $\lambda_k(Q)$ y $\lambda_k(Q')$ los k-ésimos valores propios del primer problema de contorno para el operador $\mathcal{L} = \operatorname{div}(k(x)\nabla) - a(x)$ en Q y, respectivamente, en Q'. Entonces, $\lambda_k(Q) \geqslant \lambda_k(Q')$ para cualquier $k = 1, 2, \ldots$*

DEMOSTRACIÓN 1. Sea $k > 1$. Puesto que el valor de la funcional, que se encuentra bajo el signo inf en (37''), en el caso del tercer problema de contorno ($\sigma \geqslant 0$), no es menor que su valor para el segundo problema de contorno ($\sigma = 0$), mientras que el conjunto G

en ambos casos es el mismo ($H^1(Q)$, será válida la desigualdad $\lambda_k^{III} \leqslant \lambda_k^{II}$. La desigualdad $\lambda_k^{I} \leqslant \lambda_k^{III}$ también se desprende de (37''), ya que el conjunto G, en el que se toma inf, es más amplio para el tercer problema de contorno que para el primer problema de contorno: $H^1(Q) \supset \mathring{H}^1(Q)$.

La afirmación 1, para $k = 1$, se deduce de (34'').

2. La afirmación 2 se deduce de (37'') (para $k > 1$) y de (34'') (para $k = 1$), puesto que el valor de la funcional bajo el signo inf en el caso del operador $\mathscr{L}''$ no es menor que el valor correspondiente en el caso del operador $\mathscr{L}'$.

3. Puesto que el conjunto $\mathring{H}^1(Q)$ contiene un conjunto $\mathring{\tilde{H}}^1(Q)$ de funciones de $\mathring{H}^1(Q)$ que se reducen a cero en $Q \setminus Q'$, entonces para $k > 1$

$$\lambda_k(Q) = -\sup_{\substack{(\varphi_1, \ldots, \varphi_{k-1}) \\ \varphi_s \in L_2(Q) \\ s=1, \ldots, k-1}} \inf_{\substack{f \in \mathring{H}^1(Q) \\ (f, \varphi_s)_{L_2(Q)}=0 \\ s=1, \ldots, k-1}} T(f) \geqslant$$

$$\geqslant -\sup_{\substack{(\varphi_1, \ldots, \varphi_{k-1}) \\ \varphi_s \in L_2(Q) \\ s=1, \ldots, k-1}} \inf_{\substack{f \in \mathring{\tilde{H}}^1(Q) \\ (f, \varphi_s)_{L_2(Q)}=0 \\ s=1, \ldots, k-1}} T(f) =$$

$$= -\sup_{\substack{(\varphi_1, \ldots, \varphi_{k-1}) \\ \varphi_s \in L_2(Q') \\ s=1, \ldots, k-1}} \inf_{\substack{f \in \mathring{H}^1(Q') \\ (f, \varphi_s)_{L_2(Q')}=0 \\ s=1, \ldots, k-1}} T(f) = \lambda_k(Q'),$$

donde

$$T(f) = \frac{\int_Q (k|\nabla f|^2 + a|f|^2)\,dx}{\int_Q |f|^2\,dx}.$$

Si $k = 1$, entonces

$$\lambda_1(Q) = -\inf_{f \in \mathring{H}^1(Q)} T(f) \geqslant -\inf_{f \in \mathring{\tilde{H}}^1(Q)} T(f) = \lambda_1(Q').$$

El teorema queda demostrado.

5. Comportamiento asintótico de los valores propios del primer problema de contorno Primero examinemos los valores propios del primer problema de contorno para el operador de Laplace Δ (el operador $\mathscr{L} = \operatorname{div}(k\nabla) - a$ para $k \equiv 1$, $a \equiv 0$) en un cubo $K_l = \{0 < x_i < l,\ i = 1, \ldots, n\}$ cuya arista $l > 0$. Una función propia generalizada $u(x)$ del primer problema de contorno para el operador Δ en K_l, que corresponde al valor propio λ, se determina como función de $\mathring{H}^1(K_l)$ que para toda v de $\mathring{H}^1(K_l)$ satisface la identidad

$$\int_{K_l} \nabla u \nabla \bar{v}\, dx = -\lambda \int_{K_l} u\bar{v}\, dx.$$

Es fácil comprobar que la función $u_{m_1, \ldots, m_n}(x) = \left(\frac{2}{l}\right)^{n/2} \prod_{i=1}^{n} \operatorname{sen} \frac{\pi m_i x_i}{l}$ para cualesquiera $m_1 > 0, \ldots, m_n > 0$ enteros es una función propia del problema de contorno en cuestión; el valor propio correspondiente es igual a $-\frac{\pi^2}{l^2}(m_1^2 + \ldots + m_n^2)$. El sistema de funciones $u_{m_1, \ldots, m_n}(x)$ para todo $m_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$, enteros es ortonormal en $L_2(K_l)$. Puesto que toda función de $L_2(K_l)$, ortogonal a todas las $u_{m_1, \ldots, m_n}$, es nula (esta afirmación se demuestra igual que en el p. 4, § 4, cap. III se demostraba la afirmación correspondiente para el sistema de funciones $u_{m_1, \ldots, m_n} = \exp\{i(m_1x_1 + \ldots + m_nx_n)\}$ en el cubo $\{|x_i| < \pi,\ i = 1, \ldots, n)\}$, entonces este sistema es una base ortonormal en $L_2(K_l)$ y, por lo tanto, contiene todas las funciones propias del primer problema de contorno para el operador Δ en K_l.

De este modo, entre el conjunto de todas las funciones propias del problema en cuestión y el conjunto de todos los puntos $(m_1, \ldots, m_n)$ con coordenadas positivas de números enteros y, consecuentemente, el conjunto de todos los cubos $K_{m_1, \ldots, m_n} = \{m_i - 1 \leqslant x_i \leqslant m_i,\ i = 1, \ldots, n\}$ existe una correspondencia biunívoca. Además, el valor propio correspondiente a la función $u_{m_1, \ldots, m_n}(x)$ es igual al cuadrado de la distancia del punto $(m_1, \ldots, m_n)$ al origen de coordenadas multiplicada por $-\pi^2/l^2$. Así pues, la multiplicidad del valor propio λ es igual al número de los puntos con coordenadas de números enteros, dispuestos en la esfera de radio $\sqrt{-\lambda}\, l/\pi$. En particular, el número $-\frac{\pi^2}{l^2} n$ es el primer valor propio; es de multiplicidad 1. A este número corresponde la función propia $u_{1, \ldots, 1}(x) = \left(\frac{2}{l}\right)^{n/2} \operatorname{sen} \frac{\pi x_1}{l} \ldots \operatorname{sen} \frac{\pi x_n}{l}$.

El siguiente valor propio es igual a $-\frac{\pi^2}{l^2}(n+3)$; es de multiplicidad n. A él corresponden las funciones propias $u_{\underbrace{1, \ldots, 1}_{i-1}, 2, 1, \ldots, 1}(x) = \left(\frac{2}{l}\right)^{n/2} \operatorname{sen} \frac{\pi x_1}{l} \ldots \operatorname{sen} \frac{\pi x_{i-1}}{l} \operatorname{sen} \frac{2\pi x_i}{l} \operatorname{sen} \frac{\pi x_{i+1}}{l} \ldots \operatorname{sen} \frac{\pi x_n}{l}$, $i = 1, \ldots, n$.

Designemos con $N(\rho)$ el número de valores propios (tomando en consideración la multiplicidad de éstos) que no superan en valor absoluto a cierto $\rho > 0$. $N(\rho)$ es igual al número de los puntos $(m_1, \ldots, m_n)$ de coordenadas enteras positivas para los cuales $m_1^2+\ldots+m_n^2\leqslant\frac{l^2}{\pi^2}\rho$ o, lo que es lo mismo, es igual al volumen del cuerpo $M_{\sqrt{\rho}\,l/\pi}$, compuesto de todos los cubos $K_{m_1,\ldots,m_n}$ para los cuales $m_1^2+\ldots+m_n^2\leqslant\frac{l^2}{\pi^2}\rho$. Puesto que $M_{\sqrt{\rho}\,l/\pi}\subset S_{\sqrt{\rho}\,l/\pi}=\left\{|x|<\frac{l}{\pi}\sqrt{\rho},\ x_i\geqslant 0,\ i=1,\ldots,n\right\}$, entonces $N(\rho)\leqslant|S_{\sqrt{\rho}\,l/\pi}|=\frac{\sigma_n}{2^n n}\frac{l^n}{\pi^n}\rho^{n/2}$. Como, por otra parte, para $\rho>n\frac{\pi^2}{l^2}$, $M_{\sqrt{\rho}\,l/\pi}\supset S_{\sqrt{\rho}\,l/\pi-\sqrt{n}}$ entonces para $\rho>\frac{n\pi^2}{l^2}$ $N(\rho)\geqslant\frac{\sigma_n}{2^n n}\times$ $\times\left(\frac{l\sqrt{\rho}}{\pi}-\sqrt{n}\right)^n$.

De modo habitual numeremos los valores propios en el orden en que éstos no crecen: $0>\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\ldots$ (con cada valor propio de esta sucesión nos encontramos tantas veces como es su multiplicidad). Tomemos al azar el valor propio λ_s; supongamos que su multiplicidad es igual a p_s, $p_s\geqslant 1$, y sea $\lambda_{s-p_s'},\ldots,\lambda_s,\ldots,\lambda_{s+p_s''}$, para ciertos enteros $p_s'\geqslant 0$, $p_s''\geqslant 0$, $p_s'+p_s''+1=p_s$, todos valores propios iguales a λ_s.

El número p_s es igual al volumen de un cuerpo compuesto de los cubos $K_{m_1,\ldots,m_n}$, cuyos vértices $(m_1,\ldots,m_n)$ están ubicados en la esfera de radio $\frac{l}{\pi}|\lambda_s|^{1/2}$ y centro en el origen de coordenadas. Dado que este cuerpo está contenido en $S_{|\lambda_s|^{1/2}\,l/\pi}\setminus S_{|\lambda_s|^{1/2}\,l/\pi-\sqrt{n}}$, resulta que $p_s\leqslant\frac{\sigma_n}{2^n n}\left[\left(\frac{l}{\pi}|\lambda_s|\right)^{n/2}-\right.$ $\left.-\left(\frac{l}{\pi}|\lambda_s|-\sqrt{n}\right)^{n/2}\right]$.

En particular, teniendo en cuenta que $\lambda_s\to-\infty$ para $s\to\infty$, obtenemos $\lim\limits_{s\to\infty}\frac{p_s}{|\lambda_s|^{n/2}}=0$.

De la definición de la función $N(\rho)$ se deduce que $s+p_s''=$ $=N(|\lambda_s|)$. Por esto, $\frac{\sigma_n}{n2^n}\left(\frac{l|\lambda_s|}{\pi}-\sqrt{n}\right)^{n/2}\leqslant s+p_s''\leqslant\frac{\sigma_n}{n2^n}\left(\frac{l|\lambda_s|}{\pi}\right)^{n/2}$. Y, como $0\leqslant p_s''\leqslant p_s$, existe el límite de la relación $s/|\lambda_s|^{n/2}$ y éste es igual a $\frac{\sigma_n}{2^n n}l^{n/2}\pi^{-n/2}$. Por consiguiente (recordemos que $\ldots\leqslant\lambda_2\leqslant\lambda_1<0$), existen tales constantes C_0 y C_1, $0<C\leqslant C_1$, que para todo $s=1,2,\ldots$

$$-\frac{C_1}{l}s^{2/n}\leqslant\lambda_s\leqslant-\frac{C_0}{l}s^{2/n}. \tag{38}$$

Puesto que los valores propios no dependen de cómo se elige el sistema de coordenadas, las desigualdades (38) para los valores propios del primer problema de contorno para el operador de Laplace tienen también lugar en el caso cuando el cubo K_l se sustituye por cualquier otro cubo de arista l. Es fácil ver que los valores propios del primer problema de contorno en un cubo de arista l para el operador $k_0\Delta - a_0$ (donde $k_0 > 0$ y a_0 son constantes) iguales a $-k_0 \frac{\pi^2}{l^2}(m_1^2 + \ldots + m_n^2) - a_0$, donde $m_1, \ldots, m_n$ son números enteros positivos. Por ello, las desigualdades (38) con ciertas constantes C_0 y C_1 (dependientes de k_0) son también válidas para éstas, cualquiera que sea s a partir de cierta s_0 (dependiente de k_0 y a_0).

Examinemos ahora el caso general.

TEOREMA 5. *Sean λ_s, $s = 1, 2, \ldots$, los valores propios del primer problema de contorno para el operador $\mathcal{L} = \operatorname{div}(k(x)\nabla) - a(x)$ en el dominio Q. Existen las constantes C_0 y C_1, $0 < C_0 \leqslant C_1$, y el número s_0 tales que para todo $s \geqslant s_0$ tienen lugar las desigualdades*

$$-C_1 s^{2/n} \leqslant \lambda_s \leqslant -C_0 s^{2/n}. \tag{39}$$

Sean $\overline{\lambda}_s$ y $\underline{\lambda}_s$ los valores propios del primer problema de contorno en Q para los operadores $\overline{\mathcal{L}} = \operatorname{div}(\overline{k}\nabla) - \underline{a} = \overline{k}\Delta - \underline{a}$ y $\underline{\mathcal{L}} = \underline{k}\Delta - \overline{a}$, respectivamente, donde $\overline{k} = \max\limits_{x\in\overline{Q}} k(x)$, $\underline{k} = \min\limits_{x\in\overline{Q}} k(x)$, $\overline{a} = \max\limits_{x\in\overline{Q}} a(x)$, $\underline{a} = \min\limits_{x\in\overline{Q}} a(x)$. En este caso, en virtud de la afirmación 2 del teorema 4, para todo $s = 1, 2, \ldots$ tienen lugar las desigualdades $\underline{\lambda}_s \leqslant \lambda_s \leqslant \overline{\lambda}_s$.

Designemos por K' y K'' tales cubos que $K' \subset Q \subset K''$, y por $\overline{\lambda}_s'$ y $\underline{\lambda}_s''$ los valores propios del primer problema de contorno para el operator $\overline{\mathcal{L}}$ en K' y el operador $\underline{\mathcal{L}}$ en K'', respectivamente. De acuerdo con la afirmación 3 del teorema 4, para todo s tenemos $\overline{\lambda}_s' \leqslant \overline{\lambda}_s$ y $\underline{\lambda}_s'' \geqslant \underline{\lambda}_s$. La afirmación del teorema se deduce ahora de que, a partir de cierto $s = s_0$, para $\overline{\lambda}_s'$ y $\underline{\lambda}_s''$ son válidas las desigualdades (39).

6. Resolución de los problemas de contorno en el caso de condiciones límites homogéneas. En el punto 2 estudiamos la cuestión de la existencia y unicidad de las soluciones generalizadas del primer y tercer (segundo) problemas de contorno para la ecuación (1) suponiendo que en Q $a(x) \geqslant 0$.

Examinemos ahora un caso general.

Sea $m = \min\limits_{x\in\overline{Q}} a(x)$. Escribamos las indentidades (4) y (6) de la forma que sigue:

$$(u, v)_{\overset{\circ}{H}{}^1(Q)} + (m-1)(u, v)_{L_2(Q)} = -(f, v)_{L_2(Q)}, \tag{4'}$$

$$(u, v)_{H^1(Q)} + (m-1)(u, v)_{L_2(Q)} = -(f, v)_{L_2(Q)}, \tag{6'}$$

donde los productos escalares en $\mathring{H}^1(Q)$ y en $H^1(Q)$ están definidos mediante las desigualdades (17) y (18). Según el lema 1 p. 3, la identidad (4') es equivalente en el espacio $\mathring{H}^1(Q)$ a la ecuación operacional

$$u + (m-1)\,Au = -Af, \tag{40}$$

mientras que la identidad (6') es equivalente, en virtud del lema 1', a la ecuación operacional

$$u + (m-1)\,A'u = -A'f \tag{40'}$$

en el espacio $H^1(Q)$ (recordemos que $Af \in \mathring{H}^1(Q)$, $A'f \in H^1(Q)$). El operador A, como un operador que actúa de $\mathring{H}^1(Q)$ en $\mathring{H}^1(Q)$ (A', de $H^1(Q)$ en $H^1(Q)$), es totalmente continuo. Por eso, para estudiar la ecuación (40) ((40')) podemos aprovechar los teoremas de Fredholm (teoremas 1—4, pp. 3—7, § 4, cap. II).

1) Si $-m+1$ no es un número característico del operador A (A'), entonces, en virtud del primer teorema de Fredholm, la ecuación (40) ((40')) es unívocamente soluble para toda $f \in L_2(Q)$. En este caso tiene lugar la desigualdad $\|u\|_{\mathring{H}^1(Q)} \leqslant C_1 \|Af\|_{\mathring{H}^1(Q)} \leqslant C\|f\|_{L_2(Q)} \times$ $\times$ ($\|u\|_{H^1(Q)} \leqslant C\|f\|)_{L_2(Q)}$ con la constante $C > 0$ que no depende de f. Puesto que $-m+1$ es el número característico del operador A (A') sólo en aquel único caso cuando el cero es un valor propio del primer (tercer) problema de contorno para el operador $\mathscr{L}$, entonces podemos considerar establecida la siguiente afirmación.

TEOREMA 6. *Para toda f de $L_2(Q)$ existe la única solución generalizada $u(x)$ de cada uno de los problemas de contorno* (1), (2) *y* (1), (3), *siendo homogéneas las condiciones límites* ($\varphi = 0$), *si el cero no es valor propio del correspondiente problema de contorno para el operador $\mathscr{L}$. En este caso se verifica la desigualdad*

$$\|u\|_{H^1(Q)} \leqslant C\|f\|_{L_2(Q)},$$

en la que la constante $C > 0$ no depende de f.

2) Si $-m+1$ es un número característico del operador A (A') (en este caso, naturalmente, $m \neq 1$), hagamos uso del tercer teorema de Fredholm. Para que en estas circunstancias las ecuaciones (40) ((40')) sean solubles, es necesario y suficiente que para todas las funciones propias u_p del operador A (A'), correspondientes al número característico $-m+1$, se cumplan las igualdades $(Af, u_p)_{\mathring{H}^1(Q)} =$ $= 0$ ($(A'f, u_p)_{H^1(Q)} = 0$). En este caso existe la única solución u de la ecuación (40) ((40')) que sea ortogonal en $\mathring{H}^1(Q)$ (en $H^1(Q)$) a todas las funciones u_p, y para esta solución tiene lugar la desigualdad $\|u\|_{\mathring{H}^1(Q)} \leqslant C\|f\|_{L_2(Q)}$ ($\|u\|_{H^1(Q)} \leqslant C\|f\|_{L_2(Q)}$) con la constante $C > 0$ que no depende de f. Cualquier otra solución de la ecua-

ción (40) ((40')) se representa como la suma de la solución u y cierta combinación lineal de las funciones u_p.

De la definición de los operadores A y A' ((21) y, respectivamente, (21')) se infiere que la ortogonalidad de las funciones Af $(A'f)$ y u_p en $\mathring{H}^1(Q)$ (en $H^1(Q)$) es equivalente a la ortogonalidad de f y u_p en el espacio $L_2(Q)$. Además, la ortogonalidad en $\mathring{H}^1(Q)$ (en $H^1(Q)$) de la solución u y de la ecuación (40) ((40')) a la función propia u_p es equivalente a la ortogonalidad de éstas en $L_2(Q)$, puesto que, en virtud de (21) ((21'))

$$(u, u_p)_{\mathring{H}^1(Q)} = (1-m)(Au, u_p)_{\mathring{H}^1(Q)} - (Af, u_p)_{\mathring{H}^1(Q)} =$$
$$= (1-m)(Au, u_p)_{\mathring{H}^1(Q)} = (1-m)(u, u_p)_{L_2(Q)}$$
$$((u, u_p)_{H^1(Q)} = (1-m)(u, u_p)_{L_2(Q)}).$$

Así pues, hemos demostrado el siguiente teorema

TEOREMA 7. *Si el cero es el valor propio del primer o tercer (segundo) problema de contorno para el operador $\mathcal{L}$, entonces, para que exista una solución generalizada del problema* (1), (2) *o del* (1), (3), *siendo homogéneas las condiciones límites* ($\varphi = 0$), *es necesario y suficiente que se cumplan los siguientes requisitos:* $(f, u_p)_{L_2(Q)} = 0$ *para todas las funciones propias generalizadas* u_p *del problema correspondiente que respondan al valor propio nulo. Los problemas* (1), (2) *y* (1), (3) *admiten la única solución* u *(cuando* $\varphi = 0$*) que es ortogonal a todas estas funciones propias:* $(u, u_p)_{L_2(Q)} = 0$. *Esta solución satisface la desigualdad*

$$\|u\|_{H^1(Q)} \leqslant C \|f\|_{L_2(Q)}$$

con la constante C *que no depende de* f. *Cualquier otra solución se representa como la suma de esta solución y cierta combinación lineal de las funciones* u_p.

Del teorema 3 se desprende que cuando $a \equiv 0$ el cero es el valor propio del segundo problema de contorno ($\sigma \equiv 0$) para el operador $\mathcal{L}$; la única función propia correspondiente es igual a $1/\sqrt{|Q|}$. Por esta razón del teorema 7, en particular, se deduce

TEOREMA 8. *Para que exista una solución generalizada del problema*

$$\operatorname{div}(k(x)\nabla u) = f, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial Q} = 0,$$

es necesario y suficiente que

$$\int_Q f\,dx = 0.$$

En esta suposición existe la única solución generalizada u, *que satisface la condición* $\int_Q u\,dx = 0$, *y para esta solución tiene lugar la des-*

igualdad

$$\|u\|_{H^1(Q)} \leqslant C \|f\|_{L_2(Q)}$$

con la constante $C > 0$ que no depende de f. Cualquier otra solución generalizada $\tilde{u}$ de este problema se representa en la forma $\tilde{u} = u + c_1$, donde c_1 es una constante.

OBSERVACIÓN. Si f tiene valores reales, también tendrán valores reales las funciones que se mencionan en el teorema 6. Esta afirmación se demuestra lo mismo que la afirmación correspondiente en la observación citada a fines del p. 2. Las soluciones que tratamos en los teoremas 7 y 8 también pueden considerarse de valores reales, siempre que, por supuesto, todas las funciones propias correspondientes tengan valores reales y nos limitemos a hacer uso de sus combinaciones lineales con coeficientes reales.

7. Primer problema de contorno para la ecuación elíptica general. Los resultados obenidos en los puntos anteriores se extienden sin dificultad a las ecuaciones elípticas más generales. A título de ejemplo examinemos el siguiente problema de contorno:

$$\mathcal{L}u = \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x)\, u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, u_{x_i} + a(x)\, u = f(x), \quad x \in Q, \tag{41}$$

$$u|_{\partial Q} = 0, \tag{42}$$

donde los coeficientes reales $a_{ij}(x) \in C^1(\overline{Q})$, $a_i(x) \in C^1(\overline{Q})$, $a(x) \in C(\overline{Q})$, $i, j = 1, \ldots, n$; la matriz $\|a_{ij}(x)\|$ la consideramos simétrica y positiva (lo que es testimonio de que (41) es una ecuación elíptica), es decir, la matriz con cierta constante $\gamma > 0$ satisface la desigualdad

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, \xi_i \xi_j \geqslant \gamma \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \tag{43}$$

cualesquiera que sean el vector real $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ y el punto $x \in \overline{Q}$.

La solución clásica $u(x)$ del problema (41), (42) se halla de la manera habitual: es una función de $C^2(Q) \cap C(\overline{Q})$ que satisface (41) y (42). Valiéndonos de la fórmula de Ostrogradski, podemos convencernos con facilidad de que si $f \in L_2(Q)$, la solución clásica del problema (41), (42), perteneciente para toda $v \in \dot{H}^1(Q)$ a $\dot{H}^1(Q)$, satisface la identidad integral

$$\int_Q \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i} \bar{v}_{x_j}\, dx + \\ + \int_Q u \left[\sum_{i=1}^{n} a_i \bar{v}_{x_i} + \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ix_i} - a \right) \bar{v} \right] dx = - \int_Q f \bar{v}\, dx. \tag{44}$$

Una función u de $\mathring{H}^1(Q)$ se llama solución generalizada del problema (41), (42), si para toda $v \in \mathring{H}^1(Q)$ ella satisface la identidad integral (44), teniendo en cuenta que $f \in L_2(Q)$.

De acuerdo con el teorema 6, p. 6, § 5, cap. III, en el espacio $\mathring{H}^1(Q)$ se puede introducir un producto escalar que sea equivalente al producto ordinario

$$(u, v)_{\mathring{H}^1(Q)} = \int\limits_Q \sum_{i,\, j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i} \overline{v}_{x_j}\, dx.$$

Con este motivo la identidad (44) se puede escribir en la forma

$$(u, v)_{\mathring{H}^1(Q)} + \Big(u,\ \sum_{i=1}^{n} a_i v_{x_i} + \Big(\sum_{i=1}^{n} a_{ix_i} - a\Big) v\Big)_{L_2(Q)} = -(f, v)_{L_2(Q)}. \quad (45)$$

LEMA 2. 1. *Para cualesquiera funciones $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_n(x)$, continuas en $\overline{Q}$, existe un operador A lineal acotado (que actúa de $L_2(Q)$ en $\mathring{H}^1(Q)$ y está definido por todo $L_2(Q)$) tal que para toda $v \in \mathring{H}^1(Q)$ tenga lugar la igualdad*

$$\Big(u,\ \sum_{i=1}^{n} a_i v_{x_i} + a_0 v\Big)_{L_2(Q)} = (Au, v)_{\mathring{H}^1(Q)}.$$

2. *El operador A, si se considera como un operador que actúa de $\mathring{H}^1(Q)$, es totalmente continuo.*

Puesto que la funcional lineal $l(v) = \big(u,\ \sum_{i=1}^{n} a_i v_{x_i} + a_0 v\big)_{L_2(Q)}$, definida en $\mathring{H}^1(Q)$ $(v \in \mathring{H}^1(Q))$ es acotada, siendo fijada $u \in L_2(Q)$:

$$|l(v)| \leqslant \|u\|_{L_2(Q)} \Big\|\sum_{i=1}^{n} a_i v_{x_i} + a_0 v\Big\|_{L_2(Q)} \leqslant C \|u\|_{L_2(Q)} \|v\|_{\mathring{H}^1(Q)},$$

donde la constante $C > 0$ sólo depende de $\|a_i\|_{C(\overline{Q})}$, $i = 0, 1, \ldots, n$, entonces, según el teorema de Riesz, existe la única función $U \in \mathring{H}^1(Q)$ para la cual $l(v) = (U, v)_{\mathring{H}^1(Q)}$ cualquiera que sea $v \in \mathring{H}^1(Q)$, con la particularidad de que $\|U\|_{\mathring{H}^1(Q)} = \|l\| \leqslant C \|u\|_{L_2(Q)}$. Esto significa que en $L_2(Q)$ está definido el operador A (lineal, evidentemente) que transforma $L_2(Q)$ en $\mathring{H}^1(Q)$: $Au = U$. Este operador es acotado, $\| A \| \leqslant C$, y para cualesquiera $u \in L_2(Q)$ y $v \in$ $\in \overset{\circ}{H}{}^1(Q)$ tiene lugar la igualdad

$$\left(u, \sum_{i=1}^{n} a_i v_{x_i} + a_0 v\right)_{L_2(Q)} = (Au, v)_{\overset{\circ}{H}{}^1(Q)}$$

Mostremos que el operador A, si se considera como un operador que actúa de $\overset{\circ}{H}{}^1(Q)$ en $\overset{\circ}{H}{}^1(Q)$, es totalmente continuo. Tomemos en $\overset{\circ}{H}{}^1(Q)$ un conjunto acotado arbitrario. Conforme al teorema 3, p. 4, § 5, cap. III, este conjunto es compacto en $L_2(Q)$. Por lo tanto, de cualquier sucesión infinita de sus elementos se puede extraer una subsucesión que sea fundamental en $L_2(Q)$. Ya que el operador A, que actúa de $L_2(Q)$ en $\overset{\circ}{H}{}^1(Q)$, es acotado (y, consecuentemente, continuo), él transformará esta subsucesión en una sucesión fundamental en $\overset{\circ}{H}{}^1(Q)$. Por consiguiente, el operador A, que actúa de $\overset{\circ}{H}{}^1(Q)$ en $\overset{\circ}{H}{}^1(Q)$, es totalmente continuo. El lema queda demostrado.

Puesto que la funcional lineal $(f, v)_{L_2(Q)}$, definida en $\overset{\circ}{H}{}^1(Q)$ $(v \in H^1(\overset{\circ}{Q}))$, es acotada: $|(f, v)_{L_2(Q)}| \leqslant C \| f \|_{L_2(Q)} \| v \|_{\overset{\circ}{H}{}^1(Q)}$, entonces, según el teorema de Riesz, existe el único elemento $F \in \overset{\circ}{H}{}^1(Q)$ para el cual $(f, v)_{L_2(Q)} = (F, v)_{\overset{\circ}{H}{}^1(Q)}$ cualquiera que sea $v \in \overset{\circ}{H}{}^1(Q)$, con la particularidad de que $\| F \|_{\overset{\circ}{H}{}^1(Q)} \leqslant C \| f \|_{L_2(Q)}$.

Por eso, valiéndonos del lema 2 (suponemos que $a_0 = = \sum_{i=1}^{n} a_{ix_i} - a$), la identidad integral (44), que define la solución general, puede ser escrita en forma de una igualdad operacional en el espacio $\overset{\circ}{H}{}^1(Q)$:

$$u + Au = F, \quad u \in \overset{\circ}{H}{}^1(Q). \tag{46}$$

LEMA 3. *Siendo* $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} a_{ix_i} - a \geqslant 0$ *en* Q, *la ecuación homogénea* (46) *admite sólo una solución nula.*

Sea u una solución de la ecuación $u + Au = 0$. Multiplicando esta ecuación de modo escalar en $\overset{\circ}{H}{}^1(Q)$ por u, obtenemos $\| u \|^2_{\overset{\circ}{H}{}^1(Q)} + (Au, u)_{\overset{\circ}{H}{}^1(Q)} = 0$. De aquí se deduce que $\| u \|^2_{\overset{\circ}{H}{}^1(Q)} + + \operatorname{Re}(Au, u)_{\overset{\circ}{H}{}^1} = 0$.

Puesto que $\operatorname{Re} a_i u_{x_i} \bar{u} = \frac{1}{2}(a_i |u|^2)_{x_i} - \frac{a_{ix_i}}{2} |u|^2$ y $u|_{\partial Q} = 0$, resulta:

$$\operatorname{Re}(Au,\ u)_{\overset{\circ}{H}{}^1(Q)} = \operatorname{Re} \int\limits_Q \Big(\sum_{i=1}^n a_i u_{x_i} \bar{u} + \Big(\sum_{i=1}^n a_{ix_i} - a \Big) |u|^2 \Big) dx =$$

$$= \int\limits_Q \Big(\sum_{i=1}^n \frac{1}{2} (a_i |u|^2)_{x_i} + \Big(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_{ix_i} - a \Big) |u|^2 \Big) dx =$$

$$= \int\limits_Q \Big(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_{ix_i} - a \Big) |u|^2 dx \geqslant 0.$$

Por ello, $\|u\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^1(Q)} \leqslant 0$, es decir, $u = 0$

Del lema 3 y del primer teorema de Fredholm se deduce

TEOREMA 9. *Si* $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_{ix_i} - a \geqslant 0$ *en* Q, *la solución generalizada del problema* (41), (42) *existe y es única para cualquier función* $f \in L_2(Q)$.

8. **Soluciones generalizadas de los problemas de contorno con condiciones límites no homogéneas.** Primero examinemos el problema (1), (2). Recordemos que se llama solución generalizada de este problema a una función u de $H^1(Q)$ que satisface la identidad integral (4) y cuya traza en el contorno ∂Q es igual a la función límite φ.

De la definición de la solución generalizada se deduce una condición natural para la función límite φ. Se debe exigir que ésta pueda ser prolongada en el dominio Q mediante una función del espacio $H^1(Q)$. En lo sucesivo vamos siempre a suponer que esta condición se cumple. En el caso contrario la solución generalizada del problema (1), (2) no puede existir. Del teorema sobre las trazas de funciones de $H^1(Q)$ se infiere que φ debe pertenecer al espacio $L_2(\partial Q)$. Pero esto no es suficiente para que φ pueda ser prolongada en Q mediante una función de $H^1(Q)$; más aun, para ello es incluso insuficiente la continuidad de esta función. A fines del presente punto volveremos a considerar otra vez esta cuestión y obtendremos la condición necesaria y suficiente de esta prolongación para el caso de una circunferencia.

Señalemos que cuando $\varphi \in C^1(\partial Q)$, la prolongación citada existe. Del teorema 2, p. 2, § 4, cap. III, proviene la existencia de la función $\Phi(x)$ de $C^1(\overline{Q})$ y, con mayor razón, de $H^1(Q)$ para la cual $\Phi|_{\partial Q} = \varphi$, con la particularidad de que tiene lugar la desigualdad $\|\Phi\|_{H^1(Q)} \leqslant C_1 \|\varphi\|_{C^1(\partial Q)}$, donde la constante $C_1 > 0$ no depende de φ.

Así pues, sea que existe la función $\Phi \in H^1(Q)$ para la cual $\Phi|_{\partial Q} = \varphi$. Empleando la sustitución $u - \Phi = w$, el problema de la búsqueda de la solución generalizada u se reduce al de la búsqueda de una función $w \in \mathring{H}^1(Q)$ que para toda $v \in \mathring{H}^1(Q)$ satisface la identidad integral

$$\int_Q (k\nabla w\nabla\bar{v} + aw\bar{v})\,dx = -\int_Q (k\nabla\Phi\nabla\bar{v} + a\Phi\bar{v} + f\bar{v})\,dx. \tag{4'}$$

Indiquemos que si $\Phi \in H^2(Q)$ (cuando $\partial Q \in C^2$, para ello es suficiente que $\varphi \in C^2(\partial Q)$), la identidad (4') se puede escribir en la forma

$$\int_Q (k\nabla w\nabla\bar{v} + aw\bar{v})\,dx = -\int_Q \tilde{f}\bar{v}\,dx,$$

donde $\tilde{f} = f - \operatorname{div}(k\nabla\Phi) + a\Phi$, es decir, el problema que se considera está reducido al problema estudiado en los pp 2 y 4.

Igual que en el p. 2, nos limitemos al caso en que $a(x) \geqslant 0$ en Q. Introduciendo en $\mathring{H}^1(Q)$ un producto escalar expresado por la fórmula (7), escribamos (4') en la forma

$$(w, v)_{\mathring{H}^1(Q)} = l(v),$$

donde $l(v) = -\int_Q (k\nabla\Phi\nabla\bar{v} + a\Phi\bar{v} + f\bar{v})\,dx$ es una funcional lineal dada en $\mathring{H}^1(Q)$ $(v \in \mathring{H}^1(Q))$. Como

$$|l(v)| \leqslant \|f\|_{L_2(Q)}\|v\|_{L_2(Q)} + \max_{x\in\bar{Q}} k(x)\,\|\,|\nabla\Phi|\,\|_{L_2(Q)}\|\,|\nabla v|\,\|_{L_2(Q)} +$$
$$+ \max_{x\in\bar{Q}} a(x)\cdot\|\Phi\|_{L_2(Q)}\|v\|_{L_2(Q)} \leqslant C_2(\|f\|_{L_2(Q)} + \|\Phi\|_{H^1(Q)})\,\|v\|_{\mathring{H}^1(Q)},$$

donde la constante $C_2 > 0$ depende sólo de los coeficientes k y a, entonces la funcional l es acotada y $\|l\| \leqslant C_2(\|f\|_{L_2(Q)} + \|\Phi\|_{H^1(Q)})$. Por esta razón, de acuerdo con el teorema de Riesz, en $\mathring{H}^1(Q)$ existe la única función w que satisface la identidad (4'), con la particularidad de que $\|w\|_{\mathring{H}^1(Q)} = \|l\| \leqslant C_2(\|f\|_{L_2(Q)} + \|\Phi\|_{H^1(Q)})$. En este caso, la función $u = w + \Phi$ es la solución generalizada del problema (1), (2). Además, tiene lugar la desigualdad

$$\|u\|_{H^1(Q)} \leqslant C_3(\|f\|_{L_2(Q)} + \|\Phi\|_{H^1(Q)}),$$

donde la constante $C_3 > 0$ no depende de f ni de Φ, y, por lo tanto, también la desigualdad

$$\|u\|_{H^1(Q)} \leqslant C(\|f\|_{L_2(Q)} + \inf_{\substack{\Phi\in H^1(Q)\\ \Phi|_{\partial Q}=\varphi}} \|\Phi\|_{H^1(Q)}). \tag{47}$$

en la que la constante no depende de f y φ. Si la función límite $\varphi \in C^1(\partial Q)$, de estas desigualdades se desprende la desigualdad

$$\|u\|_{H^1(Q)} \leqslant C(\|f\|_{L_2(Q)} + \|\varphi\|_{C^1(\partial Q)}). \qquad (47')$$

Mostremos que la solución encontrada es única. En efecto, si existe otra solución generalizada u', la diferencia $\tilde{u} = u - u'$ será una función de $\mathring{H}^1(Q)$ que, en virtud de (4), satisface la identidad integral $\int\limits_Q (k\nabla\tilde{u}\,\nabla\bar{v} + a\tilde{u}\bar{v})\,dx = 0$ cualquiera que sea $v \in \mathring{H}^1(Q)$. Como el primer miembro de esta igualdad representa un producto escalar en $\mathring{H}^1(Q)$ de las funciones $\tilde{u}$ y v, entonces $\tilde{u} = 0$.

De este modo queda demostrada la siguiente afirmación.

TEOREMA 10. *Si $a(x) \geqslant 0$ en Q y la función φ es un valor límite de cierta función de $H^1(Q)$, entonces el problema* (1), (2) *admite la única solución generalizada u. Esta solución satisface la desigualdad* (47) *y, consecuentemente, para $\varphi \in C^1(\partial Q)$, la* (47').

OBSERVACIÓN. Es fácil comprobar que el conjunto $\mathscr{M}$ de funciones φ, que están definidas en ∂Q y que son las trazas de ciertas funciones Φ de $H^1(Q)$, es un espacio de Banach con la norma $\|\varphi\|_{\mathscr{M}} = \inf\limits_{\substack{\Phi \in H^1(Q) \\ \Phi|_{\partial Q} = \varphi}} \|\Phi\|_{H^1(Q)}$. Por esta razón, la desigualdad (47) se puede escribir en la forma

$$\|u\|_{H^1(Q)} \leqslant C(\|f\|_{L_2(Q)} + \|\varphi\|_{\mathscr{M}}).$$

Examinemos el problema (1), (3). Recordemos que una función u de $H^1(Q)$ se denomina solución generalizada del problema citado, si satisface la identidad integral (5) para cualquier $v \in H^1(Q)$. Se supone que la función límite φ, en este caso, pertenece a $L_2(\partial Q)$.

TEOREMA 11. *Si $a(x) \geqslant 0$ en Q, y (o) $a(x) \not\equiv 0$ en Q, o bien $\sigma(x) \not\equiv 0$ en ∂Q, entonces el problema* (1), (3) *admite la única solución generalizada u cualesquiera que sean $f \in L_2(Q)$ y $\varphi \in L_2(\partial Q)$. Con ello, tiene lugar la desigualdad*

$$\|u\|_{H^1(Q)} \leqslant C(\|f\|_{L_2(Q)} + \|\varphi\|_{L_2(Q)}), \qquad (48)$$

en la cual $C > 0$ es una constante que no depende de f y φ.

Introduzcamos en $H^1(Q)$ un producto escalar del tipo (10) equivalente al producto ordinario. Entonces, la identidad (5) tomará la forma

$$(u, v)_{H^1(Q)} = l(v),$$

donde

$$l(v) = -\int_Q f\bar{v}\,dx + \int_{\partial Q} k\varphi\bar{v}\,dS$$

es una funcional lineal definida en $H^1(Q)$ $(v \in H^1(Q))$.

Puesto que, de acuerdo con el teorema 1, p. 1, § 5, cap. III

$$|l(v)| \leqslant \|f\|_{L_2(Q)} \|v\|_{L_2(Q)} + \max_{x \in \bar{Q}} k(x) \cdot \|\varphi\|_{L_2(\partial Q)} \|v\|_{L_2(\partial Q)} \leqslant$$
$$\leqslant C(\|f\|_{L_2(Q)} + \|\varphi\|_{L_2(\partial Q)} \|v\|_{H^1(Q)}$$

con la constante $C > 0$ independiente de f, φ y v, entonces la funcional $l(v)$ es acotada y $\|l\| \leqslant C(\|f\|_{L_2(Q)} + \|\varphi\|_{L_2(\partial Q)})$. Según el teorema de Riesz, existe una función única u de $H^1(Q)$ que satisface la identidad (5), siendo $\|u\|_{H^1(Q)} = \|l\| \leqslant C(\|f\|_{L_2(Q)} + \|\varphi\|_{L_2(\partial Q)})$. El teorema está demostrado.

Ahora, sea en el problema (1), (3) $a(x) \equiv 0$ en Q, y $\sigma(x) \equiv 0$ en ∂Q. Introduzcamos en $H^1(Q)$ un producto escalar equivalente al ordinario

$$(u, v)_{H^1(Q)} = \int_Q (k\nabla u \nabla \bar{v} + u\bar{v})\,dx. \tag{49}$$

Entonces, la identidad integral (5) que define la solución generalizada del segundo problema de contorno para el operador div $(k\nabla)$, puede ser escrita en la forma

$$(u, v)_{H^1(Q)} - (u, v)_{L_2(Q)} = l(v), \tag{50}$$

donde

$$l(v) = -\int_Q f\bar{v}\,dx + \int_{\partial Q} k\varphi\bar{v}\,dS \tag{51}$$

es una funcional lineal definida en $H^1(Q)$ $(v \in H^1(Q))$. Puesto que de acuerdo con el teorema 1, p. 1, § 5, cap. III,

$$|l(v)| \leqslant \|f\|_{L_2(Q)} \|v\|_{L_2(Q)} + \max_{x \in \bar{Q}} k(x) \cdot \|\varphi\|_{L_2(\partial Q)} \|v\|_{L_2(\partial Q)} \leqslant$$
$$\leqslant C'(\|f\|_{L_2(Q)} + \|\varphi\|_{L_2(\partial Q)}) \|v\|_{H^1(Q)}$$

con la constante $C' > 0$ independiente de f, φ y v, entonces la funcional $l(v)$ es acotada y $\|l\| \leqslant C'(\|f\|_{L_2(Q)} + \|\varphi\|_{L_2(\partial Q)})$. Según el teorema de Riesz, existe en $H^1(Q)$ la única función F' para la cual se efectúa la igualdad

$$l(v) = (F', v)_{H^1(Q)} \tag{52}$$

cualquiera que sea $v \in H^1(Q)$, siendo

$$\|F'\|_{H^1(Q)} \leqslant C'(\|f\|_{L_2(Q)} + \|\varphi\|_{L_2(\partial Q)}). \tag{53}$$

En virtud del lema 1′ p. 3 (consideramos que el producto escalar en $H^1(Q)$ está prefijado por la fórmula (49)), existe un operador acotado A', que actúa de $L_2(Q)$ en $H^1(Q)$ y que tiene $L_2(Q)$ como un campo de definición, tal que para toda $v \in H^1(Q)$

$$(u, v)_{L_2(Q)} = (A'u, v)_{H^1(Q)}. \tag{54}$$

Además, el operador A', si se considera como un operador que actúa de $H^1(Q)$ en $H^1(Q)$, es autoconjugado y totalmente continuo.

Haciendo uso de (52) y (54), podemos sustituir la identidad (50) por una ecuación operacional en el espacio $H^1(Q)$ que sea equivalente a ella:

$$u - A'u = F'. \tag{55}$$

Puesto que para la función $u_1(x) \equiv \text{const} = \frac{1}{\sqrt{|Q|}}$ tiene lugar la ecuación $(u_1, v)_{L_2(Q)} = (u_1, v)_{H^1(Q)}$, cualquiera que sea $v \in H^1(Q)$ (el producto escalar en $H^1(Q)$ está definido por la fórmula (49)), entonces, en virtud a (54), $(A'u_1, v)_{H^1(Q)} = (u_1 v)_{L_2(Q)} = (u_1, v)_{H^1(Q)}$. Esto quiere decir, que 1 es un número característico del operador A', y $u_1 = \frac{1}{\sqrt{|Q|}}$, una función propia correspondiente. Puesto que toda función propia u_1' del operador A', correspondiente al número característico 1, satisface la igualdad $(u_1', u_1')_{H^1(Q)} = (A'u_1', u_1')_{H^1(Q)} = (u_1', u_1')_{L_2(Q)}$, tenemos para ella

$$\int_Q k\,|\nabla u_1'|^2\,dx = 0.$$

Por consiguiente, $u_1' = \text{const}$, es decir, 1 es un número característico de multiplicidad 1 del operador A'.

Según dice el tercer teorema de Fredholm, para que la ecuación (55) sea soluble es necesario y suficiente que la función F' sea en $H^1(Q)$ ortogonal a la función $u_1 = \frac{1}{\sqrt{|Q|}}$: $\left(F', \frac{1}{\sqrt{|Q|}}\right)_{H^1(Q)} = 0$.

De (52) y (51) se deduce que esta condición es equivalente a que

$$-\int_Q f\,dx + \int_{\partial Q} k\varphi\,dS = 0. \tag{56}$$

Si la condición citada se cumple, la ecuación (55) tiene una solución única u, ortogonal en $H^1(Q)$ a las constantes. Será una solución generalizada del problema de contorno que se estudia. Con ello, en virtud de (53), tiene lugar la desigualdad (48) en la que C es una constante independiente de f y φ. Todas las soluciones restantes se diferencian de la función u por los sumandos constantes. Puesto que para una función de $H^1(Q)$ la condición de ortogonalidad a las constantes en el producto escalar (49) es equivalente a la condición de ortogonalidad a las constantes en el producto escalar de $L_2(Q)$, resulta estar establecida la afirmación siguiente.

TEOREMA 12. *Para que exista una solución generalizada del problema* $\operatorname{div}(k(x)\nabla u) = f$, $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial Q} = \varphi$, *es necesario y suficiente que se cumpla la igualdad* (56). *En este caso, la solución generalizada* u, *ortogonal a las constantes en el producto escalar de* $L_2(Q)$, *es única y para ella tiene lugar la desigualdad* (48). *Todas las demás soluciones generalizadas del problema se diferencian de* u *por las constantes.*

OBSERVACIÓN. Si las funciones f y φ tienen valores reales, las soluciones de que se trata en los teoremas 10—12, también son de valores reales.

Al estudiar el primer problema de contorno para la ecuación (1) con condición límite no homogénea surgió el problema siguiente: hallar las condiciones para la función φ de $L_2(\partial Q)$ con las cuales existe su prolongación en el dominio Q y que esta prolongación pertenezca a $H^1(Q)$. Como fue mostrado, la condición suficiente consiste en la pertenencia al espacio $C^1(\partial Q)$. Ahora establezcamos la condición necesaria y suficiente para el caso cuando Q sea un círculo.

Supongamos que el dominio Q $(n = 2)$ es un círculo $\{|x| = \rho < 1\}$, $x = (x_1, x_2) = (\rho\cos\theta, \rho \operatorname{sen}\theta)$. Examinemos en la circunferencia $\partial Q = \{\rho = 1\}$ una función real φ del espacio (real) $L_2(\partial Q)$, $\varphi(\theta) \in L_2(0, 2\pi)$. El desarrollo de la función $\varphi(\theta)$ en una serie de Fourier, convergente en la norma de $L_2(0, 2\pi)$, tiene la forma

$$\varphi(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\theta + b_k \operatorname{sen} k\theta),$$

donde

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\theta)\cos k\theta\, d\theta, \qquad k = 0, 1, \ldots,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\theta)\operatorname{sen} k\theta\, d\theta, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

son sus coeficiente de Fourier.

Según la igualdad de Parseval — Steklov,

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi}\|\varphi\|^2_{L_2(0,\,2\pi)} < \infty. \tag{57}$$

Tiene lugar la afirmación siguiente

TEOREMA 13. *Para que la función $\varphi(\theta)$ de $L_2(0, 2\pi)$ sea una traza en la circunferencia $\{|x| = 1\}$ de cierta función de $H^1(|x| < 1)$, es necesario y suficiente que converja la serie*

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(a_k^2 + b_k^2). \tag{58}$$

En vista de (57) las sucesiones a_k y b_k, $k = 1, 2, \ldots$, son acotadas. Por lo tanto, la función $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - ib_k) z^k$, donde $z = x_1 + ix_2$, es analítica en el círculo $\{|z| < 1\}$. Esto quiere decir, que la función

$$w(x) = w(\rho, \theta) = \frac{a_0}{2} + \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - ib_k)(x_1 + ix_2)^k =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k (a_k \cos k\theta + b_k \operatorname{sen} k\theta) \tag{59}$$

pertenece a $C^\infty(|x| < 1)$, con la particularidad de que la serie en (59), así como también las series obtenidas de ésta última por diferenciación término a término, convergen absoluta e uniformemente en el círculo $\{|x| < r\}$, cualquiera que sea $r < 1$.

Para demostrar el teorema 13 nos hará falta la siguiente afirmación.

LEMA 4. *Para que una función $w(x)$, definida por la serie (59), pertenezca al espacio $H^1(|x| < 1)$, es necesario y suficiente que la serie (58) sea convergente.*

Designemos mediante $w_m(x)$ una suma parcial de la serie (59):

$$w_m(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{m} \rho^k (a_k \cos k\theta + b_k \operatorname{sen} k\theta).$$

Como todas las funciones del sistema $\rho^k \cos k\theta$, $\rho^k \operatorname{sen} k\theta$, $k = 0, 1, \ldots$, son en $L_2(|x| < 1)$ ortogonales a pares y dado que $\| \rho^k \cos k\theta \|^2_{L_2(|x|<1)} = \| \rho^k \operatorname{sen} k\theta \|^2_{L_2(|x|<1)} = \frac{\pi}{2(k+1)}$, $k = 1, 2, \ldots$, entonces para cualesquiera p y q, $q > p$,

$$\| w_q - w_p \|^2_{L_2(|x|<1)} = \frac{\pi}{2} \sum_{k=p+1}^{q} \frac{a_k + b_k^2}{k+1}.$$

Por ello, de la convergencia de la serie (57) se deduce la convergencia de la sucesión $w_m(x)$, $m = 1, 2, \ldots$, en $L_2(|x| < 1)$. Por consiguiente, la función $w \in L_2(|x| < 1)$ y la serie (59) converge hacia ella en el espacio $L_2(|x| < 1)$.

Sea la serie (58) convergente. Entonces (cuando $q > p$):

$$\| w_q - w_p \|^2_{H^1(|x|<1)} = \int\limits_{|x|<1} [(w_q - w_p)^2 + |\nabla (w_q - w_p)|^2] \, dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \rho \, d\rho \int\limits_0^{2\pi} \left[(w_q - w_p)^2 + (w_{q\rho} - w_{p\rho})^2 + \frac{1}{\rho^2} (w_{q\theta} - w_{p\theta})^2 \right] d\theta =$$

$$= \frac{\pi}{2} \sum_{h=p+1}^{q} \frac{a_h^2 + b_h^2}{k+1} + \pi \sum_{h=p+1}^{q} k (a_h^2 + b_h^2) \to 0$$

para $p, q \to \infty$. Es decir, la sucesión w_m, $m = 1, 2, \ldots$, es convergente en $H^1(|x| < 1)$. Por lo tanto, $w \in H^1(|x| < 1)$.

Sea, ahora, $w \in H^1(|x| < 1)$. Dado que para cualquier $r < 1$ la sucesión de normas

$$\| w_m \|^2_{H^1(|x|<r)} =$$

$$= \frac{\pi r^2}{2} \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{h=1}^{m} r^{2k} \frac{a_h^2 + b_h^2}{k+1} + 2 \sum_{h=1}^{m} r^{2k-2} k (a_h^2 + b_h^2) \right), \quad m = 1, 2, \ldots,$$

tiende, cuando $m \to \infty$, a $\| w \|^2_{H^1(|x|<r)}$ sin decrecer de manera manótona, entonces, para cualquier $r < 1$ y todo m, tiene lugar la desigualdad

$$\sum_{h=1}^{m} k (a_h^2 + b_h^2) r^{2k} \leqslant \frac{1}{\pi} \| w_m \|^2_{H^1(|x|<r)} \leqslant \frac{1}{\pi} \| w \|^2_{H^1(|x|<r)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi} \| w \|^2_{H^1(|x|<1)}.$$

Resulta pues, que las sumas parciales de la serie (58) son acotadas:

$$\sum_{h=1}^{m} k (a_h^2 + b_h^2) \leqslant \frac{1}{\pi} \| w \|^2_{H^1(|x|<1)}, \quad m = 1, 2, \ldots,$$

es decir, la serie (58) es convergente. El lema está demostrado.

Pasemos a la demostración del teorema (13). La suficiencia se deduce inmediatamente del lema (4), puesto que, en el caso en que la serie (58) sea convergente, la función w de (59) pertenece a $H^1(|x| < 1)$ y su traza en la circunferencia $\{|x| = 1\}$ es igual a φ.

Demostremos la necesidad. Supongamos que existe una función $\Phi \in H^1(|x| < 1)$ para la cual $\Phi|_{\{|x|=1\}} = \varphi$. Entonces, en virtud del teorema 10, existe una solución generalizada de $H^1(|x| < 1)$ del primer problema de contorno para la ecuación (1) con la función límite φ. Sea u una solución generalizada del primer problema de contorno para la ecuación (1), cuando $k \equiv 1$ y $a \equiv f \equiv 0$, que satisface la condición $u|_{\{|x|=1\}} = \varphi$. En el p. 2 del párrafo que sigue mostraremos que la función u pertenece a $C^\infty(|x|<1)$ y en el círculo $\{|x|<1\}$ satisface la ecuación $\Delta u = 0$. Hagamos uso de este resultado y desarrollemos la función $u(x) = u(\rho, \theta)$, para $\rho \in (0, 1)$ fijado, en una serie de Fourier respecto a θ que sea uniforme y absolutamente convergente:

$$u(\rho, \theta) = \frac{U_0(\rho)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (U_k(\rho)\cos k\theta + V_k(\rho)\operatorname{sen} k\theta),$$

donde

$$U_k(\rho) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(\rho, \theta)\cos k\theta\, d\theta, \qquad k = 0, 1, \ldots,$$

$$V_k(\rho) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(\rho, \theta)\operatorname{sen} k\theta\, d\theta, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Las funciones $U_k(\rho)$ (y $V_k(\rho)$), $k = 0, 1, \ldots$, son indefinidamente diferenciables cuando $0 < \rho < 1$, y acotadas para $\rho \to +0$. Ya que $u \in H^1(|x|<1)$, en virtud del teorema sobre las trazas de funciones de $H^1(|x|<1)$, para cualquier $k = 0, 1, \ldots$, tenemos

$$\int_0^{2\pi} (u(\rho, \theta) - \varphi(\theta))\cos k\theta\, d\theta \to$$

$$\to 0\left(\int_0^{2\pi} (u(\rho, \theta) - \varphi(\theta))\operatorname{sen} k\theta\, d\theta \to 0\right) \text{ cuando } \rho \to 1-0.$$

Esto significa que todas las funciones $U_k(\rho)$ ($V_k(\rho)$) son continuas a la izquierda en el punto $\rho = 1$, y $U_k(1) = a_k$ ($V_k(1) = b_k$), $k = 0, 1, \ldots$

Como, para $\rho \in (0, 1)$, $\Delta u = u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}u_\rho + \frac{1}{\rho^2}u_{\theta\theta} = 0$, entonces para tales ρ tenemos

$$U_k''(\rho) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u_{\rho\rho}(\rho, \theta)\cos k\theta\, d\theta = -\frac{1}{\pi\rho}\int_0^{2\pi} u_\rho \cos k\theta\, d\theta -$$

$$-\frac{1}{\pi\rho^2}\int_0^{2\pi} u_{\theta\theta}\cos k\theta\, d\theta = -\frac{1}{\rho}U_k' + \frac{k^2}{\rho^2}U_k, \qquad k = 0, 1, \ldots$$

Esto quiere decir que para cualquier $k = 0, 1, \ldots$ la función $U_k(\rho)$ satisface, cuando $0 < \rho < 1$, una ecuación diferencial ordinaria (de Euler) $y'' + \frac{1}{\rho} y' - \frac{k^2}{\rho^2} y = 0$. Dado que la solución general de esta ecuación tiene por expresión $B\rho^k + C\rho^{-k}$ cuando $k \neq 0$, y $B + C \ln \rho$ cuando $k = 0$, donde B y C son constantes arbitrarias, entonces, $U_k(\rho) = a_k \rho^k$, $k = 0, 1, \ldots$ De la misma manera se demuestra que $V_k(\rho) = b_k \rho^k$, $k = 1, 2, \ldots$

De este modo, la función u, perteneciente a $H^1(|x| < 1)$, coincide con la función w de (59). Y entonces, en vista del lema 4, la serie (58) converge. El teorema está demostrado.

Utilicemos este teorema para construir una función $\varphi(\theta)$, continua en la circunferencia $\{\rho = 1\}$, la cual no puede ser prolongada en el círculo $\{|x| < 1\}$ mediante una función de $H^1(|x| < 1)$. Sea

$$\varphi(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k^3\theta}{k^2}.$$

Dado que esta serie es uniformemente convergente, la función $\varphi \in C(|x| = 1)$. De acuerdo con el teorema 13, dicha función no puede, al mismo tiempo, ser traza de una función de $H^1(|x| < 1)$, ya que la serie (58) para ella (que tiene por expresión $\sum_{k=1}^{\infty} k^3 \frac{1}{(k^2)^2}$ diverge.

9. Método variacional para resolver problemas de contorno. Sea H' un subespacio arbitrario del espacio real $H^1(Q)$, en particular, H' puede coincidir con todo el $H^1(Q)$. Convengamos en considerar que en H' está dado un producto escalar equivalente al producto escalar ordinario en $H^1(Q)$.

Tomemos una función real $f \in L_2(Q)$ y examinemos en H' una funcional

$$E(v) = \|v\|^2_{H'} + 2(f, v)_{L_2(Q)}, \quad v \in H'. \tag{60}$$

Puesto que $|(f, v)_{L_2(Q)}| \leqslant \|f\|_{L_2(Q)} \|v\|_{L_2(Q)} \leqslant C \|f\|_{L_2(Q)} \|v\|_{H'}$, para toda $v \in H'$

$$E(v) \geqslant \|v\|^2_{H'} - 2|(f, v)_{L_2(Q)}| \geqslant \|v\|^2_{H'} - 2C \|v\|_{H'} \|f\|_{L_2(Q)} =$$
$$= (\|v\|_{H'} - C\|f\|_{L_2(Q)})^2 - C^2 \|f\|^2_{L_2(Q)} \geqslant -C^2 \|f\|^2_{L_2(Q)}.$$

Esto implica que el conjunto de valores de la funcional E en H' es acotado por abajo. Designemos por $d = d(H')$ la cota inferior exacta de la funcional E en H':

$$d = \inf_{v \in H'} E(v)$$

Una función u de H' se llama función que *realiza el mínimo* de la funcional E en H', si

$$E(u) = d. \tag{61}$$

Por supuesto, igual que d, la función u depende de cómo se elige el subespacio H'.

Por definición de cota inferior exacta, existe una sucesión v_m, $m=1, 2, \ldots$, de funciones de H' para la cual tiene lugar

$$\lim_{m\to\infty} E(v_m)=d. \tag{62}$$

Toda sucesión de esta especie se llama sucesión que *minimiza* la funcional E en H'.

LEMA 5. *Para todo subespacio H' del espacio $\mathring{H}^1(Q)$ (en particular, H' puede coincidir con $\mathring{H}^1(Q)$) existe la única función u de H' que realiza el mínimo de la funcional E en H'. Toda sucesión que minimiza la funcional E sobre H', converge hacia esta función en la norma de $H^1(Q)$.*

Sea v_m, $m=1, 2, \ldots$, una sucesión arbitraria de H' que minimiza la funcional E en H'. Entonces, respecto a cualquier $\varepsilon>0$ se puede indicar un número $N=N(\varepsilon)$ tal que para todo $m\geqslant N$

$$d\leqslant E(v_m)\leqslant d+\varepsilon. \tag{63}$$

Puesto que

$$\left\|\frac{v_m\pm v_s}{2}\right\|^2_{H'}=\frac{1}{4}\|v_m\|^2_{H'}+\frac{1}{4}\|v_s\|^2_{H'}\pm\frac{1}{2}(v_m, v_s)_{H'},$$

resulta que

$$\left\|\frac{v_m+v_s}{2}\right\|^2_{H'}+\left\|\frac{v_m-v_s}{2}\right\|^2_{H'}=\frac{1}{2}(\|v_m\|^2_{H'}+\|v_s\|^2_{H'}).$$

De la última igualdad, recurriendo a (60), obtenemos

$$\left\|\frac{v_m-v_s}{2}\right\|^2_{H'}=\frac{1}{2}(\|v_m\|^2_{H'}+\|v_s\|^2_{H'})-\left\|\frac{v_m+v_s}{2}\right\|^2_{H'}=$$
$$=\frac{1}{2}(E(v_m)+E(v_s))-E\left(\frac{v_m+v_s}{2}\right).$$

Pero, $E\left(\frac{v_m+v_s}{2}\right)\geqslant d$, y las funciones v_m y v_s satisfacen las desigualdades (63) cuando $m, s\geqslant N$. Quiere decir, que para cualesquiera $m, s\geqslant N$ tiene lugar la desigualdad

$$0\leqslant\left\|\frac{v_m-v_s}{2}\right\|^2_{H'}\leqslant\frac{1}{2}(d+\varepsilon+d+\varepsilon)-d=\varepsilon,$$

de la cual se infiere, por ser $\varepsilon>0$ arbitrario, que la sucesión en cuestión es fundamental en $H^1(Q)$. Por lo tanto, en H' existe una función u hacia la cual esta sucesión converge en la norma de $H^1(Q)$. Mas, en este caso $\|v_s\|_{H'}\to\|u\|_{H'}$ y $(f, v_s)_{L_2(Q)}\to(f, u)_{L_2(Q)}$ cuando $s\to\infty$, lo que implica que $E(v_s)\to E(u)$. La igualdad (61) se deduce ahora de la correlación (62).

Mostremos la unicidad de la función u que en H' realiza el mínimo de la funcional E. Supongamos que existan dos funciones de este tipo: u_1 y u_2. Entonces, $u_1, u_2, u_1, u_2, \ldots$ será una sucesión que minimiza la funcional E en H' y no converge en H' lo que contradice a la afirmación que acabamos de demostrar. El lema está demostrado.

Demos a conocer el *método de Ritz*, por medio del cual se construye una sucesión que minimiza la funcional E. Examinemos en H' un sistema arbitrario linealmente independiente de funciones φ_k, $k = 1, 2, \ldots$, cuya cápsula lineal es siempre densa en H'. En el caso en que $H' = H^1(Q)$, por tal sistema se puede tomar, por ejemplo, el conjunto de todos los monomios $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$ en el que α es un vector n-dimensional arbitrario de coordenadas de números enteros no negativos.

Designemos con R_k un subespacio k-dimensional del espacio $H' \subset H^1(Q)$ tendido en el sistema $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$, y hallemos un elemento que realice el mínimo de la funcional E en el subespacio R_k (según el lema 5, tal elemento existe). Dado que todo elemento de R_k se representa por la forma $c_1\varphi_1 + \ldots + c_k\varphi_k$, siendo c_i ciertas constantes reales, entonces, el problema citado será equivalente al de hallar el mínimo (respecto a $c_1, \ldots, c_k$) de la función

$$F(c_1, \ldots, c_k) = E(c_1\varphi_1 + \ldots + c_k\varphi_k) =$$

$$= \sum_{i,\, j=1}^{k} c_i c_j (\varphi_i, \varphi_j)_{H'} + 2 \sum_{i=1}^{k} c_i (f, \varphi_i)_{L_2(Q)}.$$

El vector $(c_1, \ldots, c_k)$, en el cual la función F alcanza el mínimo, es una solución del sistema de ecuaciones lineales $\frac{\partial E}{\partial c_i} = 0$, $i = 1, \ldots, k$, o sea, del sistema

$$\sum_{j=1}^{k} (\varphi_i, \varphi_j)_{H'} c_j + (f, \varphi_i)_{L_2(Q)} = 0, \quad i = 1, \ldots, k. \tag{64}$$

El determinante del sistema (64), que se llama determinante de Gram para el sistema $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$, es distinto de cero. En efecto, si fuese igual a cero, de la dependencia lineal de sus renglones se desprendería la existencia de las constantes $\xi_1, \ldots, \xi_k$ $|\xi_1| + \ldots + |\xi_k| \neq 0$ tales que $\xi_1 (\varphi_1, \varphi_j)_{H'} + \ldots + \xi_k (\varphi_k, \varphi_j)_{H'} = 0$ para cualquier $j = 1, \ldots, k$. Lo último significaría que la función $\xi_1\varphi_1 + \ldots + \xi_k\varphi_k$ es ortogonal a todas las funciones $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$, es decir, $\xi_1\varphi_1 + \ldots + \xi_k\varphi_k = 0$, lo cual contradice a la independencia lineal del sistema $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$.

Así pues, el sistema lineal (64) siempre tiene la solución única $c_1^k, \ldots, c_k^k$. En este caso la función

$$v_k = c_1^k\varphi_1 + \ldots + c_k^k\varphi_k \tag{65}$$

de R_k realiza el mínimo de la funcional E en R_k. La sucesión de funciones v_k, $k = 1, 2, \ldots$, se llama *sucesión de Ritz* para la funcional E según el sistema $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$

LEMA 6. *La sucesión de Ritz v_k, $k = 1, 2, \ldots$, de la funcional E según el sistema arbitrario linealmente independiente de funciones φ_k, $k = 1, 2, \ldots$, cuya cápsula lineal es siempre densa en H', es una sucesión que minimiza la funcional E en H'. La sucesión v_k, $k = 1, 2, \ldots$, converge en la norma de $H^1(Q)$ hacia la función u que en H' realiza el mínimo de la funcional E.*

Ya que $R_1 \subset R_2 \ldots \subset R_k \subset \ldots \subset H'$, entonces

$$E(v_1) \quad E(v_2) \geqslant \ldots \geqslant E(v_k) \geqslant \ldots \geqslant d. \tag{66}$$

Puesto que la cápsula lineal del sistema φ_k, $k = 1, 2, \ldots$ es siempre densa en H', respecto a todo $\varepsilon > 0$ existirán los números, $k = k(\varepsilon)$ y $c_1'(\varepsilon), \ldots, c_k'(\varepsilon)$, tales que $\| u_\varepsilon - u \|_{H'} \leqslant \varepsilon$, donde $u_\varepsilon = c_1'(\varepsilon)\varphi_1 + \ldots + c_k'(\varepsilon)\varphi_k$ pertenece a R_k. Luego, de (60) se desprende que

$$\begin{aligned} E(u_\varepsilon) &= \| u_\varepsilon \|_{H'}^2 + 2(f, u_\varepsilon)_{L_2(Q)} = \| u_\varepsilon - u + u \|_{H'}^2 + \\ &+ 2(f, u_\varepsilon - u + u)_{L_2(Q)} = E(u) + E(u_\varepsilon - u) + 2(u_\varepsilon - u, u)_{H'} \leqslant \\ &\leqslant d + | E(u_\varepsilon - u) | + 2 \| u_\varepsilon - u \|_{H'} \| u \|_{H'} \leqslant d + \| u_\varepsilon - u \|_{H'}^2 + \\ &+ 2C \| f \|_{L_2(Q)} \| u_\varepsilon - u \|_{H'} + 2 \| u_\varepsilon - u \|_{H'} \| u \|_{H'} \leqslant \\ &\leqslant d + \varepsilon^2 + 2C \| f \|_{L_2(Q)} \varepsilon + 2 \| u \|_{H'} \varepsilon \leqslant d + C_1 \varepsilon \end{aligned}$$

con cierta constante $C_1 > 0$. Como el mínimo de E en R_k se alcanza en la función v_k, entonces, para cualquier $s \geqslant k$, en virtud de (66), $d \leqslant E(v_s) \leqslant E(v_k) \leqslant d + C_1\varepsilon$. Esto precisamente significa que $E(v_s) \to d$ cuando $s \to \infty$. La convergencia de la sucesión v_s, $s = 1, 2, \ldots$, hacia la función u se deduce del lema 5. El lema está demostrado.

Establezcamos ahora una importante propiedad de la función u que realiza el mínimo de la funcional E en H'. Tomemos una función $v \in H'$ cualquiera y un número real arbitrario t. La función $w_t = u + tv$ pertenece a H', por lo que el polinomio (respecto a t) $P(t) = E(w_t) = E(u) + 2t((u, v)_{H'} + (f, v)_{L_2(Q)}) + t^2 \| v \|_{H'}^2 \geqslant d$ para cualquier $t \in (-\infty, +\infty)$. Además, $P(0) = E(u) = d$. Por consiguiente,

$$\left.\frac{dP}{dt}\right|_{t=0} = 2((u, v)_{H'} + (f, v)_{L_2(Q)}) = 0.$$

Así pues, toda función u de H' que realiza el mínimo de la funcional E en H' satisface la identidad

$$(u, v)_{H'} + (f, v)_{L_2(Q)} = 0, \tag{67}$$

cualquiera que sea $v \in H'$.

Hasta ahora nos era indiferente de qué modo se definía en el subespacio H' un producto escalar equivalente al producto escalar ordinario en $H^1(Q)$.

Sea $H' = H^1(Q)$. Tomemos las funciones: $k(x) \in C(\overline{Q})$, $k(x) \geqslant k_0 = \text{const} > 0$; $a(x) \in C(\overline{Q})$, $a(x) \geqslant 0$ en Q; $\sigma(x) \in C(\partial Q)$, $\sigma(x) \geqslant 0$ en ∂Q. Supongamos que o bien $a(x) \not\equiv 0$ en Q, o bien $\sigma(x) \not\equiv 0$ en ∂Q. El producto escalar en $H^1(Q)$ lo definiremos mediante la ecuación (10):

$$(u, v)_{H^1(Q)} = \int_Q (k\nabla u \nabla v + auv))\, dx + \int_{\partial Q} k\sigma uv\, dS.$$

Entonces, la identidad (67) coincide con la identidad (6):

$$\int_Q (k\nabla u\nabla v + auv)\, dx + \int_{\partial Q} k\sigma uv\, dS = -\int_Q fv\, dx,$$

que define la solución generalizada del tercero o del segundo (si $\sigma \equiv 0$) problema de contorno para la ecuación (1) (siendo homogénea la condición límite).

Cuando $H' = \mathring{H}^1(Q)$ y el producto escalar en $\mathring{H}^1(Q)$ está definido por la fórmula (7):

$$(u, v)_{\mathring{H}^1(Q)} = \int_Q (k\nabla u\nabla v + auv)\, dx$$

($k(x)$, $a(x)$ pertenecen a $C(\overline{Q})$, $k(x) \geqslant k_0 > 0$, $a(x) \geqslant 0$), la identidad (67) coincide con la identidad (4) que determina la solución generalizada del primer problema de contorno para la ecuación (1) (siendo homogénea la condición límite).

De este modo queda demostrado el siguiente teorema.

TEOREMA 14. *Existe la única función u de $H^1(Q)$ que realiza el mínimo de la funcional E en $H^1(Q)$. Si el producto escalar en $H^1(Q)$ está definido por la igualdad (10), la función u será la solución generalizada del tercer o del segundo (cuando $\sigma \equiv 0$) problema de contorno para la ecuación (1) (siendo homogénea la condición límite).*

Existe la única función u de $\mathring{H}^1(Q)$ que realiza el mínimo de la funcional E en $\mathring{H}^1(Q)$. Si el producto escalar en $\mathring{H}^1(Q)$ está definido por la fórmula (7), la función u será la solución generalizada del primer problema de contorno para la ecuación (1).

El teorema 14 nos facilita un método variacional (independiente del método que utilizamos en los teoremas 1 y 2) para demostrar los teoremas de existencia y unicidad de las soluciones generalizadas consideradas en el p. 2 de los problemas de contorno y nos indica el sentido variacional de las soluciones generalizadas.

Si el subespacio H' coincide con $H'(Q)$ (con $\mathring{H}^1(Q)$) y en $H^1(Q)$ ($\mathring{H}^1(Q)$) se ha introducido un producto escalar que se expresa por la fórmula (10) ((7)) y que es equivalente al producto ordinario, entonces, en virtud del lema 6 y del teorema 14, la sucesión de Ritz v_k, $k = 1, 2, \ldots$, de la funcional E en $H^1(Q)$ ($\mathring{H}^1(Q)$) converge en $H^1(Q)$ hacia la solución generalizada del tercer (primer) problema de contorno para la ecuación (1). Es decir, la sucesión de Ritz puede considerarse como una sucesión que aproxima la solución generalizada de un problema de contorno para la ecuación (1).

De este modo queda demostrado

TEOREMA 15. *Una sucesión de Ritz de la funcional E, dada en $H^1(Q)$ o en $\mathring{H}^1(Q)$ (el producto escalar se prefija por las fórmulas (10) ó (7)), que está construida según un sistema arbitrario linealmente independiente de funciones cuya cápsula lineal es siempre densa en $H^1(Q)$ o en $\mathring{H}^1(Q)$, respectivamente, converge en $H^1(Q)$ hacia la solución generalizada del problema correspondiente de contorno (tercero o primero) para la ecuación (1).*

§ 2. Suavidad de las soluciones generalizadas. Soluciones clásicas.

En el párrafo anterior hemos estudiado las cuestiones referentes a la resolución de los principales problemas de contorno para ecuaciones elípticas de segundo orden. Pasemos ahora al estudio de la suavidad de las soluciones de estos problemas.

Supondremos que los datos de los problemas que se consideran son de valores reales. Entonces, según lo dicho en el § 1, las soluciones generalizadas de estos problemas también serán de valores reales. Por ello, en lo sucesivo, sin hacer restricciones especiales, vamos a entender por soluciones las funciones de valores reales, es decir, los elementos de los espacios reales $C^k(\overline{Q})$ o $H^k(Q)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

Al estudiar la suavidad de las soluciones generalizadas, resulta conveniente destacar un caso unidimensional, dado que los resultados que se obtienen en este caso no son, en general, válidos para $n > 1$. Además, la investigación del caso unidimensional es mucho más sencilla. En particular, cuando $n = 1$, las soluciones generalizadas de los problemas de contorno (ellas pertenecen al espacio $H^1(\alpha, \beta)$) son, en vista del teorema 3 p. 2, § 6, cap. III, funciones continuas en $[\alpha, \beta]$. En el caso unidimensional también se resuelve con facilidad el problema de prolongar una función, dada en el contorno, a un dominio, por medio de una función de $H^1(\alpha, \beta)$: si $\Phi|_{x=\alpha} = \varphi_0$, $\Phi|_{x=\beta} = \varphi_1$, a título de tal prolongación se puede tomar una función lineal

$$\Phi = \frac{x(\varphi_1 - \varphi_0)}{\beta - \alpha} - \frac{\alpha\varphi_1 - \beta\varphi_0}{\beta - \alpha}.$$

1. Suavidad de las soluciones generalizadas en el caso unidimensional. Recordemos que los problemas de contorno para la ecuación

$$\mathcal{L}u \equiv (ku')' - au = f, \quad x \in (\alpha, \beta), \tag{1}$$

planteados de manera clásica, consisten en la búsqueda de la solución $u(x)$ de esta ecuación que satisfaga las condiciones siguientes: $u(x) \in C^2(\alpha, \beta) \cap C([\alpha, \beta])$ y

$$u|_{x=\alpha} = \varphi_0, \quad u|_{x=\beta} = \varphi_1 \tag{2}$$

para el caso del primer problema de contorno; $u(x) \in C^2(\alpha, \beta) \cap C^1([\alpha, \beta])$ y

$$(-u_x + \sigma_0 u)|_{x=\alpha} = \varphi_0, \quad (u_x + \sigma_1 u)|_{x=\beta} = \varphi_1 \tag{3}$$

para el caso del tercer (segundo) problema de contorno. Aquí, $k(x) \in C^1([\alpha, \beta])$, $a(x) \in C([\alpha, \beta])$, $f(x)$ son las funciones dadas, $k(x) \geqslant k_0 > 0$; σ_0, σ_1, φ_0, φ_1 son las constantes dadas.

La solución generalizada del problema (1), (2) ($f \in L_2(\alpha, \beta)$) es una función $u(x)$ de $H^1(\alpha, \beta)$ que satisface la identidad integral

$$\int_\alpha^\beta (ku'v' + auv)\,dx = -\int_\alpha^\beta fv\,dx \tag{4}$$

para cualquier $v \in \mathring{H}^1(\alpha, \beta)$ y las condiciones límites (2).

La solución generalizada del problema (1), (3), ($f \in L_2(\alpha, \beta)$) es una función $u(x)$ de $H^1(\alpha, \beta)$ que satisface la identidad integral

$$\int_\alpha^\beta (ku'v' + auv)\,dx + k(\beta)\sigma_1 u(\beta) v(\beta) + k(\alpha)\sigma_0 u(\alpha) v(\alpha) =$$

$$= -\int_\alpha^\beta fv\,dx + k(\beta)\varphi_1 v(\beta) + k(\alpha)\varphi_0 v(\alpha), \tag{5}$$

cualquiera que sea $v \in H^1(\alpha, \beta)$.

Resulta ser válida la siguiente afirmación auxiliar.

LEMA 1. *Cuando $f \in C([\alpha, \beta])$, una función $u(x)$ de $H^1(\alpha, \beta)$, que satisface la identidad integral (4) para cualquier $v \in \mathring{H}^1(\alpha, \beta)$, pertenece al espacio $C^2([\alpha, \beta])$ y es la solución de la ecuación (1) en el intervalo (α, β).*

Como la función $u(x) \in C([\alpha, \beta])$ ($H^1(\alpha, \beta) \subset C([\alpha, \beta])$), entonces, $f + au \in C([\alpha, \beta])$ y $\int_\alpha^x (f(\xi) + a(\xi)u(\xi))\,d\xi \in C^1([\alpha, \beta])$.

Examinemos la función $u_0(x) = \int_0^x \frac{d\eta}{k(\eta)} \int_0^\eta (f(\xi) + a(\xi)\,u(\xi))\,d\xi$.
En virtud de las condiciones impuestas en $k(x)$, la función $u_0(x) \in \in C^2([\alpha, \beta])$ y, además, en (α, β) ella es la solución de la ecuación diferencial $(ku_0')' = f(x) + a(x)\,u(x)$. Por consiguiente, para toda $v \in \mathring{H}^1(\alpha, \beta)$ la función $u_0(x)$ satisface la igualdad

$$\int_\alpha^\beta (ku_0'v' + auv)\,dx = -\int_\alpha^\beta fv\,dx;$$

por lo tanto, una función $u_1 = u - u_0$, perteneciente a $H^1(\alpha, \beta)$, satisface la identidad integral

$$\int_\alpha^\beta ku_1'v'\,dx = 0, \qquad v \in \mathring{H}^1(\alpha, \beta),$$

de la cual se deduce que la función ku_1' tiene en (α, β) una derivada generalizada igual a cero. Por lo tanto, $ku_1' = \text{const}$, es decir, $u_1 \in \in C^2([\alpha, \beta])$. Por ello, también la función $u(x) \in C^2([\alpha, \beta])$.

Puesto que para toda $v \in \mathring{H}^1(\alpha, \beta)$ $\int_\alpha^\beta ku'v'\,dx = -\int_\alpha^\beta (ku')'\,v\,dx$ entonces, de (4) se infiere que la función $(ku')' - a(x)\,u(x) - f(x)$, continua en $[\alpha, \beta]$, es ortogonal (en el producto escalar de $L_2(\alpha, \beta)$) a toda función de $\mathring{H}^1(\alpha, \beta)$. Por ello, en (α, β) la función $u(x)$ es una solución de la ecuación (1). El lema está demostrado.

La solución generalizada $u(x)$ de cualquiera de los problemas de contorno (sea éste el primero, segundo o tercero) pertenece a $H^1(\alpha, \beta)$ y para ella tiene lugar la identidad (4) para toda $v \in \in \mathring{H}^1(\alpha, \beta)$. Por eso, en virtud del lema 1, $u(x) \in C^2([\alpha, \beta])$ y $u(x)$ será en (α, β) la solución de la ecuación (1).

De este modo, hemos mostrado que para $f \in C([\alpha, \beta])$, las soluciones generalizadas de los problemas de contorno en cuestión admiten en el segmento $[\alpha, \beta]$ derivadas continuas hasta el segundo orden inclusive y satisfacen la ecuación (1). Es obvio, además, que en el caso del primer problema de contorno la función $u(x)$ satisface las condiciones límites (2). En el caso del tercero (segundo) problema de contorno, para toda función $v(x) \in H^1(\alpha, \beta)$

$$\int_\alpha^\beta ku'v'\,dx = -\int_\alpha^\beta (ku')'\,v\,dx + k(\beta)\,u'(\beta)\,v(\beta) - k(\alpha)\,u'(\alpha)\,v(\alpha).$$

Esto quiere decir que en vista de la identidad (5),

$$k(\beta)(u'(\beta)+\sigma_1 u(\beta)-\varphi_1)v(\beta)+$$
$$+k(\alpha)(-u'(\alpha)+\sigma_0 u(\alpha)-\varphi_0)v(\alpha)=0$$

cualesquiera que sean $v(\beta)$ y $v(\alpha)$ (recordemos que para cualesquiera $v(\alpha)$ y $v(\beta)$ existe una función $v(x)$ de $H^1(\alpha, \beta)$ que para $x=\alpha$ y $x=\beta$ toma los valores $v(\alpha)$ y $v(\beta)$). Por consiguiente, la función $u(x)$ satisface condiciones límites (3).

Así pues, esta demostrado

TEOREMA 1. *Cuando una función $f(x)\in C([\alpha, \beta])$, las soluciones generalizadas del primer, segundo y tercer problemas de contorno para la ecuación (1) pertenecen a $C^2([\alpha, \beta])$ y son soluciones clásicas de los problemas correspondientes.*

Sea $u_s(x)$ una función propia generalizada, por ejemplo, del tercer (segundo) problema de contorno para el operador $\mathcal{L}$. Esto significa que $u_s(x)\in H^1(\alpha, \beta)$ y, del mismo modo, $u_s(x)\in C([\alpha, \beta])$, y que para ella, cualquiera que sea $v\in H^1(\alpha, \beta)$, tiene lugar la igualdad

$$\int_\alpha^\beta (ku_s'v'+au_sv)\,dx+k(\beta)\sigma_1 u_s(\beta)v(\beta)+k(\alpha)\sigma_0 u_s(\alpha)v(\alpha)=$$
$$=-\lambda_s\int_\alpha^\beta u_s v\,dx,$$

donde λ_s es un valor propio. De acuerdo con el teorema 1, la función $u_s(x)$ pertenece a $C^2([\alpha, \beta])$ y es la solución clásica de la ecuación

$$\mathcal{L}u=(ku')'-au=\lambda_s u, \quad x\in(\alpha, \beta), \tag{6}$$

que satisface las condiciones límites homogéneas (3), es decir, $u_s(x)$ es una función propia clásica del tercer (segundo) problema de contorno para el operador $\mathcal{L}$.

Análogamente se muestra que la función propia generalizada $u_s(x)$ del primer problema de contorno pertenece a $C^2([\alpha, \beta])$ y es la función propia clásica de este problema.

Demostremos que los valores propios de cualquiera de los problemas de contorno en cuestión son de multiplicidad 1. Supongamos que existe un valor propio λ_s, por ejemplo, del tercer problema de contorno, al cual corresponden dos funciones propias $u^{(1)}$ y $u^{(2)}$ que son linealmente independientes.

Como sabemos, la solución general de la ecuación (6) tiene por expresión $C_1u^{(1)}+C_2u^{(2)}$, donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias. Esto significa que toda solución de la ecuación (6) debe satisfacer la condición límite $u'(\alpha)-\sigma_0 u(\alpha)=0$, puesto que ambas funciones

$u^{(1)}$ y $u^{(2)}$ satisfacen esta condición límite. Y a la par con esto, existe una solución de la ecuación (6) que no la satisface, por ejemplo, una solución con condiciones iniciales $u(\alpha) = 0$, $u'(\alpha) = 1$.

De este modo queda demostrado

TEOREMA 2. *Las funciones propias generalizadas del primer, segundo y tercer problemas de contorno para el operador $\mathcal{L}$ pertenecen a $C^2([\alpha, \beta])$ y son funciones propias clásicas de los problemas correspondientes de contorno. Todos los valores propios son de multiplicidad 1.*

2. Suavidad interior de las soluciones generalizadas. Procedamos ahora al estudio de la suavidad de las soluciones generalizadas de los problemas de contorno para el caso $n > 1$. Para que los pormenores técnicos no obstaculicen la aclaración de la sustancia del problema, nos limitaremos a la consideración del caso particular de la ecuación (1) del párrafo anterior, a saber, estudiaremos la suavidad de las soluciones generalizadas de los problemas de contorno para la ecuación de Poisson ($k \equiv 1$, $a \equiv 0$)

$$\Delta u = f. \tag{7}$$

Recordemos que la solución generalizada del primer problema de contorno para la ecuación (7) es la función $u(x)$ de $H^1(Q)$ que satisface la identidad integral

$$\int_Q \nabla u \nabla v \, dx = -\int_Q fv \, dx, \tag{8}$$

para cualquier $v \in \mathring{H}^1(Q)$, y la condición límite $u|_{\partial Q} = \varphi$ (la función $f \in L_2(Q)$, y la función φ es una traza de cierta función Φ de $H^1(Q)$, es decir, existe una función $\Phi \in H^1(Q)$ tal que $\Phi|_{\partial Q} = \varphi$).

La solución generalizada del tercer (segundo) problema de contorno de la ecuación (7) es una función $u(x)$ de $H^1(Q)$ para la cual se cumple la identidad integral

$$\int_Q \nabla u \nabla v \, dx + \int_{\partial Q} \sigma uv \, dS = -\int_Q fv \, dx + \int_{\partial Q} \varphi v \, dS \tag{9}$$

cualquiera que sea $v \in H^1(Q)$ (la función $f \in L_2(Q)$, y $\varphi \in L_2(\partial Q)$).

De los resultados obtenidos en el párrafo anterior se desprende que la solución generalizada del primer problema de contorno existe, es única y satisface la desigualdad

$$\|u\|_{H^1(Q)} \leqslant C\left(\|f\|_{L_2(Q)} + \inf_{\substack{\Phi \in H^1(Q) \\ \Phi|_{\partial Q} = \varphi}} \|\Phi\|_{H^1(Q)}\right) \tag{10}$$

con la constante C que no depende ni de f ni de φ.

La solución generalizada $u(x)$ del tercer problema de contorno para $\sigma \geqslant 0$, $\sigma \not\equiv 0$, también existe, es única y satisface la desigualdad

$$\| u \|_{H^1(Q)} \leqslant C\,(\| f \|_{L_2(Q)} + \| \varphi \|_{L_2(\partial Q)}) \tag{11}$$

con la constante C que no depende ni de f ni de φ.

Examinando el segundo problema de contorno ($\sigma = 0$), supongamos cumplida la condición en que éste sea soluble: $-\int\limits_Q f\,dx + \int\limits_{\partial Q} \varphi\,dS = 0$. Entonces, en la clase de funciones que son ortogonales en el producto escalar de $L_2(Q)$ a las constantes existe la única solución generalizada $u(x)$ del segundo problema de contorno y para esta solución tiene lugar la ecuación (11). Puesto que todas las demás soluciones generalizadas se diferencian de $u(x)$ por los sumandos constantes, al estudiar la suavidad de las soluciones generalizadas del segundo problema de contorno podemos limitarnos al estudio de la función $u(x)$.

LEMA 2. *Sea* $f \in L_2(Q) \cap H^k_{\text{loc}}(Q)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, *y sea la función* $u \in H^1(Q)$ que satisface la identidad integral (8) para toda $v \in \mathring{H}^1(Q)$. *En este caso,* $u \in H^{k+2}_{\text{loc}}(Q)$, *y para cualquier par de subdominios* Q' y Q'' *del dominio* Q, tales que $Q' \Subset Q'' \Subset Q$, *tiene lugar la desigualdad*

$$\| u \|_{H^{k+2}(Q')} \leqslant C\,(\| f \|_{H^k(Q'')} + \| u \|_{H^1(Q'')}) \tag{12}$$

con la constante positiva $C = C(k, Q', Q'')$.

DEMOSTRACIÓN. Sean Q' y Q'' subdominios arbitrarios del dominio Q tales que $Q' \Subset Q'' \Subset Q$. Designemos por $\delta > 0$ la distancia entre los contornos $\partial Q'$ y $\partial Q''$ y examinemos la función $\zeta(x)$ que posee las siguientes propiedades: $\zeta(x) \in C^\infty(R_n)$, $\zeta(x) \equiv 1$ en Q'_δ (y, consecuentemente, en Q'), $\zeta(x) \equiv 0$ fuera de $Q'_{2\delta/3}$.

Sustituyamos en la identidad (8), a título de función $v(x)$, una función $\zeta(x)\, v_0(x)$, donde $v_0(x)$ es una función arbitraria de $\mathring{H}^1(Q'')$ prolongada por cero fuera de Q'' (es obvio que $\zeta(x)\, v_0(x) \in \mathring{H}^1(Q)$). Puesto que $\nabla u \nabla v = \nabla u \nabla(\zeta v_0) = \nabla u\,(\nabla\zeta \cdot v_0 + \zeta \nabla v_0) = \nabla u \cdot \nabla\zeta \cdot v_0 + \nabla(\zeta u)\nabla v_0 - u \nabla\zeta \nabla v_0$, la identidad (8) tomará la forma

$$\int\limits_{Q''} \nabla U \nabla v_0\,dx = \int\limits_{Q''} F v_0\,dx + \int\limits_{Q''} u \nabla\zeta \nabla v_0\,dx, \tag{13$_0$}$$

en la cual la función

$$U(x) = \zeta(x)\, u(x) \tag{14}$$

pertenece a $H^1(Q'')$, es nula fuera de $Q'_{2\delta/3}$ y coincide con $u(x)$ en Q'_δ, mientras que la función

$$F(x) = -f\zeta - \nabla u \cdot \nabla\zeta \tag{15}$$

pertenece a $L_2(Q'')$ y se anula fuera de $Q'_{2\delta/3}$.

Cabe destacar que en realidad la integración en (13_0) se extiende al dominio $Q''_{2\delta/3}$. Por ello, esta igualdad tiene lugar no sólo para cualquier $v_0 \in H^1(Q'')$ sino que también para toda $v_0 \in H^1(Q''_{\delta/2})$ (prolongada arbitrariamente, como un elemento de $L_2(Q'')$, fuera de $Q''_{\delta/2}$).

Elijamos de modo arbitrario una función $v_1(x)$ perteneciente a $H^1(Q'')$ y prolongada por cero fuera de Q''. Para cualesquiera $i = 1, 2, \ldots, n$ y h arbitrario, $0 < |h| < \delta/2$, la relación de diferencias finitas

$$\delta^i_{-h} v_1(x) = \frac{v_1(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i - h, x_{i+1}, \ldots, x_n) - v_1(x)}{-h}$$

será una función de $H^1(Q''_{\delta/2}) \cap L_2(Q'')$. Hagamos en (13_0) $v_0 = \delta^i_{-h} v_1(x)$ para cierto $i = 1, 2, \ldots, n$ y cierto h, $0 < |h| < \delta/2$. Haciendo uso de la fórmula de «integración por partes» (fórmula (9), p. 4, § 3, cap. III), obtenemos la igualdad

$$\int_{Q''} \nabla \delta^i_h U \nabla v_1 \, dx = - \int_{Q''_{2\delta/3}} F \delta^i_{-h} v_1 \, dx + \int_{Q''} \delta^i_h (u \nabla \zeta) \nabla v_1 \, dx. \qquad (16_0)$$

Primero demostremos la afirmación del lema para $k = 0$. De (15) se deduce inmediatamente la acotación

$$\| F \|_{L_2(Q'')} \leqslant C'(Q', Q'') (\| f \|_{L_2(Q'')} + \| u \|_{H^1(Q'')}).$$

Por esto, de (16_0) obtenemos las siguientes desigualdades (con ayuda del teorema 3, p. 4, § 3, cap. III):

$$\left| \int_{Q''} \nabla \delta^i_h U \nabla v_1 \, dx \right| \leqslant (\| F \|_{L_2(Q'')} + C \| u \|_{H^1(Q'')}) \| \, |\nabla v_1| \, \|_{L_2(Q'')} \leqslant$$
$$\leqslant C(Q', Q'') (\| f \|_{L_2(Q'')} + \| u \|_{H^1(Q'')}) \| \, |\nabla v_1| \, \|_{L_2(Q'')}.$$

Haciendo $v_1 = \delta^i_h U$ (consideramos que la función U está prolongada por cero fuera de Q), obtenemos:

$$\| \, | \nabla \delta^i_h U | \, \|_{L_2(Q'')} \leqslant C(Q', Q'') (\| f \|_{L_2(Q'')} + \| u \|_{H^1(Q'')})$$

para todo $i = 1, 2, \ldots, n$ y, $0 < |h| < \delta/2$.

De acuerdo con el teorema 3, p. 4, § 3, cap. III, de esta desigualdad se desprende que $U \in H^2(Q'')$ y $\| U \|_{H^2(Q'')} \leqslant C(Q', Q'') \times \times (\| f \|_{L_2(Q'')} + \| u \|_{H^1(Q'')})$. Como en el dominio Q' $U = u$, entonces $u \in H^2(Q')$ y para $k = 0$ tiene lugar la desigualdad (12). Puesto que Q' es un subdominio arbitrario estrictamente interior respecto a Q, $u \in H^2_{loc}(Q)$.

Sea ahora $f \in H^{m+1}_{loc}(Q)$. Supongamos que la función $u(x)$ posee las propiedades siguientes: $u \in H^{m+2}_{loc}(Q)$; para cualquier par de subdominios Q_1 y Q_2 del dominio Q, tales que $Q_1 \Subset Q_2 \Subset Q$, se efectúa, cuando $k = m$, la desigualdad (12):

$$\|u\|_{H^{m+2}(Q_1)} \leqslant C(m, Q_1, Q_2)(\|f\|_{H^m(Q_2)} + \|u\|_{H^1(Q_2)}) \qquad (12_m)$$

y para cualesquiera α, $|\alpha| \leqslant m$, $i = 1, 2, \ldots, n$ y $0 < |h| < \delta/2$, es válida la igualdad

$$\int_{Q''} \nabla\delta_h^i(D^\alpha U)\nabla v_{m+1}\,dx =$$

$$= -\int_{Q''_{2\delta/3}} D^\alpha F\delta_{-h}^i v_{m+1}\,dx + \int_{Q''} \delta_h^i(D^\alpha(u\nabla\zeta))\nabla v_{m+1}\,dx, \qquad (16_m)$$

donde v_{m+1} es una función arbitraria de $H^1(Q'')$. Señalemos que para el caso $m = 0$ las propiedades citadas ya han sido establecidas.

Puesto que de (14) y (15) se deduce, en virtud de las suposiciones admitidas, que $D^\alpha U \in H^2(Q'')$, y, por otra parte, $D^\alpha F \in H^1(Q'')$, entonces, teniendo en cuenta el teorema 3, p. 4, § 3, cap. III, en (16_m) se puede pasar al límite para $h \to 0$. Como resultado, para cualesquiera α, $|\alpha| = m$, $i = 1, 2, \ldots, n$, obtenemos la igualdad

$$\int_{Q''} \nabla D^\alpha U_{x_i}\nabla v_{m+1}\,dx = -\int_{Q''_{2\delta/3}} D^\alpha F(v_{m+1})_{x_i}\,dx +$$

$$+\int_{Q''} D^\alpha(u\nabla\zeta)_{x_i}\nabla v_{m+1}\,dx,$$

de la cual proviene (la función $D^\alpha F$ es nula fuera de $Q''_{2\delta/3}$) que para toda $v_{m+1} \in H^1(Q'')$

$$\int_{Q''} \nabla D^\alpha U_{x_i}\nabla v_{m+1}\,dx = \int_{Q''} D^\alpha F_{x_i} v_{m+1}\,dx + \int_{Q''} D^\alpha(u\nabla v)_{x_i}\nabla v_{m+1}\,dx. \quad (13_{m+1})$$

La última igualdad coincide con (13_0), si sustituimos en ella $D^\alpha U_{x_i}$ por U, $D^\alpha F_{x_i}$ por F, $D^\alpha(u\nabla\zeta)_{x_i}$ por $u\nabla\zeta$ y v_{m+1} por v_0. Con ello, $D^\alpha U_{x_i} \in H^1(Q'')$ se anula fuera de $Q''_{2\delta/3}$ y coincide con $D^\alpha U_{x_i}$ en Q''_δ, mientras que $D^\alpha F_{x_i} \in L_2(Q'')$ y se anula fuera de $Q''_{2\delta}$. Puesto que la integración en (13_{m+1}) se extiende en realidad al dominio $Q''_{2\delta/3}$, en esta igualdad se puede sustituir $v_{m+1}(x) = \delta_{-h}^j v_{m+2}(x)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, $0 < |h| < \delta/2$, donde v_{m+2} es una función arbitraria de $H^1(Q'')$. Como resultado se obtiene

$$\int_{Q''} \nabla\delta_h^j(D^\alpha U_{x_i})\nabla v_{m+2}\,dx =$$

$$= -\int_{Q''} D^\alpha F_{x_i}\delta_{-h}^j v_{m+2}\,dx + \int_{Q''} \delta_h^j(D^\alpha(u\nabla\zeta)_{x_i})\nabla v_{m+2}\,dx. \quad (16_{m+1})$$

Empleando la desigualdad (12_m) (hagamos en ella $Q_1 = Q''_{2\delta/3}$, y $Q_2 = Q''$), de (15) tenemos

$$\|F\|_{H^{m+1}(Q'')} \leqslant C_1 (\|f\|_{H^{m+1}(Q'')} + \|u\|_{H^{m+2}(Q''_{2\delta/3})}) \leqslant$$
$$\leqslant C_2 (\|f\|_{H^{m+1}(Q'')} + \|u\|_{H^1(Q'')}).$$

Sustituyendo ahora en (16_{m+1}) $v_{m+2} = \delta^i_h (D^\alpha U_{x_i})$, de nuevo, en virtud del teorema 3, p. 4, § 3, cap. III, resulta que $u \in H^{m+3}_{\text{loc}}(Q)$ y para $u(x)$ es válida la desigualdad (12) cuando $k = m + 1$. El lema está demostrado.

Del lema 2 se infiere la siguiente afirmación.

COROLARIO. *Supongamos que $f \in L_2(Q)$ y la función $u \in H^1(Q)$ satisface, para toda $v \in \mathring{H}^1(Q)$, la identidad integral (8). En este caso, la función $u(x)$ satisface (casi siempre) en Q la ecuación (7).*

Tenemos que demostrar que la suma de las segundas derivadas generalizadas $u_{x_1x_1} + \ldots + u_{x_nx_n}$ (acabamos de mostrar que estas derivadas existen) c.t.p. de Q es igual a la función f. Sustituyamos en (8), a título de $v(x)$, una función arbitraria de $\mathring{H}^1(Q')$, $Q' \Subset Q$, prolongada por cero fuera de Q'. Puesto que $u \in H^2(Q')$, debido a la fórmula de Ostrogradski, $\int\limits_{Q'} (\Delta u - f)\, v\, dx = 0$, de donde $\Delta u - f = 0$ (casi siempre) en Q', y, por lo tanto, también (casi siempre) en Q.

Ya que las soluciones generalizadas $u(x)$ del primer, segundo y tercer problemas de contorno para la ecuación (7) satisfacen las condiciones del lema 2 y las desigualdades (10) ó (11) (la solución $u(x)$ del segundo problema de contorno se supone ortogonal en $L_2(Q)$ a las constantes), entonces del lema (2) y teorema 2, p. 2, § 6, cap. III, se deduce la afirmación siguiente.

TEOREMA 3. *Cuando $f \in L_2(Q) \cap H^k_{\text{loc}}(Q)$, donde $k \geqslant 0$, las soluciones generalizadas $u(x)$ del primer, segundo y tercer problemas de contorno para la ecuación (7) pertenecen a $H^{k+2}_{\text{loc}}(Q)$ y (casi siempre) en Q satisfacen la ecuación (7). Para cualesquiera subdominios Q' y Q'' del dominio Q, $Q' \Subset Q'' \Subset Q$, existe una constante positiva C, dependiente de Q', Q'' y k, tal que*

$$\|u\|_{H^{k+2}(Q')} \leqslant C \left(\|f\|_{H^k(Q'')} + \|f\|_{L_2(Q)} + \inf_{\substack{\Phi \in H^1(Q) \\ \Phi|_{\partial Q} = \varphi}} \|\Phi\|_{H^1(Q)}\right)$$

en el caso del primer problema de contorno y

$$\|u\|_{H^{k+2}(Q')} \leqslant C (\|f\|_{H^k(Q'')} + \|f\|_{L_2(Q)} + \|\varphi\|_{L_2(\partial Q)})$$

en el caso del segundo y tercer problemas de contorno (para el segundo problema consideramos que $\int\limits_Q u\, dx = 0$).

Si $k \geqslant \left[\frac{n}{2}\right] - 1$, *entonces* $u(x) \in C^{k+1-\left[\frac{n}{2}\right]}(Q)$. *En particular, cuando* $f \in L_2(Q) \cap C^{\infty}(Q)$, $u(x) \in C^{\infty}(Q)$.

Del teorema 3 se desprende que la suavidad de las soluciones generalizadas de los problemas de contorno para la ecuación (7) dentro del dominio Q no depende del tipo de condiciones límites, ni de la suavidad del contorno, ni tampoco de la suavidad de la función límite. La suavidad interior sólo se determina por la suavidad del segundo miembro $f(x)$ de la ecuación. El resultado obtenido es altamente exacto: la suavidad de la solución es superior a la del segundo miembro en el valor del orden de la ecuación.

OBSERVACION. Tratando el caso unidimensional hemos demostrado, en particular, que si el segundo miembro de la ecuación (7) es continuo, las soluciones generalizadas tendrán derivadas continuas hasta el segundo orden inclusive. Una afirmación análoga en el caso multidimensional no es válida. Más adelante (en el p. 3 del párrafo que sigue) daremos un ejemplo de una función $f(x)$, continua en $\bar{Q}$, tal que la solución generalizada del primer problema de contorno para la ecuación de Poisson (7) no pertenece a $C^2(Q)$ (claro está que ella pertenece a $H^2_{\text{loc}}(Q)$).

3. Suavidad de las soluciones generalizadas de los problemas de contorno. En el punto antecedente hemos establecido la suavidad interior de las soluciones generalizadas, es decir, la pertenencia de éstas a los espacios $H^k_{\text{loc}}(Q)$ o $C^l(Q)$ para ciertos k y l. En este punto estudiaremos la suavidad de las soluciones generalizadas de los problemas de contorno por todo el dominio Q, es decir, la pertenencia de las soluciones a los espacios $H^k(Q)$ o $C^l(\bar{Q})$. Es natural, que la suavidad de una solución «hasta el mismo contorno» depende de la suavidad del contorno y de las funciones límites.

Supondremos que para cierto $k \geqslant 0$ el contorno $\partial Q \in C^{k+2}$

Examinemos primero el caso cuando las condiciones límites son homogéneas. Las soluciones generalizadas del primero o del segundo problema de contorno*) con condiciones límites homogéneas (la función φ que es el segundo miembro en las condiciones límites, es nula) para la ecuación (7) son funciones de los espacios $\mathring{H}^1(Q)$ o $H^1(Q)$ que satisfacen la identidad integral (8) para toda v de $\mathring{H}^1(Q)$ o $H^1(Q)$, respectivamente (en el caso del segundo problema de contorno las funciones f y u se suponen ortogonales en el producto escalar de $L_2(Q)$ a las constantes).

*) Para simplificar, nos limitamos a la consideración de soluciones del primer y segundo problemas de contorno. El estudio de la suavidad de las soluciones generalizadas del tercer problema de contorno con ciertos requisitos impuestos en la función $\sigma(x)$ (de (9)) puede ser efectuada del mismo modo.

TEOREMA 4. *Si $f \in H^k(Q)$ y $\partial Q \in C^{k+2}$ para cierto $k \geqslant 0$, entonces, las soluciones generalizadas $u(x)$ del primero y segundo problemas de contorno con condiciones límites homogéneas para la ecuación de Poisson (7) pertenecen a $H^{k+2}(Q)$ y satisfacen (en el caso del segundo problema de contorno consideramos que $\int\limits_Q u\,dx = 0$) la desigualdad*

$$\|u\|_{H^{k+2}(Q)} \leqslant C \|f\|_{H^k(Q)} \tag{17}$$

*con la constante $C > 0$ que no depende de f**).

Sea x^0 un punto arbitrario del contorno ∂Q. Elijamos un sistema de coordenadas de modo tal que x^0 sea el origen de coordenadas y una normal al contorno en este punto esté orientada a lo largo del eje Ox_n. Tomemos un número $r = r(x^0)$ tan pequeño que un trazo del contorno $\partial Q \cap (|x| < 4r)$ sea un conjunto conexo que se proyecte unívocamente, a lo largo del eje O_{x_n}, en cierto dominio D del plano $x_n = 0$; la ecuación de la superficie $\partial Q \cap (|x| < 4r)$ tiene por expresión

$$x_n = \psi(x'), \quad x' = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in D,$$

donde $\psi(x')$ es una función de $C^{k+2}(\overline{D})$, $\psi(0) = 0$, $\psi_{x_1}(0) = \ldots$
$\ldots = \psi_{x_{n-1}}(0) = 0$, con la particularidad de que están cumplidas las desigualdades

$$|\psi_{x_i}| \leqslant \frac{1}{2n}, \quad i = 1, \ldots, n-1, \quad x' \in \overline{D}. \tag{18}$$

Entonces el dominio $\Omega = Q \cap (|x| < 3r)$ y, consecuentemente, su subdominio $\Omega' = Q \cap (|x| < r)$ se proyectan a lo largo del eje Ox_n en D.

Designemos con Γ la parte común de los contornos de los dominios Q y Ω, $\Gamma = \partial Q \cap (|x| < 3r)$, y con Γ_0, la parte restante del contorno del dominio Ω. El conjunto de funciones de $H^1(\Omega)$ cuya traza sobre Γ es igual a cero, lo designaremos con $\mathring{H}^1_\Gamma(\Omega)$.

Sea una función $\zeta(x) \in C^\infty(R_n)$, $\zeta(x) \equiv 1$ para $|x| < r$, $\zeta(x) \equiv 0$ para $|x| > 2r$. Entonces, para una función arbitraria $v_0(x)$ de $\mathring{H}^1_\Gamma(\Omega)$ (de $H^1(\Omega)$), la función $v(x)$, igual a la función $\zeta(x)\,v_0(x)$ en Ω y nula en todos los demás puntos del dominio Q, pertenece a $\mathring{H}^1(Q)$ ($H^1(Q)$). Sustituyendo esta función $v(x)$ en (8),

*) Para la función $u(x)$, que es solución generalizada del tercer problema de contorno para la ecuación (7) con una condición límite homogénea, tiene lugar la siguiente afirmación: *si $f \in H^k(Q)$, $\partial Q \in C^{k+2}$ y $\sigma(x) \in C^{k+1}(\partial Q)$ ($\sigma \geqslant 0$) para cierto $k \geqslant 0$, entonces $u(x) \in H^{k+2}(Q)$ y se cumple la desigualdad* (17).

obtendremos, igual que en el punto anterior, la igualdad

$$\int_{\Omega} \nabla U \nabla v_0 \, dx = \int_{\Omega} F v_0 \, dx + \int_{\Omega} u \nabla \zeta \nabla v_0 \, dx, \tag{19}$$

donde v_0 es una función arbitraria de $\mathring{H}^1(\Omega)$ en el caso del primer problema de contorno y una función arbitraria de $H^1(\Omega)$, en el caso del segundo problema de contorno; las funciones $F(x)$ y $U(x)$ se

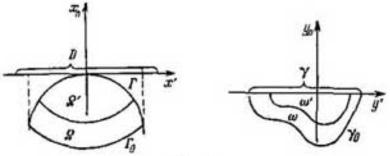


Fig. 1

definen por las igualdades (14) y (15) en las que figura la función $\zeta(x)$ que acabamos de introducir. Es evidente que $U(x) \in H^1(\Omega)$, $F(x) \in L_2(\Omega)$.

La transformación

$$y_i = x_i, \quad i = 1, \ldots, n = 1, \quad y_n = x_n - \psi(x') \tag{20}$$

representa biunívocamente los dominios Ω y Ω' en ciertos dominios ω y ω', siendo unitario el jacobiano correspondiente.

Las imágenes de las superficies Γ y Γ_0 las designaremos mediante γ y γ_0, respectivamente. Las funciones $U(x)$, $u(x)$, ..., definidas en el dominio Ω se convierten, como resultado de la transformación (20), en las funciones $U(y)$, $u(y)$, ... (conservemos para ellas las designaciones anteriores), definidas en el dominio ω. Además, $U(y) = u(y)$ en ω', mientras que para cierto $\delta > 0$ las funciones $U(y)$ y $F(y)$ son nulas en los puntos del conjunto $\omega \setminus \widetilde{\omega}_\delta$ donde $\widetilde{\omega}_\delta$ es un subdominio del dominio ω que se compone de todos aquellos puntos que distan de γ_0 más de δ.

Puesto que para $x \in \Omega$ $(y \in \omega)$ se tiene $U_{x_i} = U_{y_i} - U_{y_n}\psi_{x_i}$, siendo $i = 1, \ldots, n-1$, y $U_{x_n} = U_{y_n}$, entonces

$$\nabla_x U \nabla_x v_0 = \nabla_y U \nabla_y v_0 - \sum_{i=1}^{n-1} (U_{y_i} v_{0_{y_n}} + U_{y_n} v_{0_{y_i}}) \psi_{x_i} + U_{y_n} v_{0_{y_n}} \sum_{i=1}^{n-1} \psi_{x_i}^2,$$

y, por ello, la igualdad (19) en nuevas variables tiene la forma

$$\int\limits_{\omega} \nabla_y U_y v_0\, dy = \int\limits_{\omega} F v_0\, dy + \int\limits_{\omega} \sum_{i,\,j=1}^{n} A_{ij} U_{y_i} v_{0y_j}\, dy +$$
$$+ \int\limits_{\omega} \sum_{i,\,j=1}^{n} B_{ij} \zeta_{y_j} u v_{0y_i}\, dy, \qquad (21_0)$$

donde $A_{in} = A_{ni} = \psi_{x_i}$ para $i = 1, \ldots, n-1$, $A_{nn} = -\sum\limits_{i=1}^{n-1} \psi_{x_i}^2$, $A_{ij} = 0$ para todos los demás i y j; $B_{ij} = \delta_{ij} - A_{ij}$, $\delta_{ij} = 0$ para $i \neq j$, $\delta_{ii} = 1$, $i = 1, \ldots, n$. Es evidente que $A_{ij} \in C^{h+1}(\overline{\omega})$, $B_{ij} \in C^{h+1}(\overline{\omega})$ para todo i y j; además, en virtud de (18)

$$|A_{ij}(y)| \leqslant \frac{1}{2n}, \quad i, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \qquad y \in \overline{\omega}. \qquad (22)$$

Ya que las funciones $U(y)$ y $F(y)$ son nulas en $\omega \setminus \widetilde{\omega}_{\delta/2}$, la igualdad (21_0) tiene lugar no sólo para toda $v_0(y)$ de $\mathring{H}^1_\gamma(\omega)$ o de $H^1(\omega)$, sino para cualquier $v_0(y)$ de $\mathring{H}^1_\gamma(\widetilde{\omega}_{\delta/2})$ (prolongada arbitrariamente fuera de $\widetilde{\omega}_{\delta/2}$ como función de $L_2(\omega)$) o, respectivamente, de $H^1(\widetilde{\omega}_{\delta/2})$ (prolongada arbitrariamente fuera de $\widetilde{\omega}_{\delta/2}$ como función de $L_2(\omega)$).

Tomemos una función cualquiera $v_1(y)$, perteneciente a $\mathring{H}^1_\gamma(\omega)$ $(H^1(\omega))$ y prolongada por cero fuera de ω, y hagamos en (21_0) $v_0 = \delta^l_{-h} v_1$ para ciertos $l < n$ y $0 < |h| < \delta/2$ (la función $v_0(y)$ pertenece, evidentemente, a $\mathring{H}^1_\gamma(\widetilde{\omega}_{\delta/2}) \cap L_2(\omega)$, y, correspondientemente, a $H^1(\widetilde{\omega}_{\delta/2}) \cap L_2(\omega)$). La igualdad (21_0) tomará la forma

$$\int\limits_{\widetilde{\omega}} \nabla_y (\delta^l_h U) \nabla_y v_1\, dy = -\int\limits_{\omega} F \delta^l_{-h} v_1\, dy +$$
$$+ \int\limits_{\omega} \sum_{i,\,j=1}^{n} \delta^l_h (A_{ij} U_{y_j}) v_{1y_i}\, dy + \int\limits_{\omega} \sum_{i,\,j=1}^{n} \delta^l_h (B_{ij} \zeta_{y_j} u) v_{1y_i}\, dy \qquad (23_0)$$

(señalemos que la integración en esta igualdad se efectúa no por todo el dominio ω, sino por su subdominio $\widetilde{\omega}_{\delta/2}$; por ello, todos los integrandos en (23_0) están definidos).

Del teorema 4, p. 4, § 3, cap. III, se deduce que

$$\left| \int\limits_{\omega} F \delta^l_{-h} v_1\, dy \right| \leqslant \|F\|_{L_2(\omega)} \|v_{1y_l}\|_{L_2(\omega)} \leqslant \|F\|_{L_2(\omega)} \|\,|\nabla v_1|\,\|_{L_2(\omega)}. \quad (24_0)$$

Antes de acotar la segunda integral en el segundo miembro de (23_0), descompongámosla en dos sumandos

$$\int_\omega \sum_{i,j=1}^n \delta_h^l (A_{ij}U_{y_i}) v_{1y_j}\,dy = \int_\omega \sum_{i,j=1}^n (A_{ij})_h^l \delta_h^l U_{y_i} v_{1y_j}\,dy + \\ + \int_\omega \sum_{i,j=1}^n \delta_h^l (A_{ij}) U_{y_i} v_{1y_j}\,dy. \qquad (25_0)$$

Haciéndolo, hemos hecho uso de la igualdad, válida para cualesquiera f y g arbitrarias:

$$\delta_h^l (fg) = g_h^l \delta_h^l f + f\delta_h^l g,$$

donde $g_h^l(y) = g(y_1, \ldots, y_{l-1}, y_l + h, y_{l+1}, \ldots, y_n)$.

Acotemos el segundo sumando, usando (22)

$$\left|\int_\omega \sum_{i,j=1}^n (A_{ij})_h^l \delta_h^l U_{y_i} v_{1y_j}\,dy\right| \leqslant \frac{1}{2n}\int_\omega \left(\sum_{i=1}^n |\delta_h^l U_{y_i}|\right)\left(\sum_{j=1}^n |v_{1y_j}|\,dy \leqslant\right.$$

$$\leqslant \frac{1}{2n}\int_\omega \sqrt{n}\left(\sum_{i=1}^n (\delta_h^l U_{y_i})^2\right)^{1/2} \cdot \sqrt{n}\left(\sum_{j=1}^n v_{1y_j}^2\right)^{1/2} dy \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\| \,|\nabla \delta_h^l U|\, \|_{L_2(\omega)} \| \,|\nabla v_1|\, \|_{L_2(\omega)} \qquad (26_0)$$

Acotemos el segundo sumando en (25_0) junto con la tercera integral del segundo miembro de la igualdad (23_0). Dado que las funciones A_{ij} y B_{ij} son continuamente diferenciables de $\bar{\omega}$, entonces

$$\left|\int_\omega \sum_{i,j=1}^n (\delta_h^l A_{ij}) U_{y_i} v_{1y_j}\,dy + \int_\omega \sum_{i,j=1}^n \delta_h^l (B_{ij}\zeta_{y_j} u) v_{1y_j}\,dy\right| \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \|u\|_{H^1(\Omega)} \| \,|\nabla v_1|\, \|_{L_2(\omega)} \leqslant C_1 \|u\|_{H^1(Q)} \| \,|\nabla v_1|\, \|_{L_2(\omega)}, \qquad (27_0)$$

donde la constante C_1 no depende ni de u ni de v_1.

De (23_0), en vista de (24_0) — (27_0), tenemos

$$\left|\int_\omega \nabla(\delta_h^l U)\nabla v_1\,dy\right| \leqslant$$

$$\leqslant (\|F\|_{L_2(\omega)} + \frac{1}{2}\| \,|\nabla \delta_h^l U|\, \|_{L_2(\omega)} + C_1\|u\|_{H^1(Q)}) \| \,|\nabla v_1|\, \|_{L_2(\omega)}. \qquad (28_0)$$

Haciendo en esta desigualdad $v_1 = \delta_h^l U$, y empleando la desigualdad

$$\|F(y)\|_{L_2(\omega)} = \|F(x)\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C_2(\|f\|_{L_2(Q)} + \|u\|_{H^1(Q)}) \qquad (29_0)$$

que se desprende de (15) (la constante C_2 depende sólo de la función ζ, es decir, sólo del dominio Q), así como las desigualdades (10) ó (11), en las que $\varphi = 0$ (entonces, en (10) $\inf \|\Phi\|_{H^1(Q)} = 0$), obtendremos la acotación

$$\| |\nabla \delta_h^l U| \|_{L_2(\omega)} \leqslant C \|f\|_{L_2(Q)}, \qquad l = 1, \ldots, n-1,$$

de la cual, a su vez, se deduce (teorema 4, p. 4, § 3, cap. III) que todas las segundas derivadas generalizadas de la función U, a excepción de $U_{y_n y_n}$, pertenecen a $L_2(\omega)$ y para ellas tiene lugar la desigualdad $\|U_{y_i y_j}\|_{L_2(\omega)} \leqslant C \|f\|_{L_2(Q)}$. Por lo tanto, para las derivadas correspondientes de la función $u(y)$ tenemos

$$\|u_{y_i y_j}\|_{L_2(\omega')} \leqslant C \|f\|_{L_2(Q)}.$$

Para acotar $u_{y_n y_n}$ en ω' hagamos uso del corolario al lema 2, conforme con el cual $\Delta_x u = f$ casi siempre en Q, y, por lo tanto, casi siempre en Ω'. Al introducir nuevas variables, esta igualdad tendrá por expresión:

$$\Delta_y u(y) - 2\sum_{i=1}^{n-1} u_{y_i y_n} \psi_{x_i} + u_{y_n y_n} \sum_{i=1}^{n-1} \psi_{x_i}^2 - u_{y_n} \sum_{i=1}^{n-1} \psi_{x_i x_i} = f(y),$$

de donde, para todo $y \in \omega'$

$$\left(1 + \sum_{i=1}^{n-1} \psi_{x_i}^2\right) u_{y_n y_n} =$$
$$= f(y) + 2\sum_{i=1}^{n-1} u_{y_i y_n} \psi_{x_i} - \sum_{i=1}^{n-1} u_{y_i y_i} + u_{y_n} \sum_{i=1}^{n-1} \psi_{x_i x_i}. \qquad (30)$$

Puesto que $\psi \in C^{k+2}(\overline{D})$ para $k \geqslant 0$, entonces $u_{y_n y_n} \in L_2(\omega')$ y

$$\|u_{y_n y_n}\|_{L_2(\omega')} \leqslant \text{const} \|f\|_{L_2(Q)}.$$

De este modo queda establecido que para todo punto $x^0 \in \partial Q$ existen números positivos $r = r(x^0)$ y $C = C(x^0)$, tales que $u(x) \in H^2(Q \cap (|x - x^0| < r(x^0))$ y que se efectúa la desigualdad

$$\|u\|_{H^2(Q \cap (|x - x^0| < r(x^0)))} \leqslant C(x^0) \|f\|_{L_2(Q)}.$$

Del cubrimiento del contorno ∂Q compuesto de los conjuntos $\partial Q \cap (|x - x^0| < r(x^0))$ para cualesquiera $x^0 \in \partial Q$ escojamos un subcubrimiento finito $\partial Q \cap (|x - x^i| < r(x^i))$, $i = 1, 2, \ldots, N$. Entonces, existe un número $\delta_0 > 0$ tal que $Q \setminus Q_{\delta_0} \subset \bigcup_{i=1}^{N} Q \cap$ $\cap (|x - x^i| < r(x^i))$.

Por consiguiente, $u(x) \in H^2(Q \setminus Q_{\delta_0})$ y $\|u\|_{H^2(Q \setminus Q_{\delta_0})} \leqslant$ $\leqslant C_1 \|f\|_{L_2(Q)}$, donde C_1 es una constante positiva. Mas, según el teorema 3, $u(x) \in H^2(Q_{\delta_0/2})$ y $\| u \|_{H^2(Q_{\delta_0/2})} \leqslant C_2 \| f \|_{L_2(Q)}$. Por lo tanto, $u \in H^2(Q)$ y $\| u \|_{H^2(Q)} \leqslant C \| f \|_{L_2(Q)}$, donde la constante $C > 0$ no depende de f. De este modo queda demostrado el teorema 4 para $k = 0$.

Sea k un número natural cualquiera. En virtud del teorema sobre la suavidad interior de soluciones generalizadas (teorema 3) es suficiente, igual que para $k = 0$, establecer que para todo punto límite x^0 existen unos números $r = r(x^0) > 0$ y $C = C(x^0) > 0$ tales que $u(x) \in H^{k+2}(Q \cap (| x - x^0 | < r))$ y tiene lugar la desigualdad

$$\| u \|_{H^{k+2}(Q \cap (|x-x^0| < r))} \leqslant C \| f \|_{H^k(Q)}$$

(se puede admitir que x^0 es el origen de coordenadas y el eje Ox_n está dirigido a lo largo de una normal a ∂Q en dicho punto). Para ello, debido a la suavidad de la transformación (20) (suavidad del contorno), basta mostrar que $u(y) \in H^{k+2}(\omega')$ y $\| u \|_{H^{k+2}(\omega')} \leqslant C \| f \|_{H^k(Q)}$.

Ya hemos demostrado que $u(y) \in H^2(\omega')$, $\| u \|_{H^2(\omega')} \leqslant C \| f \|_{L_2(Q)}$, y, además, se realiza la igualdad (23_0). Siguiendo el esquema, ya usado en la demostración del lema 2 del párrafo anterior, mostremos que para todo $m = 1, 2, \ldots, k$, $u(y) \in H^{m+2}(\omega')$, $\| u \|_{H^{m+2}(\omega')} \leqslant C \| f \|_{H^m(Q)}$ y tiene lugar la igualdad

$$\int_\omega \nabla (\delta_h^l D^\alpha U) \nabla v_{m+1}\, dy =$$

$$= - \int_\omega D^\alpha F \delta_{-h}^l v_{m+1}\, dy + \int_\omega \sum_{i,j=1}^n \delta_h^l (D^\alpha A_{ij} U_{y_i}) (v_{m+1})_{y_j}\, dy +$$

$$+ \int_\omega \sum_{i,j=1}^n \delta_h^l (D^\alpha B_{ij} \zeta_{y_j} u) (v_{m+1})_{y_i}\, dy, \qquad (23_m)$$

que es válida para cualesquiera $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, 0)$, $|\alpha| \leqslant m$, $l = 1, \ldots, n-1$, $0 < | h | < \delta/2$, $v_{m+1} \in \mathring{H}_\gamma^1(\omega)$ en el caso del primer problema de contorno, y $v_{m+1} \in H^1(\omega)$, en el caso del segundo problema de contorno. Demostremos esta afirmación para $m = 1$.

Pasemos en la igualdad (23_0) al límite para $h \to 0$ e integremos por partes el primer sumando del segundo miembro de la igualdad obtenida. De resultas tendremos la ecuación

$$\int_\omega \nabla U_{y_l} \nabla v_1\, dy = \int_\omega F_{y_l} v_1\, dy + \int_\omega \sum_{i,j=1}^n (A_{ij} U_{y_i})_{y_l} v_{1y_j}\, dy +$$

$$+ \int_\omega \sum_{i,j=1}^n (B_{ij} \zeta_{y_j} u)_{y_l} v_{1y_i}\, dy, \qquad (21_1)$$

válida para toda $v_1 \mathring{H}^1_\gamma(\omega)$ para el primer problema de contorno y de $H^1(\omega)$, para el segundo problema de contorno.

La identidad (21_1) para U_{y_l} se diferencia de la (21_0) para U sólo porque las funciones F, $A_{ij}U_{y_i}$, $B_{ij}\zeta_{y_j}u$ están sustituidas en la primera por F_{y_l}, $(A_{ij}U_{y_i})_{y_l}$, $(B_{ij}\zeta_{y_j}u)_{y_l}$, respectivamente, y la función v_0 está reemplazada por v_1 de las mismas propiedades.

Haciendo en (21_1) $v_1(y) = \delta^s_{-h}v_2(y)$, $s < n$, $0 < |h| < \delta/2$, donde $v_2(y)$ es una función arbitraria de $\mathring{H}^1_\gamma(\omega)$ (de $H^1(\omega)$) prolongada por cero fuera de ω, obtendremos una igualdad análoga a (23_0)

$$\int_\omega \nabla(\delta^s_h U_{y_l})\nabla v_2\,dy =$$

$$= -\int_\omega F_{y_l}\delta^s_{-h}v_2\,dy + \int_\omega \sum_{i,j=1}^n \delta^s_h((A_{ij}U_{y_i})_{y_l})(v_2)_{y_j}\,dy +$$

$$+\int_\omega \sum_{i,j=1}^n \delta^s_h((B_{ij}\zeta_{y_j}u)_{y_l})(v_2)_{y_i}\,dy. \qquad (23_1)$$

Como en el caso anterior, acotemos las integrales en el segundo miembro de (23_1). Por analogía con (24_0) tenemos (ya que $u \in H^2(Q)$ y $f \in H^k(Q)$, $k \geqslant 1$, entonces, en vista de (15) $F \in H^1(Q)$, y puesto que $\psi \in C^{k+2}(\bar{D})$, entonces $F(y) \in H^1(\omega)$)

$$\left|\int_\omega F_{y_l}\delta^s_{-h}v_2\,dy\right| \leqslant \|F_{y_l}\|_{L_2(\omega)}\,\|\,|\nabla v_2|\,\|_{L_2(\omega)}. \qquad (24_1)$$

Por analogía con (25_0) dividamos la segunda integral en el segundo miembro de (23_1) en dos sumandos

$$\int_\omega \sum_{i,j=1}^n \delta^s_h((A_{ij}U_{y_i})_{y_l})(v_2)_{y_j}\,dy = \int_\omega \sum_{i,j=1}^n (A_{ij})^s_h\delta^s_h U_{y_i y_l}(v_2)_{y_j}\,dy +$$

$$+\int_\omega \sum_{i,j=1}^n [\delta^s_h(A_{ij})U_{y_i y_l} + \delta^s_h(A_{ij\,y_l}U_{y_i})](v_2)_{y_j}\,dy. \qquad (25_1)$$

Empleando (22), acotemos el primer sumando en (25_1)

$$\left|\int_\omega \sum_{i,j=1}^n (A_{ij})^s_h\,\delta^s_h U_{y_i y_l}(v_2)_{y_j}\,dy\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\|\,|\nabla\delta^s_h U_{y_l}|\,\|_{L_2(\omega)}\,\|\,|\nabla v_2|\,\|_{L_2(\omega)}. \qquad (26_1)$$

Dado que las funciones A_{ij} y B_{ij} pertenecen a $C^{k+1}(\bar{\omega})$, $k \geqslant 1$, por lo tanto, la suma del segundo sumando en (25_1) con la tercera integral en el segundo miembro de (23_1) se acota de la manera siguiente

$$\Big|\int\limits_{\omega}\Big[\sum_{i,\,j=1}^{n}\delta_h^s(A_{ij})\,U_{y_iy_i}+\delta_h^s(A_{ijy_i}U_{y_i})\Big]v_{2y_j}\,dy+$$

$$+\int\limits_{\omega}\sum_{i,\,j=1}^{n}\delta_h^s((B_{ij}\zeta_{y_j}u)_{y_i})\,v_{2y_j}\,dy\,\Big|\leqslant \text{const}\,\|u\|_{H^2(Q)}\,\|\nabla v_2\|_{L_2(\omega)}. \qquad (27_1)$$

Valiéndose de $(24_1)-(27_1)$, obtenemos de (23_1) la desigualdad

$$\Big|\int\limits_{\omega}\nabla\delta_h^sU_{y_l}\nabla v_2\,dy\Big|\leqslant$$

$$\leqslant(\|F_{y_l}\|_{L_2(\omega)}+\frac{1}{2}\|\,|\nabla\delta_h^sU_{y_l}|\,\|_{L_2(\omega)}+\text{const}\,\|u_2\|_{H^2(Q)})\,\|\,|\nabla v_2|\,\|_{L_2(\omega)},$$

$$l=1,\ \ldots,\ n-1,\ s=1,\ \ldots,\ n-1.$$

Hagamos en esta desigualdad $v_2(y)=\delta_h^sU_{y_l}(y)$, y recurriendo a la acotación

$$\|F\|_{H^1(\omega)}\leqslant C\,(\|f\|_{H^1(Q)}+\|u\|_{H^2(Q)})$$

que se desprende de (15), y a la acotación (17), ya demostrada para $k=0$, tenemos:

$$\|\,|\nabla\delta_h^sU_{y_l}|\,\|_{L_2(\omega)}\leqslant \text{const}\,\|f\|_{H^1(Q)},$$

$$s,\ l=1,\ \ldots,\ n-1,\qquad 0<|h|<\delta/2.$$

Quiere decir, que en ω' existen derivadas generalizadas $u_{y_py_sy_l}$, $p=1,\ 2,\ \ldots,\ n,\ s,\ l=1,\ \ldots,\ n-1$, que pertenecen a $L_2(\omega')$ y satisfacen la desigualdad $\|u_{y_py_sy_l}\|\leqslant \text{const}\,\|f\|_{H^1(Q)}$.

Con el fin de acotar las restantes terceras derivadas $u_{y_py_ny_n}$, $p=1,\ 2,\ \ldots,\ n$, hagamos uso de la ecuación (30). Derivándola primero respecto a y_p para $p<n$, resulta que para todo p de este tipo se tiene $u_{y_py_ny_n}\in L_2(\omega')$ y que $\|u_{y_py_ny_n}\|_{L_2(\omega')}\leqslant C\,\|f\|_{H^1(Q)}$. Luego, derivando (30) respecto a y_n, resulta que $u_{y_ny_ny_n}\in L_2(\omega')$ y $\|u_{y_ny_ny_n}\|_{L_2(\omega')}\leqslant C\,\|f\|_{H^1(Q)}$.

De esta manera hemos demostrado que $u(y)\in H^3(\omega')$, $\|u\|_{H^3(\omega')}\leqslant C\,\|f\|_{H^1(Q)}$ y para cualesquiera $l,\ s=1,\ \ldots,\ n-1$, $0<|h|<\delta/2$ y $v_2\in \dot{H}^1_\gamma(\omega)$ $(v_2\in H^1(\omega))$ se realiza la igualdad (23_1). Repitiendo este procedimiento m veces $(m\leqslant k)$, obtendremos: $u\in H^{m+2}(\omega')$, $\|u\|_{H^{m+2}(\omega')}\leqslant C\,\|f\|_{H^m(Q)}$ y tiene lugar la igualdad (23_m). El teorema está demostrado.

Establezcamos ahora en qué sentido las soluciones generalizadas en consideración satisfacen las condiciones límites. En el primer problema de contorno, de la definición $u \in \mathring{H}^1(Q)$) se deduce inmediatamente que la solución tiene en ∂Q una traza nula: $u|_{\partial Q} = 0$.

Mostremos que en el caso del segundo problema de contorno la solución satisface la condición límite en el sentido siguiente: $\nabla u|_{\partial Q} \cdot n = 0$, donde n es un vector de la normal exterior a ∂Q, $|n| = 1$, y $\nabla u|_{\partial Q}$ es un vector cuyas componentes $u_{x_i}|_{\partial Q}$, $i = 1, \ldots, n$, son trazas en ∂Q de las funciones u_{x_i} pertenecientes a $H^1(Q)$.

En efecto, como $u \in H^2(Q)$, entonces de la fórmula de Ostrogradski obtenemos de (8) la igualdad

$$\int_{\partial Q} (\nabla u \cdot n)\, v\, dS = \int_{Q} (\Delta u - f)\, v\, dx,$$

que es válida para toda $v \in H^1(Q)$ (aquí, $\nabla u \cdot n = \nabla u|_{\partial Q} \cdot n$). Puesto que $\Delta u = f$ casi siempre en Q, entonces

$$\int_{\partial Q} (\nabla u \cdot n)\, v\, dS = 0,$$

de donde se deduce la igualdad requerida, ya que, en virtud del teorema 2, p. 2, § 4, cap. III, el conjunto de trazas $v|_{\partial Q}$ de una función de $H^1(Q)$ es siempre denso en $L_2(\partial Q)$.

Designemos en lo sucesivo la expresión $\nabla u|_{\partial Q} \cdot n$ mediante $\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial Q}$. Señalemos que si $u \in C^1(\overline{Q}) \cap H^2(Q)$, entonces la función $\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial Q}$, como elemento de $L_2(\partial Q)$, coincide con la derivada $\frac{\partial u}{\partial n}$, obtenida según una normal, de la función u en el contorno ∂Q. La designación $\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial Q}$ resulta también natural en el sentido de que existe una función de $H^1(Q)$ tal que su traza en ∂Q coincide con $\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial Q}$ *).

---

*) Es suficiente construir tal función en $Q \setminus Q_\delta$ para cierto $\delta > 0$. Dado que $\partial Q \in C^2$, entonces para todo punto $x \in Q \setminus Q_\delta$ siendo $\delta > 0$ suficientemente pequeño, existe el único punto $y = y(x) \in \partial Q$, $|y - x| < \delta$, tal que el vector $y - x$ esté orientado a lo largo de la normal $n(y)$ al contorno ∂Q en el punto y. La función $\nabla u(x)\, n(y(x))$ pertenece a $H^1(Q \setminus Q_\delta)$ y su traza en ∂Q es $\nabla u(x) \cdot n(y(x))|_{\partial Q} = \nabla u|_{\partial Q}\, n(x) = \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial Q}$.

Así, pues, *cuando $\partial Q \in C^2$, la solución generalizada del segundo**) *problema de contorno satisface la siguiente condición límite*

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial Q}=0.$$

De los teoremas 4 y 3 y de los teoremas 2 y 3, p. 2, § 6, cap. III, en particular se desprende,

TEOREMA 5. *Sea $f \in H^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}(Q)$. Cuando $\partial Q \in C^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}$, la solución generalizada del primer problema de contorno para la ecuación* (7) *con una condición límite homogénea es la solución clásica de este problema. Cuando $\partial Q \in C^{\left[\frac{n}{2}\right]+2}$, la solución generalizada del segundo problema de contorno para la ecuación* (7) *con una condición límite homogénea es la solución clásica de este problema.*

Examinemos ahora la suavidad de las soluciones generalizadas en todo el dominio para las condiciones límites no homogéneas. Limitémonos al primer problema de contorno.

Sea la función $u(x)$ una solución generalizada del primer problema de contorno, es decir, esta función pertenece a $H^1(Q)$ y satisface, para cualquier $v \in \mathring{H}^1(Q)$, la identidad integral (8) y la condición límite $v|_{\partial Q} = \varphi$.

Supongamos que para un $k \geqslant 0$ tenemos: $f \in H^k(Q)$, $\partial Q \in C^{k+2}$ y la función límite φ es una traza en ∂Q de cierta función Φ de $H^{k+2}(Q)$ (para que φ pueda ser una traza en ∂Q de una función perteneciente a $H^{k+2}(Q)$, es suficiente, en vista del teorema 2, p. 2, § 4, cap. III, que φ pertenezca a $C^{k+2}(\partial Q)$). Mostremos que en este caso $u \in H^{k+2}(Q)$.

Examinemos una función $z = u - \Phi$. Está claro que $z \in \mathring{H}^1(Q)$ y para toda $v \in \mathring{H}^1(Q)$ satisface la identidad integral

$$\int_Q \nabla z \nabla v\, dx = -\int_Q \nabla \Phi \nabla v\, dx - \int_Q fv\, dx$$

o, lo que es lo mismo, en virtud de la fórmula de Ostrogradski, la identidad integral

$$\int_Q \nabla z \nabla v\, dx = -\int_Q f_1 v\, dx,$$

donde $f_1 = f - \Delta\Phi$. Puesto que $f_1 \in H^k(Q)$, entonces, en virtud del teorema 4, $z \in H^{k+2}(Q)$. Por esto, la solución generalizada $u = z + \Phi \in H^{k+2}(Q)$. La afirmación está demostrada.

*) En el tercer problema de contorno, la solución generalizada satisface la siguiente condición límite: $\left.\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u\right)\right|_{\partial Q} = 0.$

4. Suavidad de las funciones propias generalizadas. Sea $u(x)$ una función propia generalizada del primero, segundo o tercero problemas de contorno para el operador de Laplace, y sea λ el valor propio correspondiente. Entonces, para cualquier $v \in \mathring{H}^1(Q)$ tiene lugar la igualdad

$$\int_Q \nabla u \nabla v \, dx = -\lambda \int_Q uv \, dx,$$

que coincide con la igualdad (8) cuando $f = \lambda u$. Puesto que $\lambda u \in H^1(Q)$ y, con mayor razón, $\lambda u \in L_2(Q)$, entonces del teorema 3 proviene que $u \in H^2_{loc}(Q)$ y casi siempre en Q se cumple la igualdad

$$\Delta u = \lambda u. \tag{31}$$

De este modo, la función λu que figura en el segundo miembro de (28) pertenece a $H^2_{loc}(Q) \cap L_2(Q)$. Por ello, aplicando el teorema 3 otra vez, obtendremos: $u \in H^4_{loc}(Q)$, etc.

Por consiguiente, $u \in H^k_{loc}(Q)$ para cualquier k. Según el teorema 2, p. 2, § 6, cap. III, $u(x) \in C^\infty(Q)$.

Queda así demostrado

TEOREMA 6. *Las funciones propias generalizadas del primero, segundo y tercero problemas de contorno para el operador de Laplace son indefinidamente diferenciables en Q y satisfacen la ecuación (31).*

La suavidad de las funciones propias generalizadas se determina en todo el dominio por la suavidad del contorno.

TEOREMA 7. *Si, para $k \geqslant 2$, $\partial Q \in C^k$, entonces toda función propia generalizada $u(x)$ del primero o segundo problema de contorno para el operador de Laplace pertenece a $H^k(Q)$ y satisface la condición límite correspondiente ($u|_{\partial Q} = 0$ para el primer problema de contorno y $\partial u/\partial n|_{\partial Q} = 0$, para el segundo problema de contorno). Las funciones propias generalizadas del primer problema de contorno para $k > \left[\frac{n}{2}\right] + 1$ y del segundo problema de contorno para $k > \left[\frac{n}{2}\right] + 2$, son funciones propias clásicas*).*

Dado que $\partial Q \in C^k$ y $u \in H^1(Q) \subset L_2(Q)$, entonces, en virtud del teorema 4, $u \in H^2(Q)$. Si $\partial Q \in C^3$, en vista del mismo teorema, $u \in H^3(Q)$. Cuando $\partial Q \in C^4$, de la incorporación $u \in H^2(Q)$ se deduce que $u \in H^4(Q)$, etc. De este modo llegamos a que si $\partial Q \in C^k$, entonces u pertenecerá a $H^k(Q)$.

---

*) Para el tercer problema de contorno tiene lugar la siguiente afirmación. *Si $\partial Q \in C^k$ y $\sigma(x) \in C^{k-1}(\partial Q)$ para cierto $k \geqslant 2$, entonces toda función propia $u(x)$ del tercer problema de contorno para el operador de Laplace pertenece a $H^k(Q)$. Con ello, $\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u\right)\Big|_{\partial Q} = 0$. Además, si $k > \left[\frac{n}{2}\right] + 2$, entonces las funciones propias generalizadas del tercer problema de contorno son funciones propias clásicas.*

Además, según el teorema 6, las funciones propias generalizadas pertenecen a $C^{\infty}(Q)$ y satisfacen la ecuación (31).

Si $k \geqslant \left[\frac{n}{2}\right]+1$, en virtud del teorema 3, p. 2, § 6, cap. III, $u \in C^{k-\left[\frac{n}{2}\right]-1}(\overline{Q}) \subset C(\overline{Q})$; si $k \geqslant \left[\frac{n}{2}\right]+2$, $u \in C^{1}(\overline{Q})$. Por consiguiente, conforme a los resultados obtenidos en el p. 1, § 5, cap. III, la función propia u del primer problema de contorno, para $k \geqslant \left[\frac{n}{2}\right]+1$, satisface en el sentido clásico la condición límite $u|_{\partial Q}=0$, mientras que la función propia u del segundo problema de contorno para $k \geqslant \left[\frac{n}{2}\right]+2$ satisface, en el mismo sentido, la condición límite $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial Q}=0$. El teorema queda demostrado.

5. **Sobre el desarrollo en series según funciones propias.** Sea $u_1, u_2, \ldots$ un sistema de todas las funciones propias generalizadas del primero (segundo) problema de contorno para el operador de Laplace, y sea $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ un sistema correspondiente de valores propios. Según lo demostrado (teorema 3, p. 3, § 1), el sistema u_s, $s=1, 2, \ldots$, es la base ortonormal del espacio $L_2(Q)$. Esto significa que una función arbitraria $f \in L_2(Q)$ puede ser representada en forma de una serie de Fourier según cualquiera de estos sistemas, convergente en $L_2(Q)$

$$f=\sum_{m=1}^{\infty} f_m u_m, \quad f_m=(f, u_m)_{L_2(Q)}. \tag{32}$$

Supongamos que para cierto $k \geqslant 1$ la función $f \in H^k(Q)$. Sus series de Fourier respecto de las funciones propias del primero y segundo problemas de contorno convergen, por supuesto, hacia f en $L_2(Q)$. No obstante, en la norma de $H^k(Q)$ y hasta en las normas de $H^{k'}(Q)$, $0<k'<k$, estas series, en el caso general, no convergen. Por ejemplo, la serie de Fourier según el sistema de funciones propias del primer problema de contorno de la función $f_0(x)$, que es igual a 1 en Q, no puede converger en la norma $H^k(Q)$, cualquiera que sea $k \geqslant 1$. En efecto, si esta serie fuese convergente en la norma de $H^1(Q)$, sería infaliblemente convergente hacia $f_0(x)$, lo que está excluido, ya que la suma de una serie con los elementos de $\mathring{H}^1(Q)$ y convergente en $H^1(Q)$ debe pertenecer a $\mathring{H}^1(Q)$.

Para que la serie de Fourier de una función f de $H^k(Q)$ converja a esta función en $H^k(Q)$ se debe exigir que f satisfaga ciertas condiciones límites.

Indiquemos que para que la serie de Fourier (32) de la función f, desarrollada según el sistema de funciones propias del primer problema de contorno para el operador de Laplace converja en la norma del espacio $H^1(Q)$, es suficiente (teorema 3, p. 3 del párrafo anterior) y necesario (como acabamos de demostrar) que $f \in \mathring{H}^1(Q)$.

Designemos por $H^k_{\mathscr{D}}(Q)$, para $k \geqslant 1$, un subespacio del espacio $H^k(Q)$, compuesto de todas las funciones f para las cuales

$$f|_{\partial Q} = 0, \ \ldots, \ \Delta^{\left[\frac{k-1}{2}\right]} f|_{\partial Q} = 0.$$

Por $H^0_{\mathscr{D}}(Q)$ vamos a entender el espacio $L_2(Q)$. Cabe destacar, que en vista del teorema 2, p. 3, § 5, cap. III, $H^1_{\mathscr{D}}(Q) = \mathring{H}^1(Q)$.

Designemos por $H^k_{\mathscr{N}}(Q)$, para $k \geqslant 2$, un subespacio del espacio $H^k(Q)$, compuesto de todas las funciones f para las cuales

$$\frac{\partial f}{\partial n}\Big|_{\partial Q} = 0, \ \ldots, \ \frac{\partial}{\partial n} \Delta^{\left[\frac{k}{2}\right]-1} f\Big|_{\partial Q} = 0.$$

Por $H^0_{\mathscr{N}}(Q)$ vamos a entender el espacio $L_2(Q)$, y por $H^1_{\mathscr{N}}(Q)$, el espacio $H^1(Q)$.

LEMA 3. *Sea $\partial Q \in C^k$ para cierto $k \geqslant 1$. Existe una constante $C > 0$ tal que para toda función f de $H^k_{\mathscr{D}}(Q)$ o para toda función f de $H^k_{\mathscr{N}}(Q)$, ortogonal a las constantes en el producto escalar de $L_2(Q)$, tiene lugar la desigualdad*

$$\| f \|_{H^k(Q)} \leqslant C \| \Delta^{\frac{k}{2}} f \|_{L_2(Q)}, \tag{33}$$

si k es par, y la desigualdad

$$\| f \|_{H^k(Q)} \leqslant C \| \Delta^{\frac{k-1}{2}} f \|_{H^1(Q)}, \tag{33'}$$

si k es impar.

Examinemos primero el caso cuando k, $k = 2p$ es par. Demostremos el lema por inducción respecto a p. Establezcamos la acotación (33) para $p = 1$. Sea $f \in H^2_{\mathscr{D}}(Q)$ $(H^2_{\mathscr{N}}(Q))$. Designemos con F la función Δf. Entonces, $f(x)$ casi siempre en Q satisface la ecuación de Poisson

$$\Delta f = F. \tag{34}$$

Además, por definición del espacio $H^2_{\mathscr{D}}(Q)$ $(H^2_{\mathscr{N}}(Q))$, $u|_{\partial Q} = 0$ (correspondientemente, $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial Q} = 0$).

Multiplicando (34) por $v \in \mathring{H}^1(Q)$ arbitraria y aplicando la fórmula de Ostrogradski, resulta que u es la solución generalizada del primero (segundo) problema de contorno para la ecuación (34). Por ello, la validez de la desigualdad (33) para $k = 2$ se deduce del teorema 4.

Supongamos que la desigualdad (33) se ha establecido para $k = 2p$, y sea $f \in H^{2p+2}_{\mathscr{D}}(Q)$ $(H^{2p+2}_{\mathscr{N}}(Q))$. Dado que en este caso la función $F = \Delta f$ pertenece a $H^{2p}_{\mathscr{D}}(Q)$ $(H^{2p}_{\mathscr{N}}(Q))$, tenemos

$$\| F \|_{H^{2p}(Q)} \leqslant C_1 \| \Delta^p F \|_{L_2(Q)} = C_1 \| \Delta^{p+1} f \|_{L_2(Q)}.$$

Pero $f(x)$ es la solución generalizada del primero (segundo) problema de contorno para la ecuación (34), por lo que, en virtud del teorema 4,

$$\| f \|_{H^{2p+2}(Q)} \leqslant C_2 \| F \|_{H^{2p}(Q)} \leqslant C \| \Delta^{p+1} f \|_{L_2(Q)}.$$

Sea, ahora, k impar. Para $k = 1$ la igualdad (33') es trivial. Supongamos que esta ecuación está obtenida para $k = 2p - 1$, $p \geqslant 1$. Demostrémosla para $k = 2p + 1$. Sea $f \in H^{2p+1}_{\mathscr{D}}(Q)$ $(H^{2p+1}_{\mathscr{N}}(Q))$. Entonces $F(x) = \Delta f \in H^{2p-1}_{\mathscr{D}}(Q)$ $(H^{2p-1}_{\mathscr{N}}(Q))$. Según el teorema 4 y la suposición de inducción tenemos

$$\| f \|_{H^{2p+1}(Q)} \leqslant C_2 \| F \|_{H^{2p-1}(Q)} \leqslant C \| \Delta^{p-1} F \|_{H^1(Q)} = C \| \Delta^p f \|_{H^1(Q)}.$$

El lema está demostrado.

TEOREMA 8. *Sea el contorno $\partial Q \in C^k$, $k \geqslant 1$. Para que una función f sea desarrollable en la serie de Fourier (32) según el sistema de funciones propias del primero (segundo) problema de contorno para el operador de Laplace, convergente en la norma del espacio $H^k(Q)$, es necesario y suficiente que f pertenezca a $H^k_{\mathscr{D}}(Q)$ $(H^k_{\mathscr{N}}(Q))$. Si $f \in H^k_{\mathscr{D}}(Q)$ $(H^k_{\mathscr{N}}(Q))$, entonces la serie $\sum\limits_{s=1}^{\infty} f_s^2 |\lambda_s|^k$ converge y, además, existe una constante positiva C, independiente de f, tal que*

$$\sum_{s=1}^{\infty} f_s^2 |\lambda_s|^k \leqslant C \| f \|^2_{H^k(Q)}. \tag{35}$$

DEMOSTRACIÓN. De la igualdad (31) y el teorema 7 se desprende que si $\partial Q \in C^k$, entonces las funciones propias generalizadas del primero (segundo) problema de contorno para el operador de Laplace pertenecen a $H^k_{\mathscr{D}}(Q)$ $(H^k_{\mathscr{N}}(Q))$. Por esta razón, si la serie de Fourier de la función $f \in H^k(Q)$, formada según las funciones propias del primero (segundo) problema de contorno, converge en la norma de $H^k(Q)$, entonces $f \in H^k_{\mathscr{D}}(Q)$ $(H^k_{\mathscr{N}}(Q))$. La necesidad está demostrada.

Sea, ahora, $f \in H^k_{\mathscr{D}}(Q)$ $(H^k_{\mathscr{N}}(Q))$. Mostremos la validez de la desigualdad (35). Supongamos primero que k es par, $k = 2p$, $p \geqslant 1$. Designemos con γ_s los coeficientes de Fourier de la función $\Delta^p f$: $\gamma_s =$

$= (\Delta^p f, u_s)_{L_2(Q)}$. Aplicando la fórmula de Green, tenemos

$$\gamma_s = (\Delta^p f, u_s)_{L_2(Q)} = (\Delta^{p-1} f, \Delta u_s)_{L_2(Q)} =$$
$$= \lambda_s (\Delta^{p-1} f, u_s)_{L_2(Q)} = \ldots \lambda_s^p (f, u_s)_{L_2(Q)} = \lambda_s^p f_s, \quad s = 1, 2, \ldots$$

Ya que la función $\Delta^p f \in L_2(Q)$, $\sum_{s=1}^{\infty} \gamma_s^2 = \| \Delta^p f \|^2_{L_2(Q)}$, por lo que $\sum_{s=1}^{\infty} f_s^2 |\lambda_s|^k = \| \Delta^{\frac{k}{2}} f \|^2_{L_2(Q)}$, y, consecuentemente, tiene lugar la evidente igualdad (35). Si $k = 2p+1$, la función $\Delta^p f \in \mathring{H}^1(Q)$ $(H^1 Q))$. Por esta razón, según el teorema 3, p. 3, § 1, se verifica la desigualdad $\sum_{s=1}^{\infty} \gamma_s^2 |\lambda_s| \leqslant C \| \Delta^p f \|^2_{H^1(Q)}$, de la cual se deduce la (35).

Designemos con $S_m(x)$ una suma parcial de la serie (32). Es obvio que para todo $m = 1, 2, \ldots$ $S_m \in H^k_{\mathscr{D}}(Q)$ $(H^k_{\mathscr{N}}(Q))$.

Cuando $k = 2p$, en vista de (33) y (35) (sea $m > i \geqslant 1$), tenemos

$$\| S_m - S_i \|^2_{H^k(Q)} \leqslant C \| \Delta^p (S_m - S_i) \|^2_{L_2(Q)} =$$
$$= C \Big\| \sum_{s=i+1}^{m} \lambda_s^p f_s u_s \Big\|^2_{L_2(Q)} = C \sum_{s=i+1}^{m} \lambda_s^{2p} f_s^2 = C \sum_{s=i+1}^{m} \lambda_s^k f_s^2 \to 0$$

para $m, i \to \infty$. Esto significa que la serie (32) converge hacia f en $H^k(Q)$.

Si $k = 2p + 1$, la demostración se lleva a cabo de manera análoga, empleando las desigualdades (33′). El teorema está demostrado.

TEOREMA 9. *Supongamos que el contorno ∂Q del dominio Q pertenece a C^k para un $k \geqslant \left[\frac{n}{2}\right] + 1$. En este caso, toda función f de $H^k_{\mathscr{D}}(Q)$ $(H^k_{\mathscr{N}}(Q))$ se desarrolla en la serie de Fourier (32) según las funciones propias del primero (segundo) problema de contorno para el operador de Laplace, con la particularidad de que esta serie es convergente en $C^{k-\left[\frac{n}{2}\right]-1}(\overline{Q})$.*

Del teorema 3, p. 2, § 6, cap. III, proviene que al espacio $C^{k-\left[\frac{n}{2}\right]-1}(\overline{Q})$ pertenecen tanto la función $f(x)$ como todas las funciones propias $u_s(x)$, y, junto con ellas, todas las sumas parciales $S_m(x)$ de la serie (32). Con ello, tiene lugar la desigualdad $\| S_m - S_i \|_{C^{k-\left[\frac{n}{2}\right]-1}(\overline{Q})} \leqslant C \| S_m - S_i \|_{H^k(Q)}$, en la cual la constante C no depende ni de m ni de i. Según el teorema (8), $\| S_m - S_i \|_{H^k(Q)} \to 0$ para $m, i \to \infty$. Por eso,

$\| S_m - S_i \|_{C^{h-[\frac{n}{2}]-1}(\overline{Q})} \to 0$ cuando $m, i \to \infty$. Por lo tanto, la serie (32) converge en $C^{h-[\frac{n}{2}]-1}(\overline{Q})$. El teorema está demostrado.

6. Generalizaciones. El método con el que estudiamos en los pp. 2 y 3 la suavidad de las soluciones generalizadas de los problemas de contorno para la ecuación de Poisson, puede aplicarse también al estudiar la suavidad de las soluciones generalizadas de los problemas de contorno para ecuaciones más generales. Sea, por ejemplo, $u(x)$ una solución generalizada del primer problema de contorno

$$\mathcal{L}u = \operatorname{div}(k(x)\nabla u) - a(x)u = f, \quad x \in Q, \tag{36}$$

$$u|_{\partial Q} = 0$$

$$(f \in L_2(Q),\ k(x) \in C^1(\overline{Q}),\ a(x) \in C(\overline{Q}),\ k(x) \geqslant k_0 > 0).$$

Si $k(x) \in C^{p+1}(\overline{Q})$, $a(x) \in C^p(\overline{Q})$ y $f(x) \in L_2(Q) \cap H^p_{\text{loc}}(Q)$ para cierto $p \geqslant 0$, entonces $u(x) \in H^{p+2}_{\text{loc}}(Q)$. En particular, toda función propia generalizada del primer problema de contorno para el operador de Laplace pertenece a $H^{p+2}_{\text{loc}}(Q)$.

Si en adición el contorno $\partial Q \in C^{p+2}$ y $f \in H^p(Q)$, entonces $u(x) \in H^{p+2}(Q)$, y, en particular, cualquier función propia generalizada del primer problema de contorno para el operador $\mathcal{L}$ pertenece a $H^{p+2}(Q)$.

Resultados del todo análogos tienen también lugar para soluciones generalizadas del segundo y del tercer problemas de contorno para las ecuaciones (36) y las funciones propias correspondientes del operador $\mathcal{L}$.

§ 3. Soluciones clásicas de las ecuaciones de Laplace y de Poisson

1. Funciones armónicas. Potenciales. Una función real $u(x)$ se llama *armónica* en el dominio Q (o en algún conjunto abierto) del espacio R_n, si es dos veces continuamente diferenciable en Q y en todo punto $x \in Q$ satisface la ecuación de Laplace

$$\Delta u = 0. \tag{1}$$

Es fácil dar otra definición equivalente de función armónica, en términos de los espacios H^k (como siempre, las funciones se consideran iguales, si coinciden en casi todo punto).

Una función $u(x)$ perteneciente a $H^1_{\text{loc}}(Q)$, donde Q es un dominio del espacio R_n, se llama armónica en Q, si satisface la identidad integral

$$\int_Q \nabla u \nabla v\, dx = 0, \tag{2}$$

cualesquiera que sean las funciones $v \in H^1(Q)$, terminales en Q (es decir, iguales a cero casi siempre en $Q \setminus Q'$ para cierto $Q' \Subset Q$).

Si la función $u(x)$ de $C^2(Q)$ es armónica en el dominio Q, ella, evidentemente, pertenece al espacio $H^1_{loc}(Q)$. Multipliquemos (1) por una función arbitraria $v \in H^1(Q)$, terminal en Q, e integremos la igualdad obtenida en el dominio Q. Mediante la fórmula de Ostrogradski hallamos que la función u satisface la identidad integral (2).

Sea, ahora, que la función $u \in H^1_{loc}(Q)$ y satisface la identidad integral (2) para todas las funciones v que son terminales en Q y pertenecen a $H^1(Q)$. Tomemos un subdominio arbitrario Q' que sea estrictamente interior respecto a Q. Puesto que la función $u \in H^1(Q')$ y satisface la identidad $\int\limits_{Q'} \nabla u \nabla v \, dx = 0$ para toda $v \in \mathring{H}^1(Q')$, entonces, de acuerdo con el lema 2, p. 2 del párrafo anterior y del teorema 2, p. 2, § 6, cap. III, resulta que $u \in C^\infty(Q')$. Además, la función u satisface en Q' la ecuación (1) (véase el corolario al lema 2 del párrafo anterior). Ya que Q' es *arbitrario, la función $u(x)$ pertenece a $C^\infty(Q)$*, y en Q satisface la ecuación (1), es decir, es armónica.

Si la función u es armónica en Q y dos veces continuamente diferenciable en $\bar{Q}$, entonces, integrando la igualdad (1) en Q y haciendo uso del teorema de Ostrogradski, obtenemos la igualdad

$$0 = \int\limits_{Q} \Delta u \, dx = \int\limits_{Q} \operatorname{div}(\nabla u) \, dx = \int\limits_{\partial Q} \frac{\partial u}{\partial n} \, dS, \tag{3}$$

que con frecuencia emplearemos en lo sucesivo.

Sea ξ un punto arbitrario de R_n, y $r = |x - \xi|$. Puesto que para la función f, que sólo depende de r, $\Delta f = f_{rr} + \frac{n-1}{r} f_r$, entonces la función armónica u, que sólo depende de r, satisface la ecuación diferencial ordinaria $u_{rr} + \frac{n-1}{r} u_r = 0$. Una solución general de esta ecuación en el semieje $r > 0$ tiene por expresión $\frac{c_0}{r^{n-2}} + c_1$ cuando $n > 2$, y $c_0 \ln r + c_1$, cuando $n = 2$, donde c_0 y c_1 son constantes arbitrarias. Por ello, todas las funciones que son armónicas por todo el espacio (a excepción del punto $x = \xi$) y que sólo dependen de $|x - \xi|$, tienen por expresiones $\frac{c_0}{|x-\xi|^{n-2}} + c_1$ para $n > 2$ y $c_0 \ln |x - \xi| + c_1$, para $n = 2$ (c_0 y c_1 son constantes arbitrarias).

Una función

$$U(x-\xi) = \begin{cases} -\dfrac{1}{(n-2)\sigma_n |x-\xi|^{n-2}}, & n > 2, \\ \dfrac{1}{2\pi} \ln |x-\xi|, & n = 2, \end{cases} \tag{4}$$

que es armónica en $R_n \setminus \{x = \xi\}$ y en la que σ_n es el área de la superficie de una esfera unitaria, se denomina *solución fundamental* de la ecuación de Laplace. Esta función desempeña un papel importante en el estudio de las soluciones de las ecuaciones de Laplace y de Poisson.

Para toda función medible $\rho_0(\xi)$, acotada en el dominio Q, está definida para todo x la función

$$u_0(x) = \int_Q U(x-\xi)\,\rho_0(\xi)\,d\xi, \tag{5}$$

llamada *potencial volumétrico de densidad* ρ_0.

Para cualesquiera funciones $\rho_1(\xi)$ y $\rho_2(\xi)$ integrables en ∂Q están definidas para todo $x \in R_n \setminus \partial Q$ las funciones

$$u_1(x) = \int_{\partial Q} U(x-\xi)\,\rho_1(\xi)\,dS_\xi, \tag{6}$$

$$u_2(x) = \int_{\partial Q} \frac{\partial U(x-\xi)}{\partial n_\xi}\,\rho_2(\xi)\,dS_\xi, \tag{7}$$

llamadas potenciales *de capa simple y de capa doble cuyas densidades son* ρ_1 *y* ρ_2, respectivamente.

Con los potenciales (5), (6) y (7) ya estamos familiarizados. En el p. 1, § 6, cap. III (teorema 1) fue demostrado que toda función $u(x)$ de $C^2(\overline{Q})$ puede ser representada en forma de una suma de tres sumandos: potencial volumétrico de densidad Δu, potencial de capa simple de densidad $-\frac{\partial u}{\partial n}$, y potencial de capa doble de densidad u:

$$u(x) = \int_Q U(x-\xi)\,\Delta u(\xi)\,d\xi - \int_{\partial Q} U(x-\xi)\,\frac{\partial u(\xi)}{\partial n}\,dS_\xi + \int_{\partial Q} \frac{\partial U(x-\xi)}{\partial n_\xi}\,u(\xi)\,dS_\xi. \tag{8}$$

Si la función $u \in C^2(\overline{Q})$ y, además, es armónica en Q, entonces de (8) se desprende que para cualquier $x \in Q$

$$u(x) = \int_{\partial Q} \left(\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial n_\xi}\,u(\xi) - \frac{\partial u(\xi)}{\partial n}\,U(x-\xi) \right) dS_\xi. \tag{9}$$

LEMA 1. *El potencial de capa simple y el de capa doble son funciones armónicas en* $R_n \setminus \partial Q$.

Sea x^0 un punto arbitrario de $R_n \setminus \partial Q$, y sea $\delta > 0$ la distancia de este punto al contorno ∂Q. Los integrandos en (6) y (7), siendo funciones de la variable ξ, $\xi \in \partial Q$, pertenecen, para todos x dispuestos en la bola $\{|x - x^0| < \delta/2\}$, a $L_1(\partial Q)$, y siendo funciones de la variable x, para casi todo ξ de ∂Q, pertenecen a C^∞ $(|x-x^0| \leqslant \delta/2)$. Además, para cualesquiera $\xi \in \partial Q$ y x de la bola $\{|x-x^0| < \delta/2\}$ tienen lugar las acotaciones $|D_x^\alpha U(x-\xi)| \leqslant C$, $\left|D_x^\alpha \frac{\partial U(x-\xi)}{\partial n_\xi}\right| \leqslant C$, donde $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ es arbitrario y la constante $C > 0$ sólo depende de δ y α. Por lo tanto,

$$|D_x^\alpha U(x-\xi)\, \rho_1(\xi)| \leqslant C\, |\rho_1(\xi)|,$$

$$\left|D_x^\alpha \frac{\partial U(x-\xi)}{\partial n_\xi}\, \rho_2(\xi)\right| \leqslant C\, |\rho_2(\xi)|.$$

Entonces, según el teorema 7, p. 7, § 1, cap. II, las funciones $u_1(x)$ y $u_2(x)$ son indefinidamente diferenciables en la bola $\{|x-x^0| < \delta/2\}$ y

$$D^\alpha u_1(x) = \int_{\partial Q} \rho_1(\xi)\, D_x^\alpha U(x-\xi)\, dS_\xi$$

y

$$D^\alpha u_2(x) = \int_{\partial Q} \rho_2(\xi)\, D_x^\alpha \frac{\partial U(x-\xi)}{\partial n_\xi}\, dS_\xi$$

cualquiera que sea α. En particular,

$$\Delta u_1 = \int_{\partial Q} \rho_1(\xi)\, \Delta_x U(x-\xi)\, dS_\xi = 0$$

y

$$\Delta u_2(x) = \int_{\partial Q} \rho_2(\xi)\, \frac{\partial}{\partial n_\xi}\, \Delta_x U(x-\xi)\, dS_\xi = 0,$$

puesto que $\Delta_x U(x-\xi) = 0$ para $x \neq \xi$.

LEMA 2. *Si $\rho_0(\xi) \in C^1(\overline{Q})$, entonces el potencial volumétrico $u_0(x)$ pertenece a $C^2(Q) \cap C^1(\overline{Q})$ y para todo $x \in Q$ satisface la ecuación de Poisson $\Delta u_0 = \rho_0$.*

Del hecho de que la función ρ_0 es medible y acotada en Q se desprende (véase p. 12, § 1, cap. II) que $u_0 \in C^1(\overline{Q})$ y

$$\frac{\partial u_0}{\partial x_i} = \int_Q \frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_i}\, \rho_0(\xi)\, d\xi = -\int_Q \frac{\partial U(x-\xi)}{\partial \xi_i}\, \rho_0(\xi)\, d\xi, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Si $\rho_0(\xi) \in C^1(\overline{Q})$, tenemos, en virtud de la fórmula de Ostrogradski,

$$\frac{\partial u_0}{\partial x_i} = \int_Q U(x-\xi)\, \frac{\partial \rho_0}{\partial \xi_i}\, d\xi - \int_{\partial Q} U(x-\xi)\, \rho_0(\xi)\, n_i(\xi)\, dS_\xi,$$

donde $n_i(\xi) = \cos\widehat{(n, \xi_i)}$ es una función continua en ∂Q.

El primer sumando del segundo miembro de esta igualdad es un potencial volumétrico de densidad $\frac{\partial \rho_0}{\partial \xi_i}$, continua en $\overline{Q}$. Por lo tanto, este sumando pertenece a $C^1(\overline{Q})$. El segundo sumando es un potencial de capa simple de densidad $\rho_0 n_i$, continuo en ∂Q, y pertenece, según el lema 1, a $C^\infty(Q)$. Por esta razón, la función $u_0 \in C^1(\overline{Q}) \cap C^2(Q)$. Tomemos una función arbitraria ψ de $C^2(\overline{Q})$ que sea terminal en Q. Puesto que $\psi\Big|_{\partial Q} = \frac{\partial \psi}{\partial n}\Big|_{\partial Q} = 0$, de (8) para todo $x \in Q$:

$$\psi(x) = \int_Q U(x-\xi)\,\Delta\psi(\xi)\,d\xi. \tag{10}$$

Aplicando a las funciones ψ y u_0 la fórmula de Green y empleando de manera consecutiva el teorema de Fubini (teorema 10, p. 11, § 1, cap. II) y la igualdad (10), obtenemos:

$$\begin{aligned}\int_Q \psi(x)\,\Delta u_0(x)\,dx &= \int_Q \Delta\psi(x)\cdot u_0(x)\,dx = \\ &= \int_Q \Delta\psi(x)\left(\int_Q U(x-\xi)\,\rho_0(\xi)\,d\xi\right)dx = \\ &= \int_Q \rho_0(\xi)\left(\int_Q U(x-\xi)\,\Delta\psi(x)\,dx\right)d\xi = \\ &= \int_Q \psi(\xi)\,\rho_0(\xi)\,d\xi.\end{aligned}$$

De este modo, para toda función ψ de $C^2(\overline{Q})$, terminal en Q, tiene lugar la igualdad

$$\int_Q \psi(x)\,(\Delta u_0(x) - \rho_0(x))\,dx = 0,$$

de donde se desprende que $\Delta u_0 = \rho_0$ en Q. El lema 2 está demostrado.

2. Propiedades principales de las funciones armónicas. Ahora, establezcamos algunas propiedades importantes de las funciones armónicas.

TEOREMA 1 (primer teorema de la media). *Sea $u(x)$ una función armónica en el dominio Q, y sea x un punto arbitrario de Q. Entonces, para cualquier r, $0 < r < d$, donde d es la distancia del punto x al contorno ∂Q, se realiza la igualdad*

$$u(x) = \frac{1}{\sigma_n r^{n-1}} \int_{|x-\xi|=r} u(\xi)\,dS_\xi. \tag{11}$$

Puesto que la función $u(\xi) \in C^2(|\xi - x| \leqslant r)$, a esta función puede aplicarse en el dominio $\{|\xi - x| < r\}$ la fórmula (9). En vista de esta fórmula, para $n > 2$ (cuando $n = 2$, los razonamientos son los mismos)

$$u(x) = \int\limits_{|\xi - x| = r} \frac{1}{(n-2)\sigma_n r^{n-2}} \frac{\partial u(\xi)}{\partial n} dS_\xi -$$

$$- \int\limits_{|\xi - x| = r} \frac{u(\xi)}{(n-2)\sigma_n} \frac{\partial \frac{1}{|\xi - x|^{n-2}}}{\partial n_\xi} dS_\xi =$$

$$= \frac{1}{(n-2)\sigma_n r^{n-2}} \int\limits_{|\xi - x| = r} \frac{\partial u(\xi)}{\partial n} dS_\xi + \frac{1}{\sigma_n r^{n-1}} \int\limits_{|\xi - x| = r} u(\xi)\, dS_\xi,$$

ya que en la esfera $\{|\xi - x| = r\}$

$$\frac{\partial \frac{1}{|\xi - x|^{n-2}}}{\partial n_\xi} = \frac{\partial \frac{1}{|\xi - x|^{n-2}}}{\partial |\xi - x|} = -\frac{(n-2)}{|x - \xi|^{n-1}} = -\frac{n-2}{r^{n-1}}.$$

La fórmula (11) ahora se desprende de la (3)

TEOREMA 2 (**segundo teorema de la media**). *Sea $u(x)$ una función armónica en el dominio Q, y sea x un punto arbitrario de Q. Entonces, para cualquier r, $0 < r < d$, donde d es la distancia del punto x al contorno ∂Q, tiene lugar la igualdad*

$$u(x) = \frac{n}{\sigma_n r^n} \int\limits_{|\xi - x| < r} u(\xi)\, d\xi. \tag{12}$$

De acuerdo con el teorema 1, para todo ρ, $0 < \rho < d$, tiene lugar la igualdad

$$\sigma_n \rho^{n-1} u(x) = \int\limits_{|\xi - x| = \rho} u(\xi)\, dS_\xi.$$

Integrando esta igualdad respecto a ρ, desde 0 hasta r, obtendremos la igualdad (12).

Los teoremas 1 y 2 se llaman teoremas de la media, puesto que en los segundos miembros de las igualdades (11) y (12) figuran valores medios de la función u en la esfera $\{|\xi - x| = r\}$ y en la bola $\{|\xi - x| < r\}$, respectivamente ($\sigma_n r^{n-1}$ es el área de la esfera, $\frac{\sigma_n r^n}{n}$ es el volumen de la bola).

Según lo mostrado, una función armónica en Q es indefinidamente diferenciable en este dominio. Al estudiar las funciones armónicas resulta ser útil el siguiente

LEMA 3. *Supongamos que la función $u(x)$ es armónica en Q y acotada: $|u(x)| \leqslant M$. Entonces, toda derivada $D^\alpha u(x)$ de orden*

$|\alpha| = k$, $k = 1, 2, \ldots$, *satisface, en el punto* $x \in Q$, *la desigualdad*

$$|D^{\alpha}u(x)| \leqslant M\left(\frac{n}{\delta}\right)^{k} k^{k}, \tag{13}$$

donde δ es la distancia del punto x al contorno ∂Q.

Demostremos el lema por el método de inducción según k.

Sea, primero, $k = 1$. Mostremos que $|u_{x_i}| \leqslant Mn/\delta$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Ya que la función u_{x_i} es armónica en Q, en virtud del teorema 2 para todo $\delta' < \delta$

$$u_{x_i}(x) = \frac{n}{\sigma_n \delta'^n} \int\limits_{|\xi - x| < \delta'} u_{\xi_i}\, d\xi = \frac{n}{\sigma_n \delta'^n} \int\limits_{|\xi - x| = \delta'} u(\xi) \cos \alpha_i \, dS_{\xi}$$

donde α_i es el ángulo formado por el vector $\xi - x$ y el eje $O\xi_i$. Por esto

$$|u_{x_i}(x)| \leqslant \frac{n}{\sigma_n \delta'^n} \int\limits_{|\xi - x| = \delta'} |u(\xi)|\, dS_{\xi} \leqslant M \frac{n}{\sigma_n \delta'^n} \sigma_n \delta'^{n-1} = Mn/\delta'.$$

Pasando en esta desigualdad al límite para $\delta' \to \delta$, obtendremos la desigualdad requerida.

Supongamos ahora que el lema está demostrado para todas las derivadas $D^{\alpha} u$, donde $|\alpha| \leqslant k - 1$, $k \geqslant 2$. Demostremos la desigualdad (13).

Tomemos dos bolas: $\{|\xi - x| < \delta'\}$ y $\{|\xi - x| < \delta'/k\}$ con centro en el punto x (δ' es un número entero positivo menor que δ). Según la sugerencia de la inducción, para todo punto ξ de la bola $\{|\xi - x| < \delta'/k\}$ y cualquier β, $|\beta| = k - 1$, tiene lugar la desigualdad siguiente

$$|D_{\xi}^{\beta} u(\xi)| \leqslant M\left(\frac{n}{\delta' - \delta'/k}\right)^{k-1} (k-1)^{k-1} = M\left(\frac{n}{\delta'}\right)^{k-1} k^{k-1}.$$

Así pues, para cualquier β, $|\beta| = k - 1$, la función armónica $D_{\xi}^{\beta} u(\xi)$ está acotada en la bola $\{|\xi - x| < \delta'/k\}$ por una constante $M(n/\delta')^{k-1}k^{k-1}$. Entonces, según lo demostrado arriba, para las primeras derivadas de esta función tenemos

$$|(D_{\xi}^{\beta} u(\xi))_{\xi_i}| \leqslant M\left(\frac{n}{\delta'}\right)^{k-1} k^{k-1} \left(\frac{n}{\delta'/k}\right) = M\left(\frac{n}{\delta'}\right)^{k} k^{k}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Es decir, para todo α, $|\alpha| = k$, se tiene $|D^{\alpha} u| \leqslant M(n/\delta')^k k^k$. Pasando en esta desigualdad al límite para $\delta' \to \delta$, obtenemos la desigualdad (13). El lema está demostrado.

TEOREMA 3. *De todo conjunto infinito de funciones armónicas en* Q, *acotadas en dicho dominio por una constante, se puede extraer una sucesión que converja uniformemente en cualquier subdominio estrictamente interior del dominio* Q.

Sea $\mathfrak{M}$ un conjunto infinito de funciones $u(x)$ armónicas en Q y acotadas totalmente en Q: $|u(x)| \leqslant M$. Tomemos una sucesión arbitraria de dominios $Q_1, Q_2, \ldots$, que posee las propiedades siguientes: $Q_1 \subset Q_2 \subset Q_3 \ldots$; $Q_i \Subset Q$, $i = 1, 2, \ldots$; $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} Q_i = Q$.

El conjunto $\mathfrak{M}$ se compone de las funciones, pertenecientes a $C(\overline{Q}_1)$ y acotadas en total en Q_1. En vista del lema 3, existe una constante $C > 0$, que depende sólo del dominio Q_1, tal que para todas las funciones u de $\mathfrak{M}$ $|\nabla u| \leqslant C$ para $x \in Q_1$. Por esto, el conjunto $\mathfrak{M}$ es continuo en $\overline{Q}_1$ de manera equigradual. Según el teorema de Arzelá, se puede extraer de $\mathfrak{M}$ una sucesión $u_{11}, u_{12}, \ldots$, que sea uniformemente convergente en $\overline{Q}_1$. Dado que esta sucesión es uniformemente acotada y continua en $\overline{Q}_2$ de manera equigradual (en virtud del lema 3), entonces se puede extraer de ella una subsucesión $u_{21}, u_{22}, \ldots$, que sea uniformemente convergente en $\overline{Q}_2$, etc. Es evidente que una sucesión diagonal $u_{11}, u_{22}, \ldots$ es la buscada. El teorema queda demostrado.

TEOREMA 4. *Supongamos que la sucesión de funciones $u_1(x)$, $u_2(x), \ldots$, armónicas en el dominio Q, converge uniformemente hacia la función $u(x)$ en todo subdominio estrictamente interior con relación a Q. Entonces, la función $u(x)$ es armónica en Q y para todo $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ la sucesión $D^\alpha u_1$, $D^\alpha u_2, \ldots$ converge uniformemente hacia la función $D^\alpha u$ en cualquier subdominio estrictamente interior respecto al dominio Q.*

Sea Q' un subdominio arbitrario estrictamente interior respecto al dominio Q. Entonces, $u(x) \in C(\overline{Q'})$. Tomemos un dominio Q'' tal que $Q' \Subset Q'' \Subset Q$. Está claro que toda función $u_m(x)$ es acotada en Q''.

Según el lema 3, para todo α existe una constante $C > 0$ (que depende sólo de Q', Q'' y $|\alpha|$) tal que se cumpla la desigualdad

$$\| D^\alpha (u_m - u_s) \|_{C(\overline{Q'})} \leqslant C \| u_m - u_s \|_{C(\overline{Q''})},$$

cualesquiera que sean $m, s = 1, 2, \ldots$

Dado que $\| u_m - u_s \|_{C(\overline{Q''})} \to 0$ para $m, s \to \infty$, todas las sucesiones $D^\alpha u_m$, $m = 1, 2, \ldots$, son fundamentales en la norma del espacio $C(\overline{Q'})$. Esto significa que la función $u(x) \in C^\infty(\overline{Q'})$ y para todo α tendremos $\| D^\alpha u_m - D^\alpha u \|_{C(\overline{Q'})} \to 0$ cuando $m \to \infty$.

Pasando en la igualdad $\Delta u_m = 0$, $x \in Q'$, al límite para $m \to \infty$, obtenemos: $\Delta u = 0$ en Q', es decir, en Q' la función $u(x)$ es armónica y, consecuentemente, también en Q. El teorema está demostrado.

TEOREMA 5. *Una función armónica en Q es analítica en Q.*

Sea una función $u(x)$ armónica en el dominio Q. Tomemos en Q un punto arbitrario x^0 y designemos con $\delta > 0$ la distancia de este punto al contorno ∂Q, y con $S_{\delta/4}(x^0)$, la bola $\{|x-x^0|<\delta/4\}$. La función $u(x)\in C(\overline{Q}_{\delta/2})$, por eso es acotada en $Q_{\delta/2}$; sea $M = \max\limits_{x\in\overline{Q}_{\delta/2}} |u(x)|$.

Como la distancia de cualquier punto de la bola $\overline{S}_{\delta/4}(x^0)$ hasta el contorno $\partial Q_{\delta/2}$ no es menor que $\delta/4$, en virtud del lema 3, para todo punto x de $\overline{S}_{\delta/4}(x^0)$ y todo $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ tenemos la desigualdad

$$|D^\alpha u|\leqslant M\,(4n/\delta)^{|\alpha|}\,|\alpha|^{|\alpha|}.$$

Ya que $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{k^{k+1/2}}{k!e^k}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ (fórmula de Stirling), existe una constante $C>0$ tal que para todo k natural $k^k\leqslant Ce^k k!$ y, consecuentemente, $|\alpha|^{|\alpha|}\leqslant Ce^{|\alpha|}(|\alpha|)!$

Haciendo en la identidad $(x_1+\ldots+x_n)^k=\sum\limits_{|\alpha|=k}\frac{(|\alpha|)!}{\alpha!}x^\alpha$ (que es válida para cualquier k natural) $x_1 \ldots = x_n = 1$, obtenemos la igualdad $n^k=\sum\limits_{|\alpha|=k}(|\alpha|)!/\alpha!$, de la cual se desprende la desigualdad $(|\alpha|)!/\alpha!\leqslant n^{|\alpha|}$. Por ello, para todo $x\in S_{\delta/4}(x^0)$ y todo α

$$|D^\alpha u|\leqslant CM\,(4n^2e/\delta)^{|\alpha|}\,\alpha!. \tag{14}$$

De (14) se deduce, ante todo, que la serie de Taylor de la función $u(x)$

$$\sum_\alpha \frac{D^\alpha u(x^0)}{\alpha!}(x-x^0)^\alpha$$

converge absolutamente en la bola $S=\left\{|x-x^0|<\frac{\delta}{4n^2e}\right\}$, por lo que la suma de esta serie es una función analítica en S. Demostremos que en la bola $S'=\left\{|x-x^0|<\frac{\delta}{8n^3e}\right\}$ la serie citada converge hacia la función $u(x)$. Para ello será suficiente mostrar que el término complementario en la fórmula de Taylor de la función u

$$R_N(x)=u(x)-\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{|\alpha|=k}\frac{D^\alpha u(x^0)}{\alpha!}(x-x^0)^\alpha=$$

$$=\sum_{|\alpha|=N}\frac{D^\alpha u(x^0+\theta(x-x^0))}{\alpha!}(x-x^0)^\alpha,$$

donde $|\theta|<1$, en cualquier punto S' tiende a cero cuando $N\to\infty$. Sabemos que para $x\in S'$ el punto $x^0+\theta(x-x^0)$ también está contenido en S' y, consecuentemente, en la bola $S_{\delta/4}(x^0)$. Por tanto, de (14) se deduce que para todos los x de S'

$$|R_N(x)| \leqslant \sum_{|\alpha|=N} CM\left(\frac{4n^2e}{\delta}\right)^N \left(\frac{\delta}{8n^3e}\right)^N \leqslant \frac{CM}{(2n)^N} n^N = \frac{CM}{2^N}.$$

Por eso, $R_N(x) \to 0$ cuando $N \to \infty$.

Dado que $x^0 \in Q$ es arbitrario, la función $u(x)$ es analítica en Q. El teorema está demostrado.

En el caso bidimensional, junto con el teorema 5 que establece el carácter analítico de una función armónica como función de dos variables x_1 y x_2, tiene lugar otra afirmación más profunda que liga funciones armónicas con funciones analíticas de una variable compleja $z = x_1 + ix_2$. Para simplificar, nos limitamos al caso de un dominio simplemente conexo.

TEOREMA 6. *Para que la función* $u(x_1, x_2)$ *sea armónica en el dominio simplemente conexo* Q, *es necesario y suficiente que exista una función* $f(z)$, $z = x_1 + ix_2$, *analítica en* Q, *tal que* $u(x_1, x_2) = \operatorname{Re} f(z)$.

SUFICIENCIA. Sea $f(z)$ analítica en el dominio Q. Entonces, las funciones $u(x_1, x_2) = \operatorname{Re} f(x_1 + ix_2)$ y $v(x_1, x_2) = \operatorname{Im} f(x_1 + ix_2)$ son indefinidamente diferenciables en Q y satisfacen las condiciones de Cauchy—Riemann

$$u_{x_1} = v_{x_2}, \qquad u_{x_2} = -v_{x_1}. \tag{15}$$

Derivando la primera de las igualdades (15) respecto a x_1, y la segunda, respecto a x_2, y sumando las correlaciones resultantes, obtenemos $\Delta u = 0$, es decir, u es una función armónica.

NECESIDAD. Sea u una función armónica en Q. Examinemos la función

$$v(x) = \int_{L(x^0,\, x)} -u_{x_2}\,dx_1 + u_{x_1}\,dx_2,$$

donde: $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ es un punto fijado de Q, $x = (x_1, x_2)$, y $L(x^0, x)$, una curva arbitraria enderezada que une los puntos x^0 y x y está ubicada en Q (del hecho de que el dominio Q es simplemente conexo se infiere, en virtud de la fórmula de Green, que la función v no depende del contorno de L). La función $v(x) \in C^1(Q)$ es la que satisface las condiciones (15). Por lo tanto, la función $f = u + iv$ es en Q analítica respecto de $x_1 + ix_2$. El teorema está demostrado.

OBSERVACIÓN 1. Una función analítica $f(z)$ según la función armónica $u(x_1, x_2)$, se determina con un error menor que una constante arbitraria puramente imaginaria. En efecto, sean $f_1(z) = u + iv_1$ y $f_2(z) = u + iv_2$ dos funciones analíticas en Q, para las cuales $\operatorname{Re} f_1 = \operatorname{Re} f_2 = u$. En este caso, será analítica en Q la función $f_1 - f_2 = iv$, donde la función (real) $v = v_1 - v_2$. En vista de las condiciones de Cauchy—Riemann, $v_{x_1} = v_{x_2} = 0$, es decir, $v_2 =$

$= v_1 + c$, donde c es una constante arbitraria real. Por eso, $f_2(z) = f_1(z) + ic$. La afirmación queda demostrada.

OBSERVACIÓN 2. Una afirmación análoga al teorema 6 tiene también lugar cuando Q es un dominio arbitrario. Entonces una función f, que es analítica respecto de $x_1 + ix_2$ en Q y está construida a base de la función u, armónica en Q, puede ser plurívoca. Por ejemplo, a la función $\ln |x|$, armónica en el anillo $\{1 < |x| < 2\}$, se le asigna la función plurívoca $\operatorname{Ln} z = \ln |x| + i \operatorname{Arg}(x_1 + ix_2)$ $(z = x_1 + ix_2)$ que es analítica en este anillo.

COROLARIO. *Supongamos que una función $z' = F(z) = F_1(x_1, x_2) + iF_2(x_1, x_2)$, $z = x_1 + ix_2$, analítica en el dominio simplemente conexo Q, representa biunívocamente este dominio en algún dominio simplemente conexo Q' de un plano complejo $z' = x_1' + ix_2'$. Si la función $u'(x')$ es armónica en Q', entonces la función $u(x) = u'(F_1(x), F_2(x))$ es armónica en Q.*

En efecto, sea $f'(z')$ una función analítica en Q' para la cual $u'(x') = \operatorname{Re} f'(z')$. Puesto que la función $f(z) = f'(F(z))$ es analítica en Q, la función $u(x) = u'(F_1(x), F_2(x)) = \operatorname{Re} f'(z') = \operatorname{Re} f(z)$ es armónica en Q.

Una propiedad importante de las funciones armónicas, que vamos a enunciar, se deduce del teorema en la media y se denomina principio de máximo.

TEOREMA 7 (principio de máximo). *Supongamos que una función $u(x)$ armónica en Q es continua en $\overline{Q}$. Entonces, o bien $u(x) = \text{const}$ en Q o bien*

$$\min_{x\in\partial Q} u(x) < u(x) < \max_{x\in\partial Q} u(x) \tag{16}$$

para todo $x \in Q$.

Sea $M = \max\limits_{x\in\overline{Q}} u(x)$. Mostremos que si en el dominio Q existe un punto en el que se infringe la desigualdad derecha en (16), entonces la función $u(x) = \text{const} = M$ en Q. Efectivamente, convengamos que tal punto existe. En este caso, en Q hay un punto x^0 en el cual $u = M$. Tomemos en Q un punto arbitrario y y mostremos que $u(y) = M$. Unamos el punto y con el punto x^0 mediante una quebrada L de eslabones finitos (que no se cruzan), totalmente dispuesta en Q. Sea $d > 0$ la distancia entre L y ∂Q. Cubramos la curva L por un número finito de bolas $S_i = \{|x - x^i| < d/2\}$, $i = 0, 1, \ldots, N$, cuyos centros $x^i \in L \cap S_{i-1}$, $i = 1, \ldots, N$. Aquí, el punto x^0 es el centro de la bola S_0, y el punto $y \in S_N$.

En virtud del segundo teorema en la media (teorema 2)

$$u(x^0) = \frac{n}{\sigma_n (d/2)^n} \int\limits_{|x-x^0|<d/2} u(x)\,dx,$$

es decir,
$$\int_{S_0} (u(x) - u(x^0))\, dx = 0.$$

Ya que el integrando $u(x) - u(x^0)$ es no positivo, la función $u(x) = u(x^0) = M$ en S_0 y, en particular, $u(x^1) = M$. Repitiendo para el punto x^1 y la bola S_1 los mismos razonamientos que hemos usado para el punto x^0 y la bola S_0, mostremos que $u(x) = M$ en S_1 y, en particular, $u(x^2) = M$. Y así sucesivamente. De resultas obtendremos que $u(x) = M$ en S_N y, en particular, $u(y) = M$.

Así pues, queda demostrado que o bien $u(x) = \text{const}$ en Q, o bien para todo x de Q tiene lugar la desigualdad derecha de (16). Aplicando esta afirmación a la función $-u(x)$, obtendremos que o bien $u(x) = \text{const}$ en Q, o bien para todo x de Q tiene lugar la igualdad izquierda de (16). El teorema está demostrado.

COROLARIO. *Del teorema 7 se deduce inmediatamente que para toda función $u(x)$, armónica en Q y continua en $\overline{Q}$, se cumple la igualdad*
$$\|u\|_{C(\overline{Q})} \leqslant \|u\|_{C(\partial Q)}. \tag{17}$$

TEOREMA 8. *Supongamos que las funciones $u_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$ $\ldots$, pertenecen a $C(\overline{Q})$ y son armónicas en Q. Si la sucesión $u_k|_{\partial Q}$, $k = 1, 2, \ldots$, es uniformemente convergente en ∂Q, la sucesión u_k, $k = 1, 2, \ldots$, será uniformemente convergente en $\overline{Q}$ hacia cierta función armónica en Q.*

Efectivamente, según (17) tenemos para cualesquiera s y m
$$\|u_s - u_m\|_{C(\overline{Q})} \leqslant \|u_s - u_m\|_{C(\partial Q)}.$$
Puesto que la sucesión $u_k|_{\partial Q}$, $k = 1, 2, \ldots$, converge uniformemente en ∂Q, $\|u_s - u_m\|_{C(\partial Q)} \to 0$ cuando $m, s \to \infty$ por eso $\|u_s - u_m\|_{C(\overline{Q})} \to 0$ cuando $m, s \to \infty$. Del hecho de que el espacio $C(\overline{Q})$ es completo se desprende que existe una función continua $u(x)$ hacia la cual en $\overline{Q}$ converge uniformemente la sucesión $u_k(x)$, $k = 1, \ldots$ Del teorema 4 proviene que la función $u(x)$ es armónica en Q. El teorema queda demostrado.

3. Sobre las soluciones clásicas del problema de Dirichlet para la ecuación de Poisson. Recordemos que la función $u(x)$ se llama solución clásica del problema de Dirichlet (primer problema de contorno) para la ecuación de Poisson
$$\Delta u = f, \quad x \in Q, \tag{18}$$
$$u|_{\partial Q} = \varphi, \tag{19}$$
siempre que $u(x) \in C^2(Q) \cap C(\overline{Q})$ y satisfaga las correlaciones (18) y (19).

Primero demostremos la unicidad de la solución.

TEOREMA 9. *El problema de Dirichlet para la ecuación de Poisson no puede tener más que una sola solución clásica.*

Sean $u_1(x)$ y $u_2(x)$ dos soluciones del problema (18), (19). Entonces, la función $u(x) = u_1(x) - u_2(x)$ es armónica en Q, continua en $\overline{Q}$ y se anula en ∂Q. Por eso, de la desigualdad (17) se deduce que $u = 0$ en Q, es decir, $u_1 = u_2$. El teorema está demostrado.

La existencia de la solución clásica del problema (18), (19) suponiendo que $\partial Q \in C^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}$, $f \in H^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}(Q)$, $\varphi \in C^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}(\partial Q)$, se estableció en el punto 3 del párrafo anterior. En realidad allí demostramos una afirmación más fuerte: para las suposiciones hechas con relación a ∂Q, f y φ, la solución generalizada u del problema (18), (19) pertenece al espacio $H_{\text{loc}}^{\left[\frac{n}{2}\right]+3}(Q) \cap H^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}(Q)$. De aquí, en virtud de los teoremas de inmersión, se infiere que $u(x) \in C^2(Q) \cap C(\overline{Q})$, es decir, es la solución clásica. Pero, la pertenencia de esta función a los espacios $H_{\text{loc}}^{\left[\frac{n}{2}\right]+3}(Q)$ y $H^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}(Q)$ son condiciones mucho más fuertes que la pertenencia a los espacios $C^2(Q)$ y $C(\overline{Q})$, respectivamente. Por eso, es natural esperar que la solución clásica exista para limitaciones mucho menos rigurosas en ∂Q, f y φ.

TEOREMA 10. *Si $\partial Q \in C^2$, $f \in C^1(\overline{Q})$, $\varphi \in C(\partial Q)$, el problema* (18), (19) *tiene solución clásica.*

Ante todo establezcamos la validez del teorema (10) en el caso de una ecuación homogénea (18), es decir, para el problema (1), (19).

LEMA 4. *Si $\partial Q \in C^2$ y $\varphi \in C(\partial Q)$, el problema* (1),(19) *tiene solución clásica.*

Supongamos al principio que $\partial Q \in C^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}$. Puesto que $\varphi \in C \times \times (\partial Q)$, existe una sucesión φ_k, $k = 1, 2, \ldots$, de funciones de $C^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}(\partial Q)$ que en ∂Q converge uniformemente hacia la función φ. (Efectivamente, la prolongación continua de la función φ en $\overline{Q}$ puede ser aproximada en $C(\overline{Q})$ por medio de las funciones de $C^\infty(\overline{Q})$, mientras que sus valores en el contorno pertenecen a $C^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}(\partial Q)$.) Mas, para toda φ_k existe una función $u_k(x)$, armónica en Q, que es la solución clásica del problema (1), (19) con esta función de frontera. Según el teorema (8), la sucesión $u_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, converge en $\overline{Q}$ uniformemente. Con ello, la función límite $u(x)$ es armónica en Q, continua en $\overline{Q}$ y satisface la condición límite (19), es decir, es solución clásica del problema (1), (19).

Sea, ahora, $\partial Q \in C^2$. Designemos con Φ una prolongación continua de la función límite φ en $\overline{Q}$, y sea $M = \max_{x\in\overline{Q}} |\Phi(x)|$. Tomemos una sucesión de dominios Q_i, $i=1, 2, \ldots$, que posee las siguientes propiedades: $Q_i \Subset Q_{i+1}$ para todo $i = 1, 2, \ldots$; $\bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i = Q$; $\partial Q_i \in C^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}$, $i=1, 2, \ldots$. De acuerdo con lo demostrado, para todo $i=1, 2, \ldots$ en el dominio Q_i existe una solución clásica $v_i(x)$ del problema (1), (19) que satisface la condición límite $v_i|_{\partial Q_i} = \Phi|_{\partial Q_i}$. Además, para todo $i=1, 2, \ldots$

$$\max_{x\in\overline{Q}_i} \times |v_i(x)| \leqslant M.$$

Designemos por $u_i(x)$ una función dada en $\overline{Q}$, que es igual a $v_i(x)$ en $\overline{Q}_i$ y es nula fuera de $\overline{Q}_i$, $i = 1, 2, \ldots$ En virtud del teorema 3, la sucesión de funciones $u_2(x)$, $u_3(x)$, $\ldots$, armónicas en Q_2, contiene una subsucesión $u_{11}, u_{12}, \ldots$, convergente uniformemente en $\overline{Q}_1$. La sucesión $u_{11}, u_{12}, \ldots$ se compone de funciones que son armónicas en Q_3 (si eliminamos la función $u_2(x)$, que posiblemente está contenida en ella). Por eso, según el teorema 3, de esta última sucesión se puede extraer una subsucesión $u_{21}, u_{22}, \ldots$, que sea uniformemente convergente en $\overline{Q}_2$. Y así, sucesivamente.

Tomemos una sucesión diagonal $u_{11}, u_{22}, \ldots, u_{pp}, \ldots$ y designemos por Q_{ii}, $i = 1, 2, \ldots$, una subsucesión correspondiente de la subsucesión de dominios Q_m, $m = 1, 2, \ldots$: la función u_{ii} es igual en $\overline{Q}_{ii}$ a v_{ii} y es nula fuera de $\overline{Q}_{ii}$. Es evidente que la sucesión u_{pp}, $p = 1, 2, \ldots$, converge en Q y que esta convergencia es uniforme en cualquier $\overline{Q}_{ii}$. Por lo tanto, de acuerdo con el teorema 4, la función límite $u(x)$ es armónica en Q. Además, $|u(x)| \leqslant M$, cualquier que sea $x \in Q$.

Mostremos que la función $u(x)$ es continua en $\overline{Q}$ y satisface la condición límite (19), en otras palabras, demostremos que $u(x)$ es una solución clásica del problema (1), (19).

Elijamos un punto arbitrario $x^0 \in \partial Q$. Ya que $\partial Q \in C^2$, existen un punto $x^1 \notin \overline{Q}$ y $r > 0$ tales que una bola $\{|x - x^1| < r\}$, hace contacto con el contorno ∂Q en el punto x^0, no contiene puntos del dominio Q, mientras que la esfera $\{|x - x^1| = r\}$ tiene sólo un punto (x^0) común con ∂Q. Fijemos cualquier $\varepsilon > 0$. Puesto que la función $\Phi(x)$ es continua en el punto x^0, existe tal $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ que $|\Phi(x) - \Phi(x^0)| < \varepsilon$ para todos los puntos de la bola $\{|x - x^0| < \delta\}$ que se encuentran fuera de $\overline{Q}$. Como la función

$$w(x) = \frac{1}{r^{n-2}} - \frac{1}{|x - x^1|^{n-2}},$$

armónica para $x \neq x^1$ (para concretar, consideramos el caso en que $n > 2$; si $n = 2$, $w(x) = -\ln r + \ln |x - x^1|$), es no negativa para todo $x \in \overline{Q}$ y se anula sólo en un solo punto x^0 de $\overline{Q}$, se puede hallar $C = C(\delta) > 0$ tal que para todo $x \in \overline{Q}$ serán válidas las desigualdades

$$\Phi(x^0) - \varepsilon - Cw(x) < \Phi(x) < \Phi(x^0) + \varepsilon + Cw(x).$$

Las funciones $u_{pp}(x) + Cw(x)$ y $u_{pp}(x) - Cw(x)$ son armónicas en Q_{pp}, continuas en $\overline{Q}_{pp}$ y, además, para ellas tienen lugar las expresiones $(u_{pp} + Cw)|_{\partial Q_{pp}} = (\Phi + Cw)|_{\partial Q_{pp}} > \Phi(x^0) - \varepsilon$; $(u_{pp} - Cw)|_{\partial Q_{pp}} = (\Phi - Cw)|_{\partial Q_{pp}} < \Phi(x^0) + \varepsilon$. Por ello, según el principio de máximo, en el dominio Q_{pp} tenemos: $u_{pp}(x) + Cw(x) > \Phi(x^0) - \varepsilon$ y $u_{pp}(x) - Cw(x) < \Phi(x^0) + \varepsilon$, es decir,

$$\Phi(x^0) - \varepsilon - Cw(x) \leqslant u_{pp}(x) \leqslant \Phi(x^0) + \varepsilon + Cw(x)$$

para todo $x \in Q_{pp}$. Por lo tanto, para cualquier $x \in Q$

$$\Phi(x^0) - \varepsilon - Cw(x) \leqslant u(x) \leqslant \Phi(x^0) + \varepsilon + Cw(x).$$

Puesto que $w(x) \to 0$ para todo $x \to x^0$, estas desigualdades engendran, a su vez, las desigualdades siguientes

$$\Phi(x^0) - \varepsilon \geqslant \underline{\lim}_{x \to x^0} u(x) \leqslant \overline{\lim_{x \to x^0}} u(x) \leqslant \Phi(x^0) + \varepsilon,$$

de donde, por ser $\varepsilon > 0$ arbitrario, se deduce que $u(x)$ es continua en x^0 y $u(x^0) = \Phi(x^0) = \varphi(x^0)$. El lema está demostrado.

DEMOSTREMOS AHORA EL TEOREMA 10. Examinemos la función $u_0(x) = \int\limits_Q U(x-y) f(y)\, dy$, que es un potencial volumétrico de densidad f. Según el lema 2, $u_0(x) \in C^2(Q) \cap C^1(\overline{Q})$ es en Q la solución de la ecuación (18). De acuerdo con el lema 4, existe la solución clásica $v(x)$ del problema $\Delta v = 0$ en Q, $v|_{\partial Q} = \varphi - u_0|_{\partial Q}$. En este caso, $u = u_0 + v$ es solución clasica del problema (18), (19). El teorema está demostrado.

Valiéndonos del teorema 10, enunciemos la siguiente importante propiedad de las funciones armónicas.

TEOREMA 11 (sobre la eliminación de la singularidad). *Supongamos que la función $u(x)$ es armónica en el dominio $Q \setminus \{x^0\}$, donde x^0 es un punto del dominio Q. Si para $x \to x^0$, $u(x) = o(U(x - x^0))$, donde U es la solución fundamental de la ecuación de Laplace, entonces, existe $\lim\limits_{x \to x^0} u(x) = A$, y la función $u(x)$, definida complementariamente en el punto x^0 por el valor de A, es armónica en Q.*

DEMOSTRACIÓN. Tomemos una bola $S_R(x^0) = \{ |x - x^0| < R\}$ estrictamente interior respecto de Q. Designemos con $v(x)$ la solución clásica del problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace en la bola $S_R(x^0)$ que satisfaga la condición límite $v|_{\partial S_R(x^0)} =$

$= u \mid_{\partial S_R(x^0)}$. La función $u(x) - v(x) = w(x)$ es armónica en $S_R(x^0) \setminus \{x^0\}$, y $w \mid_{\partial S_R(x^0)} = 0$. Para demostrar el teorema basta mostrar que en todo punto del conjunto $S_R(x^0) \setminus \{x^0\}$ la función $w = 0$: en este caso la función $u(x)$ coincide con la función $v(x)$ para todos los puntos $x \in S_R(x^0) \setminus \{x^0\}$ y, por tanto, la función $u(x)$, definida complementariamente en el x^0 por el número $A = v(x^0)$, coincide con la función armónica $v(x)$ por toda la bola $S_R(x^0)$.

Examinemos, siendo $\varepsilon > 0$ arbitrario, dos funciones

$$z_\pm(x) = \frac{\varepsilon}{|x - x^0|^{n-2}} \pm w(x)$$

(supongamos, para concretar, que la dimensión del espacio es $n > 2$; cuando $n = 2$, las funciones $z_\pm(x) = \varepsilon \ln \frac{2R}{|x - x^0|} \pm w(x)$). Las funciones $z_\pm(x)$ son armónicas en $S_R(x^0) \setminus \{x^0\}$, y $z_\pm(x) \mid_{\partial S_R(x^0)} = \varepsilon / R^{n-2} > 0$. Dado que, por la condición, $u(x) = o\left(\frac{1}{|x - x^0|^{n-2}}\right)$ para $x \to x^0$, entonces $z_\pm(x) \mid_{|x-x^0|=\rho} = \frac{\varepsilon}{\rho^{n-2}} \pm w_{|x-x^0|=\rho} = \frac{\varepsilon}{\rho^{n-2}} + o\left(\frac{1}{\rho^{n-2}}\right)$. Por lo tanto, cuando $\rho > 0$ son suficientemente pequeños, $z_\pm(x) \mid_{|x-x^0|=\rho} > 0$. De acuerdo con el principio de máximo, $z_\pm(x) > 0$ para todo x de la capa esférica $\rho \leqslant |x - x^0| \leqslant R$. Sea x^1 un punto cualquiera de $S_R(x^0) \setminus \{x^0\}$. Siendo ρ suficientemente pequeño, este punto pertenece a la capa esférica $\rho \leqslant |x - x^0| \leqslant R$. Por consiguiente, $z_\pm(x^1) > 0$, es decir, $|w(x^1)| < \frac{\varepsilon}{|x^1 - x^0|^{n-2}}$, de donde, por ser $\varepsilon > 0$ arbitrario, tenemos: $w(x^1) = 0$. El teorema queda demostrado.

En el teorema 10 fue demostrada la existencia de una solución clásica del problema de Dirichlet (18), (19) para cualesquiera $f \in C^1(\overline{Q})$, $\varphi \in C(\partial Q)$, $\partial Q \in C^2$. Surge la pregunta: ¿no será suficiente, para que este problema sea soluble, suponer sólo el cumplimiento de la condición $f \in C(\overline{Q})$? La condición $f \in C^1(\overline{Q})$ es realmente exagerada: se puede demostrar que para poder solucionar el problema en cuestión, es suficiente suponer que la función f satisface en $\overline{Q}$ la condición de Hölder de cierto orden positivo*). Sin embargo, como lo demuestra un ejemplo que sigue, no se puede sustituir esta condición por la condición $f \in C(\overline{Q})$.

---

*) Suele decirse que la función $f(x)$ satisface en Q la condición de Hölder del orden $\alpha > 0$, si existe una constante M tal que para cualesquiera puntos x' y x'' de Q $|f(x') - f(x'')| \leqslant M |x' - x''|^\alpha$.

En la bola $Q = \{ |x| < R \}$ de radio $R < 1$ examinemos la ecuación de Poisson

$$\Delta u = \frac{x_2^2 - x_1^2}{2|x|^2} \left(\frac{n+2}{(-\ln|x|)^{1/2}} + \frac{1}{2(-\ln|x|)^{3/2}} \right) \tag{20}$$

cuya función en el segundo miembro (definámosla complementariamente por el cero en el origen de coordenadas) es continua en $\overline{Q}$. La función

$$u(x) = (x_1^2 - x_2^2)(-\ln|x|)^{1/2} \tag{21}$$

pertenece a $C(\overline{Q}) \cap C^\infty(\overline{Q} \setminus \{0\})$ (el punto $\{0\}$ es el origen de coordenadas) y, como se comprueba con facilidad, satisface en $Q \setminus \{0\}$ la ecuación (20) y la condición límite

$$u|_{|x|=R} = \sqrt{-\ln R}\,(x_1^2 - x_2^2)|_{|x|=R}. \tag{22}$$

No obstante, la función $u(x)$ no puede ser solución clásica del problema (20), (22): ya que

$$\lim_{|x|\to 0} u_{x_1x_1} = \lim_{|x|\to 0} \Big(2(-\ln|x|)^{1/2} + \frac{x_1^2(x_1^2 - x_2^2)}{|x|^4(-\ln|x|)^{1/2}} - \\ - \frac{2x_1^2}{|x|^2(-\ln|x|)^{1/2}} - \frac{x_1^2 - x_2^2}{2|x|^2(-\ln|x|)^{1/2}} - \\ - \frac{x_1^2(x_1^2 - x_2^2)}{4|x|^4(-\ln|x|)^{3/2}}\Big) = \infty,$$

entonces $u(x) \notin C^2(Q)$.

Mostremos que el problema (20), (22) no tiene, en general, ninguna solución clásica.

Supongamos, al contrario, que la solución clásica $v(x)$ de este problema existe. Entonces, la función $w(x) = u(x) - v(x)$ es armónica y continua en $Q \setminus \{0\}$. Según el teorema sobre la eliminación de la singularidad, la función $w(x)$ puede ser definida complementariamente en el origen de coordenadas de manera tal que se haga armónica en Q y, consecuentemente, pertenezca a $C^2(Q)$. Por esta razón, en particular, existe el límite (finito) $\lim\limits_{|x|\to 0} w_{x_1x_1}$. La existencia del límite finito $\lim\limits_{|x|\to 0} v_{x_1x_1}$ se deduce del hecho de que $v(x)$ pertenece al espacio $C^2(\overline{Q})$. Y, por lo tanto, debe existir un límite finito $\lim\limits_{|x|\to 0} u_{x_1x_1} = \lim\limits_{|x|\to 0} w_{x_1x_1} + \lim\limits_{|x|\to 0} v_{x_1x_1}$. Esta contradicción demuestra la afirmación.

Ya usamos varias veces la fórmula (8) que nos proporciona la representación de una función arbitraria $u(x)$ de $C^2(\overline{Q})$ en términos de los valores en Q de su operador de Laplace y de los valores de u y $\frac{\partial u}{\partial n}$ en el contorno ∂Q. En lo sucesivo necesitaremos una fórmula más de este género.

Señalemos, ante todo, que para una función arbitraria $u(x)$ de $C^2(\overline{Q})$ y para cualquier punto $y \notin \overline{Q}$ tiene lugar la igualdad

$$0 = \int_Q U(y-\xi)\,\Delta u(\xi)\,d\xi + \\ + \int_{\partial Q} \left[u(\xi) \frac{\partial U(y-\xi)}{\partial n_\xi} - \frac{\partial u(\xi)}{\partial n} U(y-\xi) \right] dS_\xi, \qquad (23)$$

donde $U(y-\xi)$ es la solución fundamental de la ecuación de Laplace.

Para demostrar esta igualdad es suficiente hacer uso de la fórmula de Green aplicada a las funciones $u(\xi)$ y $U(y-\xi)$ en el dominio Q:

$$\int_Q [u(\xi)\,\Delta_\xi U(y-\xi) - U(y-\xi)\,\Delta u(\xi)]\,d\xi = \\ = \int_{\partial Q} \left[u(\xi) \frac{\partial U(y-\xi)}{\partial n_\xi} - U(y-\xi) \frac{\partial u(\xi)}{\partial n} \right] dS_\xi,$$

teniendo, además, en cuenta el hecho de que la función $U(y-\xi)$ es armónica en Q según ξ.

Tomemos, ahora, puntos cualesquiera $x \in Q$, $y \notin \overline{Q}$ y una función arbitraria $d(y)$ continua fuera de $\overline{Q}$. Multiplicando (23) por $d(y)$ y restando, término a término, la igualdad obtenida de (8), resulta que para toda función u de $C^2(\overline{Q})$ tiene lugar la representación

$$u(x) = \int_Q [U(x-\xi) - d(y)\,U(y-\xi)]\,\Delta u(\xi)\,d\xi + \\ + \int_{\partial Q} \left[\frac{\partial u(\xi)}{\partial n} (d(y)\,U(y-\xi) - U(x-\xi) + \right. \\ \left. + u(\xi) \frac{\partial}{\partial n_\xi} (U(x-\xi) - d(y)\,U(y-\xi)) \right] dS_\xi \qquad (24)$$

cualesquiera que sean $x \in Q$, $y \notin \overline{Q}$ y la función arbitraria $d(y)$ continua fuera de $\overline{Q}$.

Se puede mostrar que haciendo suposiciones bastante amplias respecto al dominio Q existen tal representación $y = y(x)$, que a todo punto $x \in Q$ le pone en correspondencia un punto $y \notin \overline{Q}$, y tal función $d(y(x))$, que para todo $x \in Q$

$$d(y(x))\,U(y(x)-\xi) - U(x-\xi) \equiv 0, \qquad \xi \in \partial Q. \qquad (25)$$

La fórmula (24) nos dará una representación en Q de la función arbitraria $u(x)$ de $C^2(\overline{Q})$ en términos de sus valores en el contorno y del valor del operador de Laplace de esta función en Q. Nos limitaremos al caso en el que Q es una bola; en este caso las funciones $y(x)$ y $d(y(x))$ se hallan fácilmente en forma explícita.

Así pues, sea $Q = \{|\xi| < R\}$, y sea, para concretar, $n > 2$ la dimensión del espacio. Entonces, la condición (25) tendrá por expresión

$$\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}} - \frac{d(y(x))}{|y(x)-\xi|^{n-2}} = 0, \qquad |\xi| = R,$$

o bien, al designar $d^{1/(n-2)}$ por b:

$$\frac{1}{|x-\xi|} = \frac{b(y(x))}{|y(x)-\xi|}, \qquad |\xi| = R. \tag{26}$$

La representación $y = y(x)$, la buscaremos en la forma

$$y = a(x)\, x \tag{27}$$

con una función $a(x)$ por ahora incógnita. La identidad (26) se cumplirá, si las funciones $a(x)$ y $b(y(x))$ están ligadas por la correlación

$$|y(x) - \xi|^2 = b^2(y(x))\, |x-\xi|^2, \qquad |\xi| = R,$$

o por la coorrelación

$$(a^2(x) - b^2(y(x)))\, |x|^2 + (1 - b^2(y(x)))\, R^2 =$$
$$= 2(x, \xi)\,(a(x) - b^2(y(x))), \qquad |\xi| = R.$$

Hagamos $b(y(x)) = \frac{R}{|x|}$, $a(x) = b^2(y(x)) = \frac{R^2}{|x|^2}$. En este caso, se cumple la identidad (26), y para cualquier $x \in Q$, el punto

$$y = y(x) = a(x)\, x = \frac{R^2}{|x|^2}\, x \tag{28}$$

se encuentra fuera de $\overline{Q}$, puesto que cuando $|x| < R$, $|y| = R^2/|x| > R$.

Para la esfera $\{|\xi| = R\}$ la normal $n_\xi = \xi/|\xi| = \xi/R$, a consecuencia de lo cual

$$\frac{\partial}{\partial n_\xi}\left(\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}\right) = \left(\nabla_\xi \frac{1}{|x-\xi|^{n-2}},\, n_\xi\right) = \frac{n-2}{|x-\xi|^n}(x-\xi,\, n_\xi) =$$
$$= \frac{(n-2)(x-\xi,\, \xi)}{R\,|x-\xi|^n} = \frac{(n-2)((x,\xi) - R^2)}{R\,|x-\xi|^n}. \tag{29}$$

De un modo análogo se calcula $\frac{\partial}{\partial n_\xi}(1/|y(x) - \xi|^{n-2})$. Por esto, valiéndonos de (26), resulta para $|\xi| = R$

$$\frac{\partial}{\partial n_\xi}\left(\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}} - \frac{b^{n-2}(y(x))}{|y(x)-\xi|^{n-2}}\right) =$$
$$= \frac{(n-2)}{R\,|x-\xi|^n}\left[(x,\xi) - R^2 - \frac{(y(x),\xi) - R^2}{b^2(y(x))}\right] = \frac{|x|^2 - R^2}{R\,|x-\xi|^n}(n-2).$$

De este modo, si $u(x) \in C^2(|x| \leqslant R)$, para todo punto x, $|x| < R$, será válida la igualdad

$$u(x) = \int\limits_{|\xi|=R} P_R(x, \xi)\, u(\xi)\, dS_\xi - \int\limits_{|\xi|<R} G_R(x, \xi)\, \Delta u(\xi)\, d\xi, \tag{30}$$

donde

$$P_R(x, \xi) = \frac{R^2 - |x|^2}{\sigma_n R\, |x-\xi|^n}, \tag{31}$$

y

$$G_R(x, \xi) = \frac{1}{\sigma_n}\left(\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}} - \frac{(R/|x|)^{n-2}}{|(R/|x|)^2 x - \xi)|^{n-2}}\right). \tag{32}$$

De modo absolutamente igual se establece la representación (30) para el caso bidimensional, es decir, cuando $n = 2$. En este caso la función $P_R(x, \xi)$ tiene la forma (31), y

$$G_R(x, \xi) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{|x|\left|\xi - \frac{R^2}{|x^2|}x\right|}{R\,|x-\xi|}. \tag{32'}$$

La función $P_R(x, \xi)$, definida para $|\xi| = R$, $|x| \leqslant R$, por la fórmula (31), se llama *núcleo de Poisson* del primer problema de contorno (problema de Dirichlet) para el operador de Laplace en la bola $\{|x| < R\}$.

La función $G_R(x, \xi)$, definida para $|\xi| \leqslant R$, $|x| \leqslant R$, por la fórmula (32) cuando $n > 2$ y por la (32'), cuando $n = 2$, se llama *función de Green* del primer problema de contorno (problema de Dirichlet) para el operador de Laplace en la bola $\{|x| < R\}$.

LEMA 5. *La función $G_R(x, \xi)$, definida en el dominio $\{x \neq \xi$, $x \neq \xi R^2/|\xi|^2\}$ del espacio R_{2n} por la fórmula (32) para $n > 2$ y por la fórmula (32') para $n = 2$, es continua en este dominio y posee las siguientes propiedades:*

a) $G_R(x, \xi) = 0$ *cuando* $|x| = R$,

b) $G_R(x, \xi) = G_R(\xi, x)$,

c) $G_R(x, \xi)$ *es armónica respecto de x y de ξ.*

d) *cuando* $|x| \leqslant R$, $|\xi| \leqslant R$ *se tiene:* $0 \leqslant G_R(x, \xi) \leqslant 1/(\sigma_n |x - \xi|^{n-2})$ *para* $n > 2$, *y* $0 \leqslant G_R(x, \xi) \leqslant \frac{1}{2\pi} \ln \frac{2R}{|x-\xi|}$ *para* $n = 2$.

La propiedad a) de la función $G_R(x, \xi)$ se deduce directamente de (32) (o de (32'), cuando $n = 2$).

Para cualesquiera x y ξ es válida la igualdad $|R^2\xi - x|\xi|^2|\,|x|^2 = |R^2 x - \xi|x|^2|^2\,|\xi|^2$. De ésta se infiere inmediatamente que la condición $\xi = xR^2/|x|^2$ es equivalente a la condición: $x = \xi R^2/|\xi|^2$; por tanto, si el punto (x, ξ) (de R_{2n}) pertenece al dominio de definición de la función $G_R(x, \xi)$, entonces el punto (ξ, x) también pertenece a dicho dominio. Además, de la indicada igualdad se desprende que $\frac{R}{|x|\,|R^2x/|x|^2-\xi|}=\frac{R}{|\xi|\,|R^2\xi/|\xi|^2-x|}$, y, por consiguiente, la igualdad $G_R(x,\xi)=G_R(\xi,x)$. La propiedad b) está demostrada.

De (32) (ó de (32′), cuando $n=2$) proviene que la función $G_R(x,\xi)$ es armónica respecto a ξ. Dado que la función $G_R(x,\xi)$ es simétrica (propiedad b)), es armónica también respecto a x. La propiedad c) está demostrada.

La desigualdad derecha de la propiedad d) se deduce, cuando $n>2$, de (32). Para demostrar la desigualdad derecha de la misma propiedad, cuando $n=2$, indiquemos que siendo $|x|\leqslant R$, $|\xi|\leqslant R$ $|x|\;|\xi-R^2x/|x|^2|=|\xi|\,|x|-R^2x/|x||\leqslant$ $\leqslant|\xi|\,|x|+R^2\leqslant 2R^2$. Por tanto, cuando $|x|\leqslant R$, $|\xi|\leqslant R$ $0\leqslant\ln\frac{2R^2}{|x|\,|\xi-R^2x/|x|^2|}$, y consecuentemente

$$G_R(x,\xi)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{2R}{|x-\xi|}-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{2R^2}{|x|\,|\xi-R^2x/|x|^2|}\leqslant\frac{1}{2\pi}\ln\frac{2R^2}{|x-\xi|}.$$

Ahora, demostremos las desigualdades izquierdas de la propiedad d). Sea primero $x=0$. Según dice la propiedad b), $G_R(0,\xi)=$ $=G_R(\xi,0)$, por lo que $G_R(0,\xi)=\frac{1}{\sigma_n}\left(\frac{1}{|\xi|^{n-2}}-\frac{1}{R^{n-2}}\right)\geqslant 0$ cuando $n>2$ y $G_R(\xi)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{R}{|\xi|}\geqslant 0$, cuando $n=2$.

Ahora tomemos un punto arbitrario x^0, $0<|x^0|<R$, y una bola $\{|\xi-x^0|<\varepsilon\}$ de radio ε, $0<\varepsilon<R-|x^0|$, ubicada en otra bola $\{|\xi|<R\}$. De acuerdo con las propiedades a) y b), $G_R(x^0,\xi)\equiv 0$ para $|\xi|=R$. Cuando ε es suficiente pequeño, en la esfera $\{|\xi-x^0|=\varepsilon\}$

$$G_R(x^0,\xi)=\frac{1}{\sigma_n\varepsilon^{n-2}}-\frac{(R/|x^0|)^{n-2}}{\sigma_n|x^0R^2/|x^0|^2-\xi|^{n-2}}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1}{\sigma_n}\left(\frac{1}{\varepsilon^{n-2}}-\frac{1}{(R-|x^0|)^{n-2}}\right)>0\quad\text{para}\quad n>2$$

y

$$G_R(x,\xi)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{2\pi}\ln\frac{|x^0|\,|\xi-R^2x^0/|x^0|^2|}{R}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1}{2\pi}\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}+\ln(R-|x^0|)\right)>0\quad\text{cuando}\quad n=2.$$

Por ello, en virtud del principio de máximo, una función $G_R(x^0,\xi)$, armónica respecto de ξ es mayor que 0 en el dominio $\{|\xi|<R\}\setminus$ $\setminus\{|\xi-x^0|\leqslant\varepsilon\}$. Ya que el número $\varepsilon>0$ puede elegirse arbitrariamente pequeño, de la última desigualdad se desprende la desigualdad izquierda en d). El lema está demostrado.

La representación integral (30) se ha obtenido suponiendo que la función $u(x) \in C^2(|x| \leqslant R)$. El lema 5 permite obtener esta representación con menores exigencias a la función u.

LEMA 6. *Supongamos que la función $u(x) \in C(|x| \leqslant R) \cap C^2(|x| < R)$ y la función $\Delta u(x)$ es acotada en la bola $\{|x| < R\}$. Entonces, para todo punto x, $|x| < R$, es válida la igualdad* (30).

Sea x^0 un punto arbitrario de la bola $\{|x| < R\}$, y sean ρ_0 y ρ unos números tales que $|x^0| < \rho_0 \leqslant \rho < R$. Puesto que $u(x) \in C^2(|x| \leqslant \rho)$, en vista de (30) para todo x, $|x| < \rho$, y, en particular, para $x = x$, tenemos

$$u(x^0) = \int\limits_{|\xi|=\rho} P_\rho(x^0, \xi)\, u(\xi)\, dS_\xi - \int\limits_{|\xi|<\rho} G_\rho(x^0, \xi)\, \Delta u(\xi)\, d\xi. \tag{33}$$

En la integral de (33) por la esfera $\{|\xi| = \rho\}$, hagamos un cambio de variables $\xi = \frac{\eta}{R}\rho$:

$$\int\limits_{|\xi|=\rho} P_\rho(x^0, \xi)\, u(\xi)\, dS_\xi = \left(\frac{\rho}{R}\right)^{n-1} \int\limits_{|\eta|=R} P_\rho\left(x^0, \frac{\eta\rho}{R}\right) u\left(\frac{\eta\rho}{R}\right) dS_\eta.$$

Puesto que la función $(\rho/R)^{n-1} P_\rho(x^0, \eta\rho/R)\, u(\eta\rho/R)$ según las variables $\eta_1, \ldots, \eta_n$, es continua en el conjunto $\{|\eta| = R, \rho_0 \leqslant \rho \leqslant R\}$ y para $\rho \to R$ se observa que $(\rho/R)^{n-1} P_\rho(x^0, \eta\rho/R)\, u(\eta\rho/R) \to P_R(x^0, \eta)\, u(\eta)$, entonces

$$\lim_{\rho \to R} \int\limits_{|\xi|=\rho} P_\rho(x^0, \xi)\, u(\xi)\, dS_\xi = \int\limits_{|\xi|=R} P_R(x^0, \xi)\, u(\xi)\, dS_\xi. \tag{34}$$

Examinemos ahora el segundo sumando del segundo miembro en (33). Designemos con $\widetilde{G}_\rho(x^0, \xi)$ una función igual a $G_\rho(x^0, \xi)$ cuando $|\xi| < \rho$ y nula cuando $|\xi| \geqslant \rho$. Entonces:

$$\int\limits_{|\xi|<\rho} G_\rho(x^0, \xi)\, \Delta u(\xi)\, d\xi = \int\limits_{|\xi|<R} \widetilde{G}_\rho(x^0, \xi)\, \Delta u(\xi)\, d\xi.$$

Es evidente que $\widetilde{G}_\rho(x^0, \xi) \to G_R(x^0, \xi)$ cuando $\rho \to R$, cualquiera que sea $\xi \neq x^0$, $\xi < R$. Además, en virtud de la propiedad d) del lema 5, la función $\widetilde{G}_\rho(x^0, \xi)\, \Delta u(\xi)$ es mayorada por una función que no depende de ρ y es integrable en la bola $\{|\xi| < R\}$:

$$|\widetilde{G}_\rho(x^0, \xi)\, \Delta u(\xi)| \leqslant \frac{M}{\sigma_n |x^0 - \xi|^{n-2}} \quad \text{para} \quad n > 2$$

y

$$|\widetilde{G}_\rho(x^0, \xi)\, \Delta u(\xi)| \leqslant \frac{M}{2\pi} \ln \frac{2R}{|x^0 - \xi|} \quad \text{para} \quad n = 2,$$

donde $M = \sup_{|x| \leqslant R} |\Delta u(x)|$. Por eso, en virtud del teorema de Lebesgue

$$\lim_{\rho \to R} \int_{|\xi| < \rho} G_\rho(x^0, \xi) \Delta u(\xi) \, d\xi = \int_{|\xi| < R} G_R(x^0, \xi) \Delta u(\xi) \, d\xi. \qquad (35)$$

Pasando en (33) al límite para $\rho \to R$, haciendo uso de (34) y (35), obtendremos la igualdad (30) para cualquier punto de la bola $\{|x| < R\}$. El lema está demostrado.

Del lema 6 se desprende que la solución clásica del problema de Dirichlet

$$\Delta u = f, \quad |x| < R, \qquad (36)$$
$$u|_{\{|x| = R\}} = \varphi$$

para la función φ continua en la esfera $\{|x| = R\}$ y para la función f, acotada y continua en la bola $\{|x| < R\}$, se representa (si es que existe) en la forma

$$u(x) = \int_{|\xi| = R} P_R(x, \xi) \varphi(\xi) \, dS_\xi - \int_{|\xi| < R} G_R(x, \xi) f(\xi) \, d\xi. \qquad (37)$$

Señalemos que estas condiciones (como lo demuestra el ejemplo citado más arriba) no garantizan la existencia de la solución clásica.

En virtud del teorema 10, para la existencia de la solución clásica del problema (36) es suficiente exigir que $f(x) \in C^1(|x| \leqslant R)$. De este modo, del teorema (10) y el lema 6 se deduce la siguiente afirmación.

TEOREMA 12. *Si* $f(x) \in C^1(|x| \leqslant R)$ y $\varphi(x) \in C(|x| = R)$, *entonces la solución clásica del problema de Dirichlet* (36) *existe y se representa en la forma* (37).

OBSERVACIÓN. Sea Q un dominio simplemente conexo del plano (x_1, x_2), y sea $z' = F(z)$, $z = x_1 + ix_2$, $z' = x_1' + ix_2'$, una función analítica en Q y continuamente diferenciable (respecto de x_1, x_2) en $\overline{Q}$, que realiza la representación biunívoca del dominio Q en el círculo $\{|z'| < R\}$ de radio R $(R = |F(z)|_{z \in \partial Q})$.

Designemos por $u(z) = u(x_1, x_2)$ la solución clásica del problema de Dirichlet

$$\Delta u = 0, \qquad z \in Q, \qquad (38)$$
$$u|_{z \in \partial Q} = \varphi(z),$$

donde $\varphi(z) \in C(\partial Q)$, y por $u'(z') = u'(x_1', x_2')$, la solución clásica del problema de Dirichlet

$$\Delta u' = 0 \quad |z'| < R,$$
$$u'|_{\{|z| = R\}} = \psi(z'),$$

donde

$$\psi(z') = \varphi(F_{-1}(z')) \quad (F_{-1}(F(z)) \equiv z, \; z \in Q).$$

Según el teorema 12,

$$u'(z') = \frac{1}{2\pi R} \int\limits_{|\zeta'|=R} \frac{R^2 - |z'|^2}{|z' - \zeta'|^2} \psi(\zeta') \, |d\zeta'|.$$

Del teorema de unicidad de la solución clásica del problema de Dirichlet (teorema 9) y del corolario al teorema 6 se infiere que $u(z) = u(F_{-1}(z')) = u'(z')$. Por ello, la solución del problema (38) tiene por expresión

$$u(z) = \frac{1}{2\pi R} \int\limits_{\partial Q} \frac{R^2 - |F(z)|^2}{|F(z) - F(\zeta)|^2} |F'(\zeta)| \, \varphi(\zeta) \, |d\zeta| =$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\partial Q} \frac{|F(\zeta)|^2 - |F(z)|^2}{|F(\zeta) - F(z)|^2} \frac{|F'(\zeta)|}{|F(\zeta)|} \varphi(\zeta) \, |d\zeta|.$$

4. Funciones armónicas en dominios no acotados. Sea Q un dominio no acotado del especio R_n y supongamos que su complemento $R_n \setminus D$ contiene por lo menos un punto interior; dispongamos en éste el origen de coordenadas.

Examinemos una representación biunívoca

$$x' = \frac{x}{|x|^2} \tag{39}$$

del dominio $R_n \setminus \{0\}$ de sí mismo. Esta representación se llama *transformación de inversión* (respecto de la esfera $\{|x| = 1\}$), de la cual ya hicimos uso en el punto anterior. Realizándose la representación (39), la esfera $\{|x| = 1\}$ se transforma en sí misma, el dominio $\{0 < |x| < 1\}$ se representa en el dominio $\{|x| > 1\}$ y, viceversa, el dominio $\{|x| > 1\}$ se representa en el dominio $\{0 < |x| < 1\}$. Es evidente, que una representación inversa a (39), tiene la forma

$$x = \frac{x'}{|x'|^2},$$

es decir, también es una transformación de inversión.

Como resultado de la transformación de inversión el dominio Q pasa a un dominio acotado Q'. Indiquemos que el origen de coordenadas es un punto límite de Q'. Cuando ∂Q no es acotada, el origen de coordenadas será también un punto límite del conjunto $\overline{Q}'$. Si, en cambio, ∂Q es acotada, es decir, si Q es la exterioridad de algún conjunto acotado, el origen de coordenadas será un punto límite aislado del dominio Q' y, consecuentemente, punto, interior del conjunto $\overline{Q}'$.

Sea dado en el dominio Q una función $u(x)$. La función $u'(x')$, definida en el dominio Q' por la ecuación

$$u'(x') = \frac{1}{|x'|^{n-2}} u\left(\frac{x'}{|x'|^2}\right), \tag{40}$$

se denomina *transformación de Kelvin* de la función u.

De las fórmulas (39) y (40) se desprende que

$$u(x) = \frac{1}{|x|^{n-2}} u'\left(\frac{x}{|x|^2}\right), \tag{41}$$

es decir, una transformación inversa a (40) es también transformación de Kelvin.

LEMA 7. *Si la función $u(x)$ es armónica en el dominio Q, la función $u'(x')$ es armónica en el dominio Q'.*

Sea Q_1' un subdominio arbitrario estrictamente interior del dominio Q', y sea Q_1 la preimagen del subdominio en la transformación de inversión. Entonces, el dominio Q_1 es un subdominio acotado estrictamente interior del dominio Q. Como la función u es armónica en Q_1 y pertenece a $C^2(\overline{Q}_1)$, en virtud de la fórmula (9), para todo x de Q_1

$$u(x) = \int\limits_{\partial Q_1} \left[\frac{\mu(\xi)}{|x-\xi|^{n-2}} + \nu(\xi)\frac{\partial}{\partial n_\xi}\left(\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}\right)\right] dS_\xi,$$

donde

$$\mu(\xi) = \frac{1}{(n-2)\sigma_n}\frac{\partial u(\xi)}{\partial n}\bigg|_{\partial Q_1}, \quad \nu(\xi) = -\frac{u(\xi)}{(n-2)\sigma_n}\bigg|_{\partial Q_1}$$

son funciones continuas en ∂Q_1 (para concretar, consideramos el caso $n > 2$; cuando $n = 2$, los razonamientos son los mismos). Por ello, en virtud de (40), para todo $x' \in Q_1'$

$$u'(x') = \int\limits_{\partial Q_1} \left[\frac{\mu(\xi)}{|x'|^{n-2}\left|\frac{x'}{|x'|^2}-\xi\right|^{n-2}} + \right.$$
$$\left. + \nu(\xi)\frac{\partial}{\partial n_\xi}\left(\frac{1}{|x'|^{n-2}\left|\frac{x'}{|x'|^2}-\xi\right|^{n-2}}\right)\right] dS_\xi. \tag{42}$$

De la afirmación c) del lema 5 del párrafo anterior se deduce que la función $|x'|^{2-n}\left|\frac{x'}{|x'|^2}-\xi\right|^{2-n}$, y, por consiguiente, la función $\frac{\partial}{\partial n_\xi}\left(|x'|^{2-n}\left|\frac{x'}{|x'|^2}-\xi\right|^{2-n}\right)$ son armónicas respecto de x', para $\frac{x'}{|x'|^2} \neq \xi$.

De este modo, la función integrando en (42) y todas sus derivadas respecto de x' son continuas en totalidad de las variables ξ, x' y armónicas respecto de x', para $\xi \in \partial Q_1$ y $x' \in Q'$ (la condición $\frac{x'}{|x'|^2} \notin \partial Q_1$ es equivalente a la condición $x' \notin \partial Q_1'$).

Por lo tanto, para todo punto $x^1 \in Q_1'$ la igualdad (42) se puede derivar respecto a x' bajo el signo de la integral cualquier número de veces, siendo en este caso $\Delta u' = 0$. Ya que Q_1' es arbitrario, el lema queda demostrado.

Así pues, la investigación de las funciones armónicas en un dominio no acotado cuyo complemento tiene puntos interiores se ha reducido, mediante el lema 7, a la exploración de funciones armónicas en el dominio acotado.

Supongamos que el complemento $R_n \setminus Q$ del dominio Q de R_n es acotado. La función armónica $u(x)$, dada en el dominio Q, se llama *regular en la infinidad*, si para $|x| \to \infty$ $u(x) = o(1)$ cuando $n > 2$, y $u(x) = o(\ln|x|)$ cuando $n = 2$.

Supongamos que el complemento del dominio Q tiene puntos interiores (entre ellos, como antes, el origen de coordenadas). Como resultado de la transformación de inversión (39), el dominio Q se convertirá en el dominio acotado Q', que contiene un punto límite aislado, el origen de coordenadas. Si una función armónica, dada en el dominio Q, es regular en la infinidad, entonces en virtud de (40), la transformación de Kelvin $u'(x')$ de esta función es, para $x' \to 0$, $o(|x'|^{2-n})$ cuando $n > 2$ y $o(\ln|x'|)$ cuando $n = 2$, es decir, para $x' \to 0$ $u'(x') = o(U(x'))$, donde U es la solución fundamental de la ecuación de Laplace. En este caso, según el teorema sobre la eliminación de la singularidad, existe $\lim\limits_{x' \to 0} u'(x') = A$, y la función $u'(x')$, definida complementariamente en el origen de coordenadas por el valor de A (conservemos para ella la designación anterior $u'(x')$), es armónica en el dominio $Q_0' = Q' \cup \{0\}$.

De este modo queda demostrada la siguiente afirmación.

LEMA 8. *Supongamos que la función $u(x)$ es armónica en el dominio no acotado Q (cuyo complemento es acotado y contiene puntos interiores) y regular en la infinidad. Entonces, su transformación de Kelvin es armónica en Q_0'.*

Conforme al teorema 5, la función $u'(x')$ es analítica respecto a x' en $Q' \cup \{0\}$. Por ello, en particular, existe un número R_0 tal que la función $u'(x')$ se desarrolla en la bola $\{|x'| < R_0\}$ en una serie de Taylor absolutamente (y uniformemente) convergente (junto con todas las derivadas)

$$u'(x') = \sum_{\alpha} A_\alpha x'^\alpha,$$

donde $A_\alpha = \frac{1}{\alpha!} D^\alpha u'(0)$, $A_0 = A$. Pero, en este caso, en vista de (39) y (41), para todo x, $|x| > 1/R_0$

$$u(x) = \sum_{\alpha} A_\alpha \frac{x^\alpha}{|x|^{2|\alpha|+n-2}}, \tag{43}$$

con la particularidad de que la serie del segundo miembro de esta igualdad converge, para $|x| > 1/R_0$, absoluta e uniformemente junto con todas sus derivadas.

Designemos con $T(x)$ la función $u(x) - \frac{A_0}{|x|^{n-2}}$, es decir, $T(x) = \sum_{|\alpha| \geq 1} A_\alpha \frac{x^\alpha}{|x|^{2|\alpha|+n-2}}$ para $|x| > 1/R_0$. Dado que para cualquier $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ $D^\alpha u = D^\alpha \frac{A_0}{|x|^{n-2}} + D^\alpha T(x)$, y como $|D^\alpha T| \leqslant \leqslant \frac{C_\alpha}{|x|^{n+|\alpha|-1}}$, donde C_α es una constante positiva, entonces para todo x, $|x| > 1/R_0$,

$$\left| D^\alpha u - D^\alpha \frac{A_0}{|x|^{n-2}} \right| \leqslant \frac{C_\alpha}{|x|^{n+|\alpha|-1}}. \tag{44}$$

En particular,

$$\left| u(x) - \frac{A_0}{|x|^{n-2}} \right| \leqslant \frac{\text{const}}{|x|^{n-1}}, \tag{45}$$

$$\left| \nabla u - \frac{A_0 (2-n) x}{|x|^n} \right| \leqslant \frac{\text{const}}{|x|^n}.$$

Las afirmaciones sobre el comportamiento (cuando los valores $|x|$ son grandes) de la función $u(x)$, armónica en el dominio Q y regular en la infinidad, establecidas ahora mismo para el caso en que el complemento del dominio Q es acotado y contiene puntos interiores, son válidas siempre, si el complemento del dominio Q es acotado (en particular, Q puede coincidir con todo el espacio R_n). En efecto, ya que nos interesan los valores de $u(x)$ sólo cuando los valores $|x|$ son suficientemente grandes, puede considerarse dada sólo en el dominio $Q_1 = \{|x| > R_1\}$, que es, cuando R_1 se toma suficientemente grande, un subdominio del dominio Q. Pero, Q_1 es un complemento del conjunto $\{|x| \leqslant R_1\}$ en el cual el origen de coordenadas es un punto interior.

De esta manera queda demostrado el siguiente

TEOREMA 13. *Supongamos que el complemento del dominio Q es acotado. Entonces, para toda función $u(x)$, armónica en Q y regular en la infinidad, existe una constante $R > 0$* tal que para todo x, $|x| > R$, *la función $u(x)$ se desarrolla en la serie* (43) *absoluta e uniformemente convergente junto con todas las derivadas y, además, tengan lugar las desigualdades* (44).

Del teorema (13) se deduce, en particular, que si la función $u(x)$, armónica en el dominio n-dimensional, $n > 2$, Q (que es la exterioridad de un conjunto acotado), decrece en la infinidad, su decrecimiento no es más débil que el de la solución fundamental de la ecuación de Laplace y, además, existe un límite de la función $u(x)|x|^{n-2}$ para $|x| \to \infty$. Si $n = 2$, la función $u(x)$, armónica en Q, creciente menos fuertemente que la solución fundamental, es, en realidad, acotada y existe para ella un límite para $|x| \to \infty$.

OBSERVACIÓN. Si el complemento del dominio Q es no acotado, entonces para una función armónica en Q $u(x)$ que satisface la condición

$$u(x) = o(1) \quad \text{para} \quad |x| \to \infty, \qquad x \in Q \quad \text{para} \quad n > 2$$

o bien

$$u(x) = o(\ln |x|) \quad \text{para} \quad |x| \to \infty, \qquad x \in Q \quad \text{para} \quad n = 2$$

las afirmaciones del teorema 13, en general, no tienen lugar. Por ejemplo, cuando $n = 2$, la función $\arg(x_1 + ix_2)$, armónica y acotada en el dominio $R_2 \setminus \{x_2 = 0, x_1 \geqslant 0\}$, no tiene límite para $|x| \to \infty$.

Supongamos que la función $u(x)$ es armónica en todo el espacio R_n. Diremos que $u(x)$ es semiacotada, si es acotada por abajo o por arriba, es decir, si para todo $x \in R_n$ con una constante M se cumple la desigualdad $u(x) \geqslant M$ o la desigualdad $u(x) \leqslant M$, respectivamente.

TEOREMA 14. *Una función semiacotada armónica en R_n, es constante.*

Está claro que una función $-u(x)$ es acotada por abajo, si $u(x)$ es acotada por arriba. Por eso, para demostrar el teorema basta considerar sólo el caso $u(x) \geqslant M$ en R_n. Entonces, para la función $v(x)$ armónica en R_n, $v(x) = u(x) - M \geqslant 0$ en R_n. El teorema será demostrado, si establecemos que $v(x) \equiv \text{const}$.

Elijamos un punto arbitrario $x^0 \in R_n$ y una bola $\{|x| < R\}$ de radio $R > |x^0|$. Puesto que el problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace en la bola $\{|x| < R\}$ con una función límite $v|_{\{|x|=R\}}$ admite una solución clásica única, entonces para todo x, $|x| < R$,

$$v(x) = \int\limits_{|\xi|=R} P_R(x, \xi)\, v(\xi)\, dS_\xi,$$

donde $P_R(x, \xi)$ es el núcleo de Poisson del problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace en la bola $\{|x| < R\}$ (fórmula (31)). En particular, cuando $x = x^0$, tenemos

$$v(x^0) = \int\limits_{|\xi|=R} P_R(x^0, \xi)\, v(\xi)\, dS_\xi = \frac{R^2 - |x^0|^2}{\sigma_n R} \int\limits_{|\xi|=R} \frac{v(\xi)}{|x^0 - \xi|^n}\, dS_\xi.$$

Ya que para $|\xi| = R$

$$R - |x^0| \leqslant |x^0 - \xi| \leqslant R + |x^0|,$$

se tiene (recordemos que la función $v(\xi) \geqslant 0$

$$\frac{1}{\sigma_n R^{n-1}} \int\limits_{|\xi|=R} v(\xi)\, dS_\xi \cdot \frac{(R^2-|x^0|^2)\, R^{n-2}}{(R+|x^0|)^n} \leqslant v(x^0) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{\sigma_n R^{n-1}} \int\limits_{|\xi|=R} v(\xi)\, dS_\xi \cdot \frac{(R^2-|x^0|^2)\, R^{n-2}}{(R-|x^0|)^n}$$

o, en virtud del primer teorema en la media,

$$\frac{R^{n-2}(R^2-|x^0|^2)}{(R+|x^0|)^n}\, v(0) \leqslant v(x^0) \leqslant \frac{R^{n-2}(R^2-|x^0|^2)}{(R-|x^0|)^n}\, v(0).$$

Pasando en esta igualdad al límite para $R \to \infty$, obtenemos $v(x^0) = v(0)$. Por ser x^0 un punto arbitrario, $v(x) \equiv \text{const}$. El teorema queda demostrado.

COROLARIO. *Si una función $u(x)$ armónica en R_n, satisface, para todo $x \in R_n$, la desigualdad $|u(x)| \leqslant C(1+|x|)^k$, donde C es una constante y k, un número entero no negativo, entonces $u(x)$ es un polinomio de grado no superior a k.*

Cuando $k = 0$, esta afirmación es evidente en el teorema (14). Sea $k > 0$. Tomemos un número arbitrario $R > 1$. En vista del lema 3, p. 2, para cualquier $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $|\alpha| = k$,

$$\max_{|x|\leqslant R} |D^\alpha u| \leqslant k^k \left(\frac{n}{R}\right)^k \max_{|x|\leqslant 2R} |u(x)| \leqslant$$
$$\leqslant Ck^k \left(\frac{n}{R}\right)^k (1+2R)^k \leqslant Ck^k \left(\frac{n}{R}\right)^k (3R)^k = C(3kn)^k.$$

De esta desigualdad se deduce que a función $D^\alpha u$, armónica en R_n, es acotada en R_n, cualquiera que sea α, $|\alpha| = k$. Conforme al teorema 14, las funciones $D^\alpha u$, $|\alpha| = k$, son constantes en R_n. Por tanto, $u(x)$ es un polinomio de grado no superior a k. La afirmación queda demostrada.

Anteriormente hemos establecido algunas propiedades de las funciones armónicas en los dominios no acotados. En particular, fue mostrado que el estudio de la función armónica en el dominio no acotado (cuyo complemento contiene puntos interiores) puede ser reducido, mediante la transformación de Kelvin, al de la función armónica en el dominio acotado.

Examinemos ahora problemas de contorno para la ecuación de Laplace en dominios no acotados. Señalemos ante todo que en este caso las condiciones habituales (las que se han considerado en el dominio acotado) impuestas en la solución son insuficientes para la unicidad. Por ejemplo, todas las funciones $c \ln r$, $c(r^k - r^{-k}) \cos k\theta$, $c(r^k - r^{-k}) \operatorname{sen} k\theta$, $k = 1, 2, \ldots$, donde c es una constante arbitraria, $x_1 = r\cos\theta$, $x_2 = r \operatorname{sen}\theta$, son armónicas en el dominio $\{r > 1\} \subset R_2$, continuas en la adherencia de éste y se anulan en el contorno $\{r = 1\}$. Por eso resulta natural incluir en la definición de la solución una condición adicional que caracterice el comportamiento de la solución en la infinidad.

Sea el dominio $Q = R_n \setminus \bigcup_{i=1}^{N} Q_i$, donde Q_i, $i = 1, \ldots, N$, son dominios acotados con contornos disjuntos.

La función $u(x)$ de $C^2(Q)$ se llama *solución* (clásica) *del problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace en el dominio* Q:

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0, \qquad x \in Q \\ u|_{\partial Q} &= \varphi, \end{aligned} \tag{46}$$

si es armónica en Q, continua en $\overline{Q}$, satisface la condición límite en (46) y es regular en la infinidad.

La función $u(x)$ de $C^2(Q)$ se llama *solución* (clásica) *del tercer problema de contorno para la ecuación de Laplace en* Q:

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0, \qquad x \in Q, \\ \left(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma(x)\, u\right)\Big|_{\partial Q} &= \varphi, \end{aligned} \tag{47}$$

si es armónica en Q, continuamente diferenciable en $\overline{Q}$, satisface la condición límite en (47) y es regular en la infinidad.

Cuando $\sigma \equiv 0$, el tercer problema de contorno se denomina *segundo problema de contorno o problema de Neumann.*

Designemos con Q' un dominio acotado que para la transformación de inversión es la imagen del dominio Q (el origen de coordenadas es un punto interior del complemento de Q).

Supongamos que $u(x)$ es la solución del problema (46). Del lema 8 se desprende que la funcion $u'(x')$ que es la transformación de Kelvin de la función $u(x)$ (definida complementariamente según la continuidad en el origen de coordenadas), es armónicas en $Q_0' = Q' \cup \cup \{0\}$. Además, es evidente que $u'(x') \in C(\overline{Q}_0')$ y $u'(x')_{x' \in \partial Q_0'} = \varphi'(x')$, donde $\varphi'(x') = \frac{1}{|x'|^{n-2}}\, \varphi\left(\frac{x'}{|x'|^2}\right)$. Esto significa que $u'(x')$ es la solución clásica del problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace en el dominio (acotado) Q_0' con una función límite $\varphi'(x')$.

Y a la inversa, si $u'(x')$ es la solución clásica del problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace en el dominio Q_0' con una función límite $\varphi'(x')$, entonces $u(x)$, que es la transformación de Kelvin de $u'(x')$, es armónica en Q, continua en $\overline{Q}$, satisface la condición límite $u|_{\partial Q} = \varphi$, y, como es obvio, es regular en la infinidad, es decir, $u(x)$ es la solución clásica del problema (46).

Por ello, de los teoremas de existencia y unicidad de la solución clásica del problema de Dirichlet en el dominio acotado (teorema 9 y 10) se desprende.

TEOREMA 15. *Para cualquier función límite continua φ existe la única solución clásica del problema de Dirichlet* (46).

El estudio del tercer problema de contorno en el dominio no acotado Q se reduce también, mediante la transformación de Kelvin, al del tercer problema de contorno en el dominio acotado Q_0'. Limitémonos a la demostración del teorema de unicidad.

TEOREMA 16. *El tercer problema de contorno para la ecuación de Laplace en el dominio Q para $\sigma(x) \geqslant 0$, $\sigma(x) \not\equiv 0$, no puede tener más que una solución.*

El segundo problema de contorno para la ecuación de Laplace en el dominio Q, cuando $n > 2$, no puede tener más que una solución; si $n = 2$, la solución (si existe) se determina con precisión hasta un sumando constante.

Supongamos que el tercero (segundo) problema de contorno admite dos soluciones, $u_1(x)$ y $u_2(x)$. Entonces, la función $u(x) = u_1(x) - u_2(x)$ es armónica en Q, continuamente diferenciable en $\overline{Q}$, satisface la condición límite $\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u\right)\Big|_{\partial Q} = 0$ y es regular en la infinidad. Tomemos un número $R > 0$ tan grande que el dominio $\{|x| > R\}$ esté contenido en Q y aprovechemos en el dominio $Q_R = Q \cap \{|x| < R\}$ la fórmula de Green

$$0 = \int_{Q_R} u\Delta u\, dx = -\int_{Q_R} |\nabla u|^2 dx + \int_{\partial Q} \frac{\partial u}{\partial n} u\, dS + \\ + \int_{|x|=R} \frac{\partial u}{\partial n} u\, dS = -\int_{Q_R} |\nabla u|^2 dx - \int_{\partial Q} \sigma u^2 dS + \int_{|x|=R} \frac{\partial u}{\partial n} u\, dS.$$

De resultas tenemos la igualdad

$$\int_{Q_R} |\nabla u|^2 dx + \int_{\partial Q} \sigma u^2 dS = \int_{|x|=R} \frac{\partial u}{\partial n} u\, dS. \tag{48}$$

En virtud del teorema 13 $u|_{(|x|=R)} = O\left(\frac{1}{R^{n-2}}\right)$ y $\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{(|x|=R)} = O\left(\frac{1}{R^{n-1}}\right)$ cuando $n > 2$ y $\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{(|x|=R)} = O\left(\frac{1}{R^2}\right)$, cuando $n = 2$. Por esto,

$$\int_{|x|=R} \frac{\partial u}{\partial n} u\, dS = O\left(\frac{1}{R^{n-2}}\right) \text{ para } n > 2$$

y

$$\int_{|x|=R} \frac{\partial u}{\partial n} u\, dS = O\left(\frac{1}{R}\right) \text{ para } n = 2$$

Pasando en la igualdad (48) al límite para $R \to \infty$, obtenemos

$$\int_Q |\nabla u|^2\,dx + \int_{\partial Q} \sigma u^2\,dS = 0.$$

Puesto que $\sigma \geqslant 0$, esta igualdad es equivalente a otras dos

$$\int_Q |\nabla u|^2\,dx = 0 \quad \text{y} \quad \int_{\partial Q} \sigma u^2\,dS = 0. \tag{49}$$

De la primera igualdad en (49) se desprende que $u \equiv c_0 = \text{const}$ en $\overline{Q}$. Si $n > 2$, en vista de la regularidad de la función $u(x)$ en la infinidad $c_0 = 0$, es decir, $u_1 = u_2$ en Q.

Si $n = 2$ y $\sigma(x) \geqslant 0$, $\sigma(x) \not\equiv 0$ (tercer problema de contorno), la igualdad $c_0 = 0$ se infiere de la segunda correlación en (49).

En el caso $n = 2$ y $\sigma(x) \equiv 0$ (segundo problema de contorno), la función $u(x) \equiv c_0$, donde la constante c_0 es arbitraria es una función armónica regular en Q que satisface la condición límite homogénea $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial Q} = 0$. El teorema queda demostrado.

PROBLEMAS DEL CAPITULO IV

1. Muéstrese que la función $u(x)$, que pertenece a $L_{2\,\mathrm{loc}}(Q)$ y satisface para toda $v \in \dot{C}^\infty(\overline{Q})$ la identidad $\int_Q u\Delta v\,dx = 0$, es armónica en Q.

2. Hállese el complemento del conjunto de funciones de $L_2(Q)$, armónicas en Q, según la norma del espacio $L_2(Q)$.

3. Supongamos que $u \in H^2_{\mathrm{loc}}(Q) \cap \hat{C}(\overline{Q})$ y $\partial Q \in C^2$. Demuéstrese que si $\Delta u \in L_2(Q)$, entonces $u \in H^2_{\mathscr{D}}(Q)$.

Indiquemos que de los resultados del problema 3 se deduce que la solución clásica del problema de Dirichlet para la ecuación de Poisson $\Delta u = f$, $u|_{\partial Q} = 0$, en la que el segundo miembro f pertenece a $L_2(Q)$, es una solución generalizada e, incluso, solución en casi todo punto. Por consiguiente, las funciones propias clásicas del primer problema de contorno para el operador de Laplace son funciones propias generalizadas.

4. Sea $\partial Q \in C^2$. En el conjunto de todas las funciones $u(x)$ de $C^2(Q) \cap \mathring{C}(\overline{Q})$, para las cuales $\Delta u(x) \in L_2(Q)$, se ha introducido el producto escalar $\int_Q \Delta u \times \Delta \overline{v}\,dx$. Hállese el complemento de este conjunto según la norma engendrada por dicho producto escalar.

5. Supongamos que el contorno ∂Q del dominio Q pertenece a C^k. Demuéstrense las siguientes afirmaciones.

a) En el espacio de Hilbert $H^k_{\mathscr{D}}(Q)$ se pueden introducir productos escalares equivalentes a un producto ordinario

$$(f, g)'_{H^k_{\mathscr{D}}(Q)} = \begin{cases} (\Delta^{k/2} f,\ \Delta^{k/2} g)_{L_2(Q)} & \text{para } k \text{ par}, \\ (\Delta^{(k-1)/2} f;\ \Delta^{(k-1)/2} g)_{H^1(Q)} & \text{para } k \text{ impar} \end{cases}$$

y

$$(f, g)''_{H^k_{\mathscr{D}}(Q)} = \sum_{s=1}^{\infty} f_s \bar{g}_s \, |\lambda_s|^k,$$

donde $f_s = (f, u_s)_{L_2(Q)}$, mientras que u_s y λ_s son la s-ésima función propia y el valor propio que le corresponde, del problema de Dirichlet para el operador de Laplace en Q.

b) En el espacio de Hilbert $H^k_{\mathscr{N}}(Q)$ se pueden introducir productos escalares equivalentes a un producto ordinario

$$(f, g)'_{H^k_{\mathscr{N}}(Q)} = \begin{cases} (\Delta^{k/2} f, \ \Delta^{k/2} g)_{L_2(Q)} + (f, g)_{L_2(Q)} & \text{para} \quad k \text{ pares} \\ (\Delta^{(k-1)/2} f, \ \Delta^{(k-1)/2} g)_{H^1(Q)} + (f, g)_{L_2(Q)} & \text{para} \quad k \text{ impares} \end{cases}$$

$$(f, g)''_{H^k_{\mathscr{N}}(Q)} = \sum_{s=1}^{\infty} f_s \bar{g}_s \, (|\lambda_s|^k + 1),$$

donde $f_s = (f, u_s)_{L_2(Q)}$, mientras que u_s y λ_s son una función propia y el valor propio que le corresponde, del problema de Neumann para el operador de Laplace en Q.

6. Supongamos que $u(x) \in C(\overline{Q})$ y sea que para cualquier punto $x \in Q$ existe un número $r = r(x) > 0$ tal que la bola $S_r(x) = \{|\xi - x| < r\} \subset Q$, y $u(x) = \frac{1}{\sigma_n r^{n-1}} \int\limits_{\partial S_r(x)} u(\xi) \, dS_\xi$. Muéstrese que la función $u(x)$ es armónica en Q.

7. Supongamos que la función $u(x) \in C^1(Q)$ y sea que para cualquier esfera S, ubicada en Q, $\int\limits_S \frac{\partial u}{\partial n} \, dS = 0$. Muéstrese que la función $u(x)$ es armónica en Q.

8. Muéstrese que el primer valor propio del primer problema de contorno para el operador de Laplace en el dominio Q, $\partial Q \in C^2$, tiene multiplicidad 1 y la función propia que le corresponde no se anula en Q.

9. Muéstrese que la función $u(x)$ que pertenece a $C^2(Q)$ y satisface en el dominio Q la ecuación de Helmholtz $\Delta u + \lambda u = 0$, donde λ es una constante, es analítica en Q.

Señalemos que de los resultados del problema 9 se deduce que las funciones propias de cualquier problema de contorno para el operador de Laplace en Q son analíticas en Q.

10. Sean $\lambda_k(Q_1)$ y $\lambda_k(Q_2)$ los k-ésimos valores propios del primer problema de contorno para el operador de Laplace en los dominios Q_1 y Q_2, $Q_1 \Subset Q_2$. Demuéstrese que $\lambda_k(Q_1) < \lambda_k(Q_2)$ para todo $k = 1, 2, \ldots$

11. Designemos con $\widetilde{L}_2(\partial Q)$ (∂Q es el contorno de un dominio n-dimensional Q) un subespacio del espacio $L_2(\partial Q)$ compuesto de todas las funciones ortogonales (en el producto escalar de $L_2(\partial Q)$) a las constantes. Para cualquier función $\psi(x) \in \widetilde{L}_2(\partial Q)$ existe una solución generalizada única $u(x)$ del problema de Neumann para la ecuación de Laplace en Q con función límite ψ, cuya traza en $\partial Q u|_{\partial Q} = \varphi \in \widetilde{L}_2(\partial Q)$. De este modo, en $\widetilde{L}_2(\partial Q)$ está dado el operador A que pone a cada función $\psi \in \widetilde{L}_2(\partial Q)$ en correspondencia una función $\varphi \in \widetilde{L}_2(\partial Q) : A\psi = \varphi$.

Demuéstrense las siguientes afirmaciones.

a) Los valores propios λ_k, $k = 1, 2, \ldots$, del operador A son positivos; las funciones propias e_k, $Ae_k = \lambda_k e_k$, $k = 1, \ldots$, forman una base ortonormal del espacio $\widetilde{L}_2(\partial Q)$.

b) Existe la solución generalizada $u_k(x)$ del problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace en Q con una función límite $\sqrt{\lambda_k}\, e_k$, $k = 1, 2, \ldots$ El sistema $u_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, forma una base ortonormal en el espacio con un producto escalar $\int\limits_Q \nabla u, \nabla \overline{v}\, dx$, compuesto de todas las funciones, armónicas en Q, de $H^1(Q)$, cuyas trazas en ∂Q pertenecen a $\widetilde{L}_2(\partial Q)$.

c) Para toda función $\psi \in \widetilde{L}_2(\partial Q)$, la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \psi_k \sqrt{\lambda_k} u_k(x)$, donde $\psi_k = (\psi, e_k)_{L_2(\partial Q)}$ converge en $H^1(Q)$ y representa en sí una solución generalizada del problema de Neumann para la ecuación de Laplace en Q con una función límite ψ.

d) Sea la función $\varphi \in L_2(\partial Q)$. Para que exista una solución generalizada $u(x)$ del problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace en Q con la función límite φ, es necesario y suficiente que converja la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{|\varphi_k|^2}{\lambda_k}$, donde $\varphi_k = (\varphi, e_k)_{L_2(\partial Q)}$. En este caso $u(x) = \frac{1}{|\partial Q|} \int\limits_{\partial Q} \varphi\, dS + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \varphi_k u_k(x)$.

e) Hállense los valores propios y las funciones propias del operador A cuando el dominio Q es un círculo $\{|x| < 1\}$ (caso bidimensional), y muéstrese que la condición d) del problema en cuestión coincide en este caso con la condición del teorema 13, p. 8, § 1.

12. Para que una función $f(\varphi)$ que está dada en el contorno $\{r = 1\}$ del círculo unitario $\{r < 1\}$ del plano $x_1 = r\cos\varphi$, $x_2 = r\,\mathrm{sen}\,\varphi$, y pertenece a $L_2(0, 2\pi)$, sea valor límite de cierta función de $H^1(r < 1)$, es necesario y suficiente que converja la integral

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{t^2} \int\limits_0^{2\pi} (f(\varphi + t) - f(\varphi))^2\, d\varphi.$$

Una función $u(x)$ de $C^4(Q) \cap C^1(\overline{Q})$ que satisface la ecuación

$$\Delta^2 u = f, \quad x \in Q, \tag{1}$$

y las condiciones límite

$$u|_{\partial Q} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial Q} = 0, \tag{2}$$

se llama solución clásica del problema de Dirichlet para la ecuación $\Delta^2 u = f$ en el dominio Q. Una función $u(x)$ de $C^4(Q) \cap C^2(\overline{Q})$ que satisface la ecuación (1) y las condiciones límite

$$u|_{\partial Q} = 0, \quad \Delta u|_{\partial Q} = 0 \tag{3}$$

se llama solución clásica del problema de Riquier para la ecuación $\Delta^2 u = f$ en el dominio Q.

Sea una función $f \in L_2(Q)$. Una función u que pertenece a $\overset{\circ}{H}{}^2(Q)$ y satisface la identidad integral

$$\int\limits_Q \Delta u\, \Delta \bar{v}\, dx = \int\limits_Q f\bar{v}\, dx \tag{4}$$

para toda $v \in \overset{\circ}{H}{}^2(Q)$, la llamaremos solución generalizada del problema de Dirichlet (1), (2). Una función u que pertenece a $H^2_{\mathscr{D}}(Q)$ y satisface la identidad integral (4) para toda $v \in H^2_{\mathscr{D}}(Q)$, la llamaremos solución generalizada de Riquier (1), (3).

13. Sea $\partial Q \in C^2$. Demuéstrense las siguientes afirmaciones.

a) Las soluciones clásicas, pertenecientes a $C^4(\overline{Q})$, $u(x)$ de los problemas (1), (2) y (1), (3), son soluciones generalizadas de los mismos.

b) Las soluciones generalizadas de los problemas (1), (2) y (1), (3) existen para toda $f \in L_2(Q)$ y son únicas.

Sea Q una bola de radio R: $Q = \{|x| < R\}$. Designemos por S_1 una semiesfera $\{|x| = R\} \cap \{x_1 > 0\}$, y por S_2, una semiesfera $\{|x| = R\} \cap \{x_1 \leqslant 0\}$. La función $u(x)$ que pertenece al espacio $C^2(Q) \cap C^1(Q \cup S_1) \cap C(\overline{Q})$ y satisface la ecuación de Poisson

$$\Delta u = f, \quad x \in Q, \tag{5}$$

y también la condición límite

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{S_1} = 0, \quad u|_{S_2} = 0, \tag{6}$$

se llama solución clásica del problema (5), (6).

Designemos con $\widetilde{H}^1(Q)$ un subespacio del espacio $H^1(Q)$ compuesto de todas las funciones $u \in H^1(Q)$ cuya traza en S_2 es nula. Sea $f \in L_2(Q)$. Se denomina solución generalizada del problema (5), (6) la función $u \in \widetilde{H}^1(Q)$ que satisface la identidad integral

$$\int\limits_Q \nabla u\, \nabla \bar{v}\, dx = -\int\limits_Q f\bar{v}\, dx$$

para toda $v \in \widetilde{H}^1(Q)$.

14. Demuéstrese que para toda $f \in L_2(Q)$ la solución generalizada del problema (5), (6) existe y es única.

Sea Q un dominio bidimensional acotado con un contorno $\partial Q \in C^3$, y sea $l(x)$, $|l(x)| = 1$, un vector (dado en ∂Q, dos veces continuamente diferenciable) que con el vector de la normal (exterior) a ∂Q forma de ángulo $\alpha(x)$, $|\alpha(x)| < \pi/2$ $(\alpha(x) = (\widehat{n, l}))$. La función $u(x)$ que pertenece a $C^1(\overline{Q}) \cap C^2(Q)$ y satisface la ecuación

$$\Delta u - u = f, \quad x \in Q, \tag{7}$$

y, además, la condición límite

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{\partial Q} = 0 \tag{8}$$

se llama solución clásica el problema con derivada inclinada (7), (8).

Designemos con $A(x)$ una función, perteneciente a $C^2(\overline{Q})$, cuyo valor en el contorno ∂Q es $\operatorname{tg}\alpha(x)$. Sea $f \in L_2(Q)$. Se llama solución generalizada del problema (7), (8) una función $u \in H^1(Q)$ que satisface la identidad integral

$$\int_Q (\nabla u \nabla \overline{v} + u\overline{v})\,dx + \int_Q A(u_{x_2}\overline{v}_{x_1} - u_{x_1}\overline{v}_{x_2})\,dx + \\ + \int_Q (A_{x_1}u_{x_2} - A_{x_2}u_{x_1})\,\overline{v}\,dx = -\int_Q f\overline{v}\,dx$$

cualquiera que sea $v \in H^1(Q)$.

15. Demuéstrense las siguientes afirmaciones.

a) La solución clásica del problema (7), (8) es una solución generalizada.

b) Si $\alpha(x) \equiv \text{const}$, para toda $f \in L_2(Q)$ existe la única solución generalizada del problema (7), (8); esta solución no depende de cómo se prolonga ($A(x)$) en Q la función $\operatorname{tg}\alpha(x)$.

LITERATURA ADICIONAL PARA EL CAPITULO IV

Agmon S., Douglis A. a.o.; Estimates near the Boundary for Solutions of Elliptic Partial Differential Equations satisfying General Boundary Conditions New-York, 1959.

Bers. L. a.o.; Partial Differential Equations New-York, 1964.

A. V. Bitsadze, Problemas de contorno para las ecuaciones elípticas de segundo orden, «Naúka», 1966 (en ruso).

I. N. Vékua, Nuevos métodos para la resolución de ecuaciones elípticas, Gostejizdat, 1948 (en ruso).

I. N. Vékua, Sobre las funciones meta-armónicas, Edición del Instituto matemático de Tbilisi, XII, 1943 (en ruso).

V. S. Vladimirov, Ecuaciones de la física matemática, «Naúka», 1971 (en ruso).

V. A. Iljin, Sobre la convergencia de los desarrollos según funciones propias del operador de Laplace, YMH 13:1 (1958), 87—180 (en ruso).

M. V. Kéldysh, Sobre la complitud del sistema de funciones propias de algunos operadores lineales no autoconjugados, YMH 26: 4 (1971), 15—41, (en ruso).

M. V. Kéldysh, Sobre la resolución y estabilidad del problema de Dirichlet, YMH, 8 (1941), 171—202 (en ruso).

N. M. Krilov, N. N. Bogoliúbov, Application de la méthode de l'algorithme variationel à la solution approchée des équations différentielles aux dérivées partielles du type elliptique. Edición de la Academia de Ciencias de la URSS, ОФМН (1930), 43—71 y 105—114.

R. Curant, D. Hilbert, Métodos de la física matemática, vols I, II, Gostejizdat, 1951 (en ruso).

M. A. Lavréntjev, Método variacional en los problemas de contorno para los sistemas de ecuaciones del tipo elíptico, Ediciones de la Academia de Ciencia de la URSS, 1962 (en ruso).

M. A. Lavréntjev, L. A. Lustérnik, Curso de cálculo variacional, «Gostejizdat», 1950 (en ruso).

M. M. Lavréntjev, Sobre el problema de Cauchy para la ecuación de Laplace, Ediciones de la Academia de Ciencias, serie matemática 20 (1956), 819—842, (en ruso).

O. A. Ladyjénskaya, Problemas de contorno de la física matemática, «Naúka», 1973, (en ruso).

O. A. Ladyjénskaya, N. N. Urâltseva, Ecuaciones lineales del tipo elíptico, «Naúka», 1964 (en ruso).
Miranda C., Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico; Berlin, 1955.
I. G. Petróvski, Conferencias sobre las ecuaciones en derivadas parciales, Fismatgiz 1961 (en ruso).
V. A. Steklov, Sobre el comportamiento asintótico de las soluciones de una ecuación diferencial lineal, Ediciones de la Universidad de Járcov, 1956 (en ruso).
S. L. Sóbolev, Ecuaciones de la física matemática, Fismatgiz, 1954 (en ruso.
S. L. Sóbolev, Aplicaciones del análisis funcional en la física matemática, Ediciones de la Universidad estatal de Leningrado, 1950 (en ruso).
A. Tíjonov, A. Samarsky, Ecuaciones de la física matemática, Editorial Mir.

En este capítulo estudiaremos el problema de Cauchy y los problemas mixtos para una ecuación hiperbólica del tipo

$$u_{tt} - \operatorname{div}(k(x)\,\nabla u(x, t)) + a(x)\,u(x, t) = f(x, t).$$

Aquí, $(x, t) = x_1, \ldots, x_n, t)$ es un punto del espacio $(n+1)$-dimensional R_{n+1}, $x \in R_n$, $t \in R_1$, $\nabla v(x, t) = \left(\frac{\partial v}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial v}{\partial x_n}\right)$ y $\operatorname{div}(w_1(x, t), \ldots, w_n(x, t)) = \frac{\partial w_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial w_n}{\partial x_n}$; por $\Delta v(x, t)$ vamos a entender $\operatorname{div} \nabla v(x, t) = \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 v}{\partial x_n^2}$. Convengamos en considerar los datos de los problemas como funciones de valores reales y examinemos sólo aquellas soluciones de los problemas citados que posean valores reales. Con este motivo, por H^k y C^k, $k = 0, 1, \ldots$, entenderemos, en lo sucesivo, espacios reales correspondientes.

§ 1. Propiedades de las soluciones de la ecuación de onda. Problema de Cauchy para la ecuación de onda

1. Propiedades de las soluciones de la ecuación de onda. Examinemos una ecuación de onda

$$\Box u(x, t) \equiv u_{tt} - \Delta u \equiv u_{tt} - \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} = f(x, t) \tag{1}$$

la cual es la ecuación hiperbólica de segundo orden más sencilla.

Hallemos, ante todo, algunas soluciones especiales de la ecuación de onda homogénea ($\Box u = 0$), que dependen sólo de $t/|x|$. Una función $v(x, t) = w(t/|x|)$, que para $|x| \neq 0$ es la solución de la ecuación de onda homogénea, satisface la ecuación diferencial ordinaria

$$(z^2 - 1)\frac{d^2 w}{dz^2} + (3 - n)\, z\, \frac{dw}{dz} = 0.$$

La solución general de esta ecuación en cada uno de los intervalos $(-\infty, -1)$, $(-1, +1)$, $(+1, +\infty)$ se prefija por la fórmula

$$c_1 \int |z^2 - 1|^{\frac{n-3}{2}}\, dz + c_2,$$

donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias. De aquí, en particular, obtenemos que para $0 < |x| < -t$, $(z = t/|x| < -1)$ la función $v(x, t)$ adquiere la forma

$$v(x, t) = c_1 \ln\left|\frac{t-|x|}{t+|x|}\right| + c_2 \qquad \text{cuando } n = 1,$$

$$v(x, t) = c_1 \ln\left|\frac{|t+\sqrt{t^2-|x|^2}|}{|x|}\right| + c_2 \qquad \text{cuando } n = 2,$$

$$v(x, t) = c_1 \frac{t}{|x|} + c_2 \qquad \text{cuando } n = 3,$$

etc.

Designemos por K_{x', t', t^0} un cono $\{|x - x'| < t' - t,\ t^0 < t < t'\}$ de «altura» $t' - t^0$ y vértice en el punto (x', t'); mediante

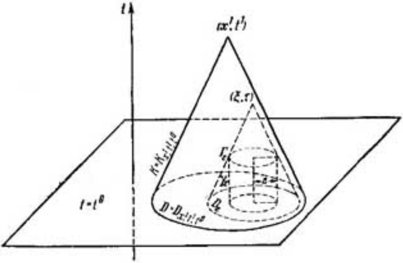


Fig. 2

Γ_{x', t', t^0}, la superficie lateral del cono $\{|x - x'| = t' - t,\ t^0 \leqslant t \leqslant t'\}$, la cual es la característica (véase § 2, cap. I) de la ecuación de onda; mediante D_{x', t', t^0} una base del cono $\{|x - x'| < t' - t^0,\ t = t^0\}$; mediante S_{x', t', t^0} el contorno de la base, es decir, la esfera $\{|x - x'| = t' - t^0;\ t = t^0\}$.

Sean: (x^1, t^1) un punto de R_{n+1}, K, el cono

$$K_{x^1, t^1, t^0},\ t^0 < t^1, \text{ y } D = D_{x^1, t^1, t^0},$$

la base de este cono (véase fig. 2). Mostremos que si una función $u(x, t)$ es suficientemente suave en $K \cup D$, su valor en un punto arbitrario (x, t) del cono K se determina en el cono $\overline{K}_{x, t, t^0}$, en términos de $\square u$, y en la base de este último $\overline{D}_{x, t, t^0}$, en términos de u y u_t.

Examinemos primero el caso de tres variables espaciales, $n=3$. Admitamos que $u(x,t)\in C^2(K)\cap C^1(K\cup D)$ y $\square u\in C(K\cup D)$. Sea (ξ,τ) un punto arbitrario de K, y sea ε un número arbitrario positivo menor que $\tau-t^0$, $0<\varepsilon<\tau-t^0$.

Designemos con K_ε un dominio $\{\varepsilon<|x-\xi|<\tau-t,\ t^0<t<\tau-\varepsilon\}$ dispuesto en K. Dividamos el contorno de K_ε en tres partes: $\Gamma_\varepsilon=\{|x-\xi|=\tau-t,\ t^0\leqslant t\leqslant\tau-\varepsilon\}$, $D_\varepsilon=\{\varepsilon<|x-\xi|<\tau-t^0,\ t=t^0\}$, $\gamma_\varepsilon=\{|x-\xi|=\varepsilon,\ t^0\leqslant t\,(\tau-\varepsilon)\}$.

Elijamos una solución especial de la ecuación de onda homogénea que depende sólo de $\frac{t-\tau}{|x-\xi|}$

$$v(x-\xi,\,t-\tau)=\frac{t-\tau}{|x-\xi|}+1. \tag{2}$$

Ya que las funciones $u(x,t)$ y $v(x-\xi,\,t-\tau)$ pertenecen a $C^2(K_\varepsilon)$, tendremos en K_ε

$$v\,\square\,u-u\,\square\,v=-\sum_{i=1}^{3}(u_{x_i}v-uv_{x_i})_{x_i}+(u_tv-uv_t)_t.$$

Integrando esta igualdad en K_ε y teniendo en cuenta que $\square v=0$ en K_ε, en virtud de la fórmula de Ostrogradski obtendremos

$$\int_{K_\varepsilon}v\,\square\,u\,dx\,dt=\int_{\Gamma_\varepsilon\cup D\cup\gamma_\varepsilon}\Big[-\sum_{i=1}^{3}(u_{x_i}v-uv_{x_i})\,n_i+(u_tv+uv_t)\,n_4\Big]\,dS=$$
$$=I_{\Gamma_\varepsilon}+I_{D_\varepsilon}+I_{\gamma_\varepsilon}, \tag{3}$$

donde $n=(n_1,n_2,n_3,n_4)$ es vector unitario de la normal exterior a ∂K_ε y I_{Γ_ε}, I_{D_ε}, I_{γ_ε} son las integrales extendidas a Γ_ε, D_ε, γ_ε.

Examinemos la integral extendida a Γ_ε. De (2) se desprende que $v\,|_{\Gamma_\varepsilon}=0$. Además, puesto que

$$\nabla v=(t-\tau)\frac{\xi-x}{|\xi-x|^3},\qquad v_t=\frac{1}{|x-\xi|}, \tag{4}$$

y la normal a Γ_ε $n=\frac{1}{\sqrt2}\left(\frac{x_1-\xi_1}{|x-\xi|},\ \frac{x_2-\xi_2}{|x-\xi|},\ \frac{x_3-\xi_3}{|x-\xi|},\ 1\right)=$ $=\frac{1}{\sqrt2}\left(\frac{x-\xi}{\tau-t},\ 1\right)$, entonces $\sum_{i=1}^{3}(v_{x_i}n_i)-v_tn_4\Big|_{\Gamma_\varepsilon}=\frac{1}{\sqrt2}\,\frac{(x-\xi,\ x-\xi)}{|x-\xi|^3}-$ $-\frac{1}{|x-\xi|}\equiv 0.$

Por consiguiente,

$$I_{\Gamma_\varepsilon}=\int_{\Gamma_\varepsilon}\Big[u\Big(\sum_{i=1}^{3}v_{x_i}n_i-v_tn_4\Big)+v\Big(u_tn_4-\sum_{i=1}^{3}u_{x_i}n_i\Big)\Big]\,dS=0. \tag{5}$$

Como en D_ε la normal $n(0, 0, 0, -1)$, entonces, en vista de (2) y (4)

$$I_{D_\varepsilon}=\int\limits_{\varepsilon<|x-\xi|<\tau-t^0}\frac{u(x, t^0)}{|x-\xi|}\,dx+\int\limits_{\varepsilon<|x-\xi|<\tau-t^0}\left(\frac{\tau-t^0}{|x-\xi|}-1\right)u_t(x, t^0)\,dx.$$

Puesto que las funciones $u(x, t^0)$ y $u_t(x, t^0)$ son continuas ($u\in C^1(K\cup\bar{D})$), existe un límite de la integral I_{D_ε} para $\varepsilon\to 0$, y

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_{D_\varepsilon}=\int\limits_{|x-\xi|<\tau-t^0}\frac{u(x, t^0)}{|x-\xi|}\,dx+$$
$$+\int\limits_{|x-\xi|<\tau-t^0}\left(\frac{\tau-t^0}{|x-\xi|}-1\right)u_t(x, t^0)\,dx. \qquad (6)$$

En la superficie γ_ε la normal $n=\left(\frac{-x+\xi}{|x-\xi|}, 0\right)=\left(\frac{\xi-x}{\varepsilon}, 0\right)$. Por lo tanto, teniendo en cuenta (4), obtenemos

$$I_{\gamma_\varepsilon}=-\int\limits_{t^0}^{\tau-\varepsilon}dt\int\limits_{|x-\xi|=\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial n}v\,dS_x+\int\limits_{t^0}^{\tau-\varepsilon}dt\int\limits_{|x-\xi|=\varepsilon}\frac{\partial v}{\partial n}u\,dS_x=$$
$$=-\int\limits_{t^0}^{\tau-\varepsilon}\left(\frac{t-\tau}{\varepsilon}+1\right)dt\int\limits_{|x-\xi|=\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial n}\,dS_x+\int\limits_{t^0}^{\tau-\varepsilon}\frac{t-\tau}{\varepsilon^2}\,dt\int\limits_{|x-\xi|=\varepsilon}u\,dS_x.$$

Puesto que para $|x-\xi|=\varepsilon$, $t^0\leqslant t\leqslant\tau-\varepsilon$, tienen lugar las desigualdades $\left|\frac{\partial u}{\partial n}\right|\leqslant M$ y $|u(x, t)-u(\xi, t)|\leqslant M\varepsilon$, donde M es una costante ($M=\max\limits_{\substack{|x-\xi|\leqslant\tau-t\\ t^0\leqslant t\leqslant\tau}}|\nabla u|$), entonces

$$\left|\int\limits_{|x-\xi|=\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial n}\,dS_x\right|\leqslant 4\pi\varepsilon^2 M$$

y

$$\left|\int\limits_{|x-\xi|=\varepsilon}u(x, t)\,dS_x-\int\limits_{|x-\xi|=\varepsilon}u(\xi, t)\,dS_x\right|\leqslant$$
$$\leqslant\int\limits_{|x-\xi|=\varepsilon}|u(x, t)-u(\xi, t)|\,dS_x\leqslant 4\pi\varepsilon^3 M.$$

Por ello, existe el límite para la integral I_{γ_ε} para $\varepsilon\to 0$ y

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_{\gamma_\varepsilon}=4\pi\int\limits_{t^0}^{\tau}(t-\tau)\,u(\xi, t)\,dt. \qquad (7)$$

Pasando en (3) al límite para $\varepsilon \to 0$, en vista de (5), (6) y (7), resulta que para cualquier punto (ξ, τ) de K se tiene

$$4\pi \int_{t^0}^{\tau} (t-\tau)\, u(\xi, t)\, dt =$$

$$= -\int\limits_{|x-\xi|<\tau-t^0} \frac{u(x, t^0)}{|x-\xi|}\, dx - \int\limits_{|x-\xi|<\tau-t^0} \left(\frac{\tau-t^0}{|x-\xi|}-1\right) u_t(x, t^0)\, dx +$$

$$+ \int_{t^0}^{\tau} dt \int\limits_{|x-\xi|<\tau-t} \left(\frac{t-\tau}{|x-\xi|}+1\right) \Box u(x, t)\, dx.$$

Derivemos esta igualdad respecto a τ:

$$\int_{t^0}^{\tau} u(\xi, t)\, dt = \frac{1}{4\pi(\tau-t^0)} \int\limits_{|x-\xi|=\tau-t^0} u(x, t^0)\, dS_x +$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \int\limits_{|x-\xi|<\tau-t^0} \frac{u_t(x, t^0)}{|x-\xi|}\, dx + \frac{1}{4\pi} \int_{t^0}^{\tau} dt \int\limits_{|x-\xi|<\tau-t} \frac{\Box u(x, t)}{|x-\xi|}\, dx,$$

de donde

$$u(\xi, \tau) = \frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{1}{4\pi(\tau-t^0)} \int\limits_{|x-\xi|=\tau-t^0} u(x, t^0)\, dS_x\right) +$$

$$+ \frac{1}{4\pi(\tau-t^0)} \int\limits_{|x-\xi|=\tau-t^0} u_t(x, t^0)\, dS_x +$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \int_{t^0}^{\tau} dt \int\limits_{|x-\xi|=\tau-t} \frac{\Box u(x, t)}{|x-\xi|}\, dS_x.$$

Ya que

$$\int_{t^0}^{\tau} dt \int\limits_{|x-\xi|=\tau-t} \frac{\Box u(x, t)}{|x-\xi|}\, dS_x = \int_0^{\tau-t^0} d\lambda \int\limits_{|x-\xi|=\lambda} \frac{\Box u(x, \tau-\lambda)}{|x-\xi|}\, dS_x =$$

$$= \int\limits_{|x-\xi|<\tau-t^0} \frac{\Box u(x, \tau-|x-\xi|)}{|x-\xi|}\, dx,$$

para cualquier punto (x, t) del cono K_{x^0, t^0, t^0} tiene lugar la siguiente *fórmula de Kirchhoff*:

$$u(x, t)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi(t-t^0)}\int\limits_{|x-\xi|=t-t^0} u(\xi, t^0)\,dS_\xi\right)+$$

$$+\frac{1}{4\pi(t-t^0)}\int\limits_{|x-\xi|=t-t^0} u_t(\xi, t^0)\,dS_\xi+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int\limits_{|x-\xi|<t-t^0}\frac{\square u(\xi, t-|x-\xi|)}{|x-\xi|}\,d\xi. \quad (8)$$

Puesto que

$$\frac{1}{4\pi(t-t^0)}\int\limits_{|x-\xi|=t-t^0} u(\xi, t^0)\,dS_\xi=\frac{t-t^0}{4\pi}\int\limits_{|\eta|=1} u(x+\eta(t-t^0), t^0)\,dS_\eta,$$

tenemos

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi(t-t^0)}\int\limits_{|x-\xi|=t-t^0} u(\xi, t^0)\,dS_\xi\right)=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{|\eta|=1} u(x+\eta(t-t^0), t^0)\,dS_\eta+$$

$$+\frac{t-t^0}{4\pi}\int\limits_{|\eta|=1}(\nabla u(x+\eta(t-t^0), t^0), \eta)\,dS_\eta=$$

$$=\frac{1}{4\pi(t-t^0)^2}\int\limits_{|x-\xi|=t-t^0}[u(\xi, t^0)+(\xi-x)\cdot\nabla u(\xi, t^0)]\,dS_\xi.$$

Por ello, la fórmula de Kirchhoff se puede escribir en la forma

$$u(x, t)=\frac{1}{4\pi(t-t^0)^2}\int\limits_{|x-\xi|=t-t^0}[u(\xi, t^0)+(\xi-x)\cdot\nabla u(\xi, t^0)]\,dS_\xi+$$

$$+\frac{1}{4\pi(t-t^0)}\int\limits_{|x-\xi|=t-t^0} u_t(\xi, t^0)\,dS_\xi+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int\limits_{|x-\xi|<t-t^0}\frac{\square u(\xi, t-|x-\xi|)}{|x-\xi|}\,d\xi. \quad (9)$$

Las fórmulas (8) y (9) muestran que el valor de la función u en el punto arbitrario (x, t) de K se expresa en $\overline{K}_{x, t, t^0}$ en términos de $\square u$, y en $\overline{D}_{x, t, t^0}$, en términos de u y u_t. Indiquemos que el valor de la función u en el punto $(x, t) \in K$ se determina (para $n = 3$) por los valores de la función $\square u$ no por todo el cono $\overline{K}_{x, t, t^0}$ sino sólo en su superficie lateral $\Gamma_{x,\,t,\,t^0}$, y por los valores de las funciones u, u_t, ∇u no por toda la base $\overline{D}_{x,\,t,\,t^0}$, sino sólo en la frontera de ésta, es decir, en la esfera $S_{x,\,t,\,t^0}$. En particular, si para un punto $(x, t) \in$ $\in K$ es que $\square u = 0$ en $\Gamma_{x,\,t,\,t^0}$ y $u = u_t = |\nabla u| = 0$ en $S_{x,\,t,\,t^0}$, entonces en este punto $u(x, t) = 0$.

De lo demostrado se deduce inmediatamente la validez (para $n = 3$) del siguiente teorema en el cual se afirma que la solución u de la ecuación (1) se determina unívocamente en el cono $K_{x^1,\,t^1,\,t^0} =$ $= K$ por los valores de u y u_t en la base $D_{x^1,\,t^1,\,t^0} = D$ de este cono.

TEOREMA 1. *Supongamos que las funciones $u_1(x, t)$ y $u_2(x, t)$ pertenecen a $C^2(K) \cap C^1(K \cup D)$, $\square u_1 = \square u_2$ en K y $u_1(x, t^0)|_D =$ $= u_2(x, t^0)|_D$, $\left.\frac{\partial u_1(x, t^0)}{\partial t}\right|_D = \left.\frac{\partial u_2(x, t^0)}{\partial t}\right|_D$. Entonces, $u_1 \equiv u_2$ en K.*

Efectivamente, la función $u = u_1 - u_2$ pertenece a $C^2(K) \cap$ $\cap C^1(K \cup D)$, $\square u = 0$ en K y para $x \in D$ $u(x, t^0) = u_t(x, t^0) = 0$. De (9) se desprende que $u(x, t) \equiv 0$ en K, es decir, $u_1(x, t) \equiv u_2(x, t)$ en K. El teorema está demostrado.

Una representación correspondiente, así como también la demostración del teorema 1 en el caso de un número arbitrario de variables espaciales, puede ser obtenida mediante el mismo procedimiento. Si la función $u(x, t) \in C^2(K) \cap C^1(K \cup D)$, la función $\square u$ y todas sus derivadas respecto a las variables espaciales hasta el orden $m =$ $= \max\left(\left[\frac{n}{2}\right] - 1, 0\right)$ son continuas en $K \cup D$, $u(x, t^0) \in C^{\left[\frac{n}{2}\right]}(D)$ y $u_t(x, t^0) \in C^m(D)$, entonces el valor de $u(x, t)$ en el punto arbitrario $(x, t) \in K$ se expresa en términos de la función $\square u$ (y de sus derivadas respecto a las variables espaciales hasta el orden m) en $\overline{K}_{x,\,t,\,t^0}$ y en términos de las funciones u y u_t (y de sus derivadas hasta el orden $\left[\frac{n}{2}\right]$ y m, respectivamente) en $\overline{D}_{x,\,t,\,t^0}$. Por ejemplo, para $n > 3$ la representación se obtiene del mismo modo que para el caso $n =$ $= 3$; con ello, a título de la solución especial de la ecuación de onda homogénea $v(x - \xi, t - \tau)$ para $\frac{t-\tau}{|x-\xi|} < -1$ se debe tomar la función $\int\limits_{-1}^{z} (\zeta^2 - 1)^{\frac{n-3}{2}}\, d\zeta$, $z = \frac{t-\tau}{|x-\xi|}$.

Señalemos que en el caso de n pares, $n \geqslant 2$, el valor de la función u en el punto (x, t) se determina por los valores de la función $\square u$ (y de sus derivadas respecto a las variables espaciales) en todo el cono $K_{x,\,t,\,t^0}$, y por los valores de funciones u y u_t (y de sus derivadas respecto a las variables espaciales) en toda la base $D_{x,\,t,\,t^0}$. Si en cambio, el número de variables espaciales es impar, $n > 3$, como también $n = 3$, el valor de la función u en el punto (x, t) se determina por valores de la función $\square u$ y por los de sus derivadas respecto a las variables espaciales sólo en la superficie lateral $\Gamma_{x,\,t,\,t^0}$ del cono, mientras que los valores de las funciones u, u_t y de sus derivadas respecto a las variables espaciales determinan el valor de u sólo en el contorno $S_{x,\,t,\,t^0}$ de la base.

En el caso de una o dos variables espaciales las representaciones correspondientes y, junto con éstas, las demostraciones del teorema 1 se obtienen de la manera más fácil directamente de la fórmula (9) (ó (8)).

Supongamos que la función $u(x, t)$, $x=(x_1, x_2)$, está dada en el cono $K=K_{x^1,\,t^1,\,t^0}$, $x^1=(x_1^1, x_2^1)$ y pertenece a $C^2(K)\cap C^1(K\cup D)$, $D=D_{x^1,\,t^1,\,t_0}$ y, además, $\square u=u_{tt}-u_{x_1x_1}-u_{x_2x_2}\in C(K\cup D)$. Podemos considerar $u(x, t)$ como una función de cuatro variables x_1, x_2, x_3, t, que no depende de x_3, dada en el cono de cuatro dimensiones $K_{x_1^1,\,x_2^1,\,x_3^1,\,t^1,\,t^0}$ donde x_3^1 es arbitraria; con ello $u(x_1, x_2, t)\in C^2(K_{x_1^1,\,x_2^1,\,x_3^1,\,t^1,\,t^0})\cap C^1(K_{x_1^1,\,x_2^1,\,x_3^1,\,t^1,\,t^0}\cup D_{x_1^1,\,x_2^1,\,x_3^1,\,t^1,\,t^0})$ y $u_{tt}-u_{x_1x_1}-u_{x_2x_2}-u_{x_3x_3}\in C(K_{x_1^1,\,\ldots,\,t^0}\cup D_{x_1^1,\,\ldots,\,t^0})$. En vista de la fórmula (9), para todos los puntos pertenecientes a K, tenemos

$$u(x_1, x_2, t)=\frac{1}{4\pi(t-t^0)^2}\int\limits_{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2+(x_3-\xi_3)^2=(t-t^0)^2}[u(\xi_1, \xi_2, t^0)+$$
$$+(\xi_1-x_1)u_{\xi_1}(\xi_1, \xi_2, t^0)+(\xi_2-x_2)u_{\xi_2}(\xi_1, \xi_2, t^0)]\,dS_\xi+$$
$$+\frac{1}{4\pi(t-t^0)}\int\limits_{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2+(x_3-\xi_3)^2=(t-t^0)^2}u_t(\xi_1, \xi_2, t^0)\,dS_\xi+$$
$$+\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{t-t_0}d\rho\int\limits_{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2+(x_3-\xi_3)^2=\rho^2}\frac{\square u(\xi_1, \xi_2, t-\rho)}{\rho}\,dS_\xi.$$

Ya que

$$\int\limits_{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2+(x_3-\xi_3)^2=\rho^2}g(\xi_1, \xi_2)\,dS_\xi=$$
$$=2\rho\int\limits_{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2<\rho^2}\frac{g(\xi_1, \xi_2)\,d\xi_1\,d\xi_2}{\sqrt{\rho^2-(x_1-\xi_1)^2-(x_2-\xi_2)^2}}, \tag{10}$$

resulta que

$$u(x, t)=\frac{1}{2\pi(t-t^0)}\int\limits_{|x-\xi|<t-t^0}\frac{u(\xi, t^0)+(\xi-x)\cdot\nabla u(\xi, t^0)}{\sqrt{(t-t^0)^2-|x-\xi|^2}}\,d\xi+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|x-\xi|<t-t^0}\frac{u_t(\xi, t^0)\,d\xi}{\sqrt{(t-t^0)^2-|x-\xi|^2}}+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{t-t^0}d\rho\int\limits_{|x-\xi|<\rho}\frac{\square u(\xi, t-\rho)}{\sqrt{\rho^2-|x-\xi|^2}}\,d\xi. \tag{11}$$

donde $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, $x = (x_1, x_2)$ y (x, t) es un punto cualquiera del cono K_{x^1, t^1, t^0}. Esta fórmula nos da una representación buscada de la función para el caso $n = 2$.

Indiquemos que para todo punto (x, t) del cono K

$$\frac{1}{2\pi(t-t^0)} \int\limits_{|x-\xi|<t-t_0} \frac{u(\xi, t^0) + (\xi - x)\cdot\nabla u(\xi, t^0)}{\sqrt{(t-t^0)^2 - |x-\xi|^2}}\, d\xi = \\ = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_{|x-\xi|<t-t^0} \frac{u(\xi, t^0)\, d\xi}{\sqrt{(t-t^0)^2 - |x-\xi|^2}}\right).$$

Por esta razon la igualdad (11) se puede escribir en la forma

$$u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_{|x-\xi|<t-t^0} \frac{u(\xi, t^0)\, d\xi}{\sqrt{(t-t^0)^2 - |x-\xi|^2}}\right) + \\ + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|x-\xi|<t-t^0} \frac{u(\xi, t^0)\, d\xi}{\sqrt{(t-t^0)^2 - |x-\xi|^2}} + \\ + \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{t-t^0} d\rho \int\limits_{|x-\xi|<\rho} \frac{\Box u(\xi, t-\rho)}{\sqrt{\rho^2 - |x-\xi|^2}}\, d\xi. \qquad (12)$$

La expresión (12) se llama *fórmula de Poisson*. Análogamente, cuando $n = 1$, la representación correspondiente se obtiene con facilidad de la fórmula (11) (ó de (12)). Si $u(x, t) \in C^2(K) \cap C^1(K \cup D)$, donde: $K = K_{x^1, t^1, t^0}$ (un triángulo $\{t - t^1 < x - x^1 < -t + t^1,\ t^0 < t < t^1\}$), $D = D_{x^1, t^1, t^0}$ (un intervalo $(x^1 + t^0 - t^1,\ x^1 + t^1 - t^0)$), y $\Box u = u_{tt} - u_{xx} \in C(K \cup D)$, entonces los valores de la función u en un punto arbitrario $(x, t) \in K$ se expresan por la siguiente *fórmula de D'Alembert*:

$$u(x, t) = \frac{u(x - t + t^0, t^0) + u(x + t - t^0, t^0)}{2} + \\ + \frac{1}{2} \int\limits_{x-t+t^0}^{x-t^0+t} u_t(\xi, t^0)\, d\xi + \\ + \frac{1}{2} \int\limits_{t^0}^{t} d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \Box u(\xi, \tau)\, d\xi, \quad (x, t) \in K_{x^1, t^1, t^0}. \qquad (13)$$

2. Problema de Cauchy para la ecuación de onda. Designemos, para abreviar, los conjuntos de puntos $\{x \in R_n,\ t > t^0\}$, $\{x \in R_n,\ t \geqslant t^0\}$, $\{x \in R_n,\ t^0 \leqslant t \leqslant t^1\}$, $\{x \in R_n,\ t = t^0\}$ mediante $\{t > t^0\}$, $\{t \geqslant t^0\}$, $\{t^0 \leqslant t \leqslant t^1\}$, $\{t = t^0\}$, respectivamente, y los espacios $C^k(\{t > t^0\})$, $C^k(\{t \geqslant t^0\})$ mediante $C^k(t > t^0)$ y $C^k(t \geqslant t^0)$.

Una función $u(x, t)$, perteneciente a $C^2(t > 0) \cap C^1(t \geqslant 0)$, se denomina *solución (clásica) del problema de Cauchy para la ecuación de onda en el semiespacio* $\{t > 0\}$, si para todo $x \in R_n$, $t > 0$, ella satisface la ecuación

$$\Box u = f, \tag{14}$$

y, cuando $t = 0$, las condiciones iniciales

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \qquad u_t|_{t=0} = \psi(x), \tag{15}$$

donde φ, ψ y f son las funciones dadas.

En virtud del teorema 1 del punto anterior, la solución $u(x, t)$ del problema (14), (15) se define unívocamente en cualquier cono $K_{x^1, t^1, 0}$ ($x^1 \in R_n$, $t^1 > 0$), y, consecuentemente, en todo el semiespacio $\{t > 0\}$, en términos de las funciones dadas, f, φ y ψ. De este modo, tiene lugar la siguiente afirmación.

TEOREMA 2. *El problema de Cauchy* (14), (15) *no puede tener más de una solución.*

Pasemos a la cuestión de la existencia de la solución del problema de Cauchy.

Supongamos que la solución $u(x, t)$ del problema (14), (15) existe. De los resultados obtenidos en el punto anterior se deduce que si $f \in C(t \geqslant 0)$, entonces la solución se presenta, en el caso de tres variables espaciales ($n = 3$), por la fórmula de Kirchhoff

$$u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi t}\int\limits_{|x-\xi|=t} \varphi(\xi)\, dS_\xi\right) + \frac{1}{4\pi t}\int\limits_{|x-\xi|=t} \psi(\xi)\, dS_\xi + \\ + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{|x-\xi|<t} \frac{f(\xi, t-|x-\xi|)}{|x-\xi|}\, d\xi, \qquad x \in R_3,\ t > 0, \tag{16}$$

en el caso de dos variables espaciales ($n = 2$), por la fórmula de Poisson

$$u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|x-\xi|<t} \frac{\varphi(\xi)\, d\xi}{\sqrt{t^2-|x-\xi|^2}}\right) + \\ + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|x-\xi|<t} \frac{\psi(\xi)\, d\xi}{\sqrt{t^2-|x-\xi|^2}} + \\ + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{|x-\xi|<\tau} \frac{f(\xi, t-\tau)\, d\xi}{\sqrt{\tau^2-|x-\xi|^2}}, \qquad x \in R_2,\ t > 0, \tag{17}$$

y, en el caso de una variable espacial ($n = 1$), por la fórmula de D'Alembert

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x+t)+\varphi(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} \psi(\xi)\, d\xi + \\ + \frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-\tau}^{x+\tau} f(\xi, \tau)\, d\xi, \qquad x \in R_1,\ t > 0. \tag{18}$$

Con este motivo, la demostración de la existencia de la solución del problema (14), (15) se reduce a la búsqueda de condiciones bajo las cuales la función $u(x, t)$, definida por una representación correspondiente, es la solución de este problema.

Examinemos primero el caso de tres variables espaciales ($n = 3$). Es válida la siguiente afirmación.

Si $\varphi \in C^3(R_3)$, $\psi \in C^2(R_3)$ y la función f, como también todas sus derivadas respecto a x_1, x_2, x_3 hasta el segundo orden, inclusive, son continuas en $\{t \geqslant 0\}$, entonces la función u, dada por la fórmula de Kirchhoff (16), es la solución del problema de Cauchy (14), (15); con ello, para todo punto $(X, T) \in \{t \geqslant 0\}$ tiene lugar la desigualdad

$$\|u\|_{C(\overline{K}_{X, T, 0})} \leqslant \|\varphi\|_{C(\overline{D}_{X, T, 0})} + T \| |\nabla\varphi| \|_{C(\overline{D}_{X, T, 0})} + \\ + T \|\psi\|_{C(\overline{D}_{X, T, 0})} + \frac{T^2}{2} \|f\|_{C(\overline{K}_{X, T, 0})}. \tag{19}$$

OBSERVACION. De la fórmula (19) se deduce que si la función f es acotada en $\{0 < t < T\}$, la función ψ es acotada en R_3 y la función φ es acotada en R_3 junto con todas sus primeras derivadas, entonces la solución u del problema (14), (15) es acotada en $\{0 < t < < T\}$ y

$$\sup_{\{0<t<T\}} |u| \leqslant \sup_{R_3} |\varphi| + T \sup_{R_3} |\nabla\varphi| + T \sup_{R_3} |\psi| + \frac{T^2}{2} \sup_{\{0<t<T\}} |f|$$

Examinemos, ante todo, la función

$$u_g(x, t, \tau) = \frac{1}{4\pi t} \int\limits_{|x-\xi|=t} g(\xi, \tau)\, dS_\xi, \qquad x \in R_3,\ t > 0,\ \tau > 0, \tag{20}$$

donde $g(x, \tau) \in C(\tau \geqslant 0)$. Cuando la función g no depende del parámetro τ, $g(x, \tau) = g(x)$, designaremos la función $u_g(x, t, \tau)$ mediante $u_g(x, t)$.

LEMA 1. *Si la función $g(x, \tau)$ y todas sus derivadas respecto a x_1, x_2, x_3 hasta el k-ésimo orden inclusive, $k = 0, 1, \ldots$, pertenecen a $C(\tau \geqslant 0)$, entonces la función $u_g(x, t, \tau)$ y todas sus derivadas respecto a x_1, x_2, x_3, t hasta el k-ésimo orden inclusive son continuas en el conjunto $\{x \in R_3,\ t \geqslant 0,\ \tau \geqslant 0\}$. Cuando $k \geqslant 2$, la función $u_g(x, t, \tau)$, para cualquier $\tau \geqslant 0$, satisface en $\{t > 0\}$ la ecuación $\square u_g = 0$ y las condiciones $u_g|_{t=0} = 0$,*

$$\Delta u_g|_{t=0} = 0, \quad u_{gt}|_{t=0} = g(x, \tau).$$

La primera afirmación del lema se deduce de la igualdad

$$u_g(x, t, \tau) = \frac{t}{4\pi} \int\limits_{|\eta|=1} g(x + t\eta, \tau)\, dS_\eta. \tag{21}$$

De (21) se deduce también que $u_g|_{t=0} = 0$. Puesto que para $k \geqslant 2$

$$\Delta u_g(x, t, \tau) = \frac{t}{4\pi} \int\limits_{|\eta|=1} \Delta g(x + t\eta, \tau)\, dS_\eta, \tag{22}$$

entonces $\Delta u_g|_{t=0} = 0$.

Derivando (21) respecto a t, obtenemos

$$\frac{\partial u_g}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{|\eta|=1} g(x + t\eta, \tau)\, dS_\eta + \\ + \frac{t}{4\pi} \int\limits_{|\eta|=1} (\nabla g(x + t\eta, \tau), \eta)\, dS_\eta, \tag{23}$$

de donde

$$u_{gt}|_{t=0} = \lim_{t\to 0} \frac{\partial u_g}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{|\eta|=1} g(x, \tau)\, dS_\eta = g(x, \tau).$$

Puesto que

$$\frac{t}{4\pi} \int\limits_{|\eta|=1} (\nabla g(x + t\eta, \tau) \cdot \eta)\, dS_\eta = \\ = \frac{t}{4\pi} \int\limits_{|\eta|=1} \frac{\partial g(x + t\eta, \tau)}{\partial n_\eta}\, dS_\eta = \frac{1}{4\pi t} \int\limits_{|x-\xi|=t} \frac{\partial g(\xi, \tau)}{\partial n}\, dS_\xi = \\ = \frac{1}{4\pi t} \int\limits_{|x-\xi|<t} \Delta g(\xi, \tau)\, d\xi = \frac{I(x, t, \tau)}{4\pi t},$$

donde $I(x, t, \tau) = \int\limits_{|x-\xi|<t} \Delta g(\xi, \tau)\, d\xi$, entonces (23) se puede representar en la forma

$$\frac{\partial u_g}{\partial t} = \frac{1}{t} u_g + \frac{I}{4\pi t},$$

de donde

$$\frac{\partial^2 u_g}{\partial t^2} = -\frac{1}{t^2} u_g + \frac{1}{t} \frac{\partial u_g}{\partial t} + \frac{1}{4\pi t} \frac{\partial I}{\partial t} - \frac{I}{4\pi t^2} = \\ = -\frac{u_g}{t^2} + \frac{1}{t}\left(\frac{u_g}{t} + \frac{I}{4\pi t}\right) + \frac{1}{4\pi t} \frac{\partial I}{\partial t} - \\ - \frac{I}{4\pi t^2} = \frac{1}{4\pi t} \frac{\partial I}{\partial t} = \frac{1}{4\pi t} \int\limits_{|x-\xi|=t} \Delta g(\xi, \tau)\, dS_\xi = \\ = \frac{t}{4\pi} \int\limits_{|\eta|=1} \Delta g(x + t\eta, \tau)\, dS_\eta. \tag{24}$$

De (24) y (22) se infiere que $u_{gtt} = \Delta u_g$. El lema está demostrado.

Como el segundo sumando en el segundo miembro de (16) es $u_\psi(x, t)$, entonces en virtud del lema 1 ($\psi \in C^2(R_3)$), pertenece a $C^2(t \geqslant 0)$, es la solución de la ecuación de onda homogénea y satisface las condiciones iniciales

$$u_\psi|_{t=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u_\psi}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi.$$

El primer sumando en el segundo miembro de (16) es $\dfrac{\partial u_\varphi}{\partial t}$. Puesto que $\varphi \in C^3(R_3)$, la función $\dfrac{\partial u_\varphi}{\partial t} \in C^2(t \geqslant 0)$ es la solución de la ecuación de onda homogénea

$$\Box\left(\frac{\partial}{\partial t} u_\varphi\right) = \frac{\partial}{\partial t} \Box u_\varphi = 0$$

y satisface las condiciones iniciales

$$\left.\frac{\partial u_\varphi}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi, \quad \left.\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial t}\right)\right|_{t=0} = \Delta u_\varphi|_{t=0} = 0.$$

Designemos por $F(x, t)$ el tercer sumando del segundo miembro de (16) y transformémoslo de la manera siguiente:

$$F(x, t) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{|x-\xi|<t} \frac{f(\xi, t-|x-\xi|)}{|x-\xi|} d\xi =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_0^t \frac{d\rho}{\rho} \int\limits_{|x-\xi|=\rho} f(\xi, t-\rho)\, dS_\xi =$$

$$= \int_0^t \left(\frac{1}{4\pi(t-\tau)} \int\limits_{|x-\xi|=t-\tau} f(\xi, \tau)\, dS_\xi\right) d\tau = \int_0^t G(x, t, \tau)\, d\tau,$$

donde $G(x, t, \tau) = u_f(x, t-\tau, \tau)$. En vista del lema 1, la función $G(x, t, \tau)$ y todas sus derivadas respecto a x_1, x_2, x_3, t hasta el segundo orden inclusive son continuas en el conjunto $\{x \in R_3, t \geqslant 0, 0 \leqslant \tau \leqslant t\}$ y para cualquier $\tau \geqslant 0$

$$G_{tt} - \Delta G = 0 \quad \text{cuando} \quad t \geqslant \tau,$$

$$G|_{t=\tau} = 0, \quad G_t|_{t=\tau} = f(x, \tau).$$

Entonces, la función $F(x, t) = \int_0^t G(x, t, \tau)\, d\tau$ es continua en $\{t \geqslant 0\}$ junto con la primera derivada respecto a t, y todas las derivadas respecto a x_1, x_2, x_3 hasta el segundo orden inclusive. Y como

$$F_t = G|_{\tau=t} + \int_0^t G_t(x, t, \tau)\,d\tau = \int_0^t G_t(x, t, \tau)\,d\tau,$$

entonces, $F \in C^2$ $(t \geqslant 0)$. Además,

$$\Delta F(x, t) = \int_0^t \Delta G(x, t, \tau)\,d\tau$$

y

$$F_{tt} = G_t|_{\tau=t} + \int_0^t G_{tt}(x, t, \tau)\,d\tau = f + \int_0^t \Delta G(x, t, \tau)\,d\tau.$$

Por consiguiente, la función $F(x, t)$ satisface la ecuación $\Box F = f$ y las condiciones iniciales homogéneas $F|_{t=0} = 0$, $F_t|_{t=0} = 0$.

Se ha demostrado, pues, que la función

$$u(x, t) = \frac{\partial u_\varphi(x, t)}{\partial t} + u_\psi(x, t) + \int_0^t u_f(x, t-\tau, \tau)\,d\tau,$$

dada por la fórmula (16), es la solución del problema (14), (15).

Demostremos ahora la desigualdad (19). Sea (X, T) un punto arbitrario del semiespacio $\{t > 0\}$. En vista de (20), para todo punto (x, t) del cono $K_{X, T, 0}$ y todo $\tau > 0$

$$|u_g(x, t, \tau)| \leqslant t \max_{|x-\xi|=t} |g(\xi, \tau)| \leqslant T \max_{|x-\xi|=t} g(\xi, \tau) \tag{25}$$

Por lo tanto,

$$\|u_\psi\|_{C(\bar{K}_{X, T, 0})} \leqslant T \max_{(x, t)\in K_{X, T, 0}} \max_{|x-\xi|=t} |\psi(\xi)| =$$

$$= T \max_{|x-X|\leqslant T} |\psi| = T\|\psi\|_{C(\bar{D}_{X, T, 0})} \tag{26}$$

y

$$\left\|\int_0^t u_f(x, t-\tau, \tau)\,d\tau\right\|_{C(\bar{K}_{X, T, 0})} \leqslant \int_0^T (t-\tau) \max_{|x-\xi|=t-\tau} |f(\xi, \tau)|\,d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \|f\|_{C(\bar{K}_{X, T, 0})} \int_0^T (T-\tau)\,d\tau = \frac{T^2}{2}\|f\|_{C(\bar{K}_{X, T, 0})}. \tag{27}$$

Análogamente, en virtud de (23)

$$\left\|\frac{\partial u_\varphi}{\partial t}\right\|_{C(\bar{K}_{X, T, 0})} \leqslant \|\varphi\|_{C(\bar{D}_{X, T, 0})} + T\|\,|\nabla\varphi|\,\|_{C(\bar{D}_{X, T, 0})}. \tag{28}$$

La desigualdad (19) se deduce directamente de (26)—(28).

Señalemos que las condiciones, impuestas a las funciones φ, ψ, f, para las cuales está demostrada la existencia de la solución del problema de Cauchy, en sentido determinado no pueden ser debilitadas. El siguiente ejemplo muestra que la condición de pertenencia de la función φ al espacio $C^2(R_3)$ no es suficiente para que exista la solución del problema (14), (15).

Supongamos que la función φ pertenece a $C^2(R_3)$ y depende sólo de $|x|$, $\varphi(x) = \alpha(|x|)$. Sea que existe también la solución $u(x, t)$ del problema (14), (15) con la función citada $\varphi(x)$ y las funciones $\psi \equiv 0$ y $f \equiv 0$. Entonces, en virtud de (16)

$$u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi t}\int\limits_{|x-\xi|=t} \alpha(|\xi|)\, dS_\xi\right).$$

Sea $|x| \neq 0$. Puesto que para todos los puntos ξ de la esfera $\{|x-\xi| = t\}$ tiene lugar la igualdad $|\xi^2| = |x|^2 + t^2 + 2|x|t\cos\theta$, donde θ es un ángulo entre los vectores x y $\xi - x$, entonces

$$\int\limits_{|x-\xi|=t} \alpha(|\xi|)\, dS_\xi =$$

$$= t^2\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \alpha\left(\sqrt{t^2+|x|^2+2|x|t\cos\theta}\right)\operatorname{sen}\theta\, d\theta =$$

$$= 2\pi t^2\int\limits_{-1}^{+1} \alpha\left(\sqrt{t^2+|x|^2+2|x|t\lambda}\right) d\lambda = \frac{2\pi t}{|x|}\int\limits_{|t-|x||}^{t+|x|} \rho\alpha(\rho)\, d\rho.$$

Por esto,

$$u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2|x|}\int\limits_{|t-|x||}^{t+|x|} \rho\alpha(\rho)\, d\rho\right) =$$

$$= \frac{1}{2|x|}\left((t+|x|)\,\alpha(t+|x|) - (t-|x|)\,\alpha(|t-|x||)\right) =$$

$$= \frac{t}{2|x|}\left(\alpha(t+|x|) - \alpha(|t-|x||)\right) + \frac{1}{2}\left(\alpha(t+|x|) + \alpha(|t-|x||)\right).$$

De aquí, en virtud de la continuidad de la solución, $u(0, t) = t\alpha'(t) + \alpha(t)$. Y como la función $u(0, t) \in C^2(t > 0)$, la función $\alpha(|x|)$ debe pertenecer a $C^3(|x| > 0)$, lo que, por supuesto, no se infiere de la pertenencia de la función φ al espacio $C^2(R_3)$.

Sea, ahora, $n = 2$. Mostremos que *si $\varphi(x_1, x_2) \in C^3(R_2)$, $\psi(x_1, x_2) \in C^2(R_2)$ y la función $f(x_1, x_2, t)$ es continua en $\{t > 0\}$ junto con todas las derivadas respecto a las variables x_1 y x_2 hasta el segundo orden inclusive, entonces la función $u(x_1, x_2, t)$, dada por la fórmula de Poisson* (17), *es la solución del problema* (14), (15). *Con ello, para todo punto (X, T) del semiespacio $\{t > 0\}$ es válida la desigualdad* (19).

De acuerdo con la fórmula (10), para cualquier x_3

$$u(x_1, x_2, t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi t}\int\limits_{S_t(x_1, x_2, x_3)} \varphi(\xi_1, \xi_2)\,dS_\xi\right) + \frac{1}{4\pi t}\int\limits_{S_t(x_1, x_2, x_3)} \psi(\xi_1, \xi_2)\,dS_\xi + \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^t \frac{d\tau}{\tau}\int\limits_{S_\tau(x_1, x_2, x_3)} f(\xi_1, \xi_2, t-\tau)\,dS_\xi, \qquad (17')$$

donde $S_\rho(x_1, x_2, x_3)$ es una esfera de radio ρ y con el centro en el punto (x_1, x_2, x_3): $(x_1-\xi_1)^2 + (x_2-\xi_2)^2 + (x_3-\xi_3)^2 = \rho^2$. Como acabamos de demostrar, la función en el segundo miembro de la igualdad (17′) es la solución del problema: $u_{tt} - u_{x_1x_1} - u_{x_2x_2} - u_{x_3x_3} = f(x_1, x_2, t)$ en $\{t > 0\}$, $u|_{t=0} = \varphi(x_1, x_2)$, $u_t|_{t=0} = \psi(x_1, x_2)$, y para ella se cumple la desigualdad (19). Y ya que la función u no depende de x_3, será, para $n = 2$, la solución del problema (14), (15).

Cuando $n = 1$, se comprueba inmediatamente que *la función $u(x, t)$, definida por la fórmula de D'Alembert* (18), *es la solución del problema* (14), (15), *si $\varphi \in C^2(R_1)$, $\psi \in C^1(R_1)$ y la función $f(x, t)$ y su primera derivada respecto a x son continuas en $\{t \geqslant 0\}$. Con ello, para todos los puntos (X, T) del semiplano $\{t > 0\}$ tiene lugar la desigualdad*

$$\|u\|_{C(\overline{K}_{X,T,0})} \leqslant \|\varphi\|_{C(\overline{D}_{X,T,0})} + T\|\psi\|_{C(\overline{D}_{X,T,0})} + \frac{T^2}{2}\|f\|_{C(\overline{K}_{X,T,0})}$$

($K_{X,T,0}$ es un triángulo $\{t + X - T < x < T + X - t,\ 0 < t < T\}$ y $D_{X,T,0} = \{X - T < x < X + T,\ t = 0\}$, su base).

En caso de haber más de tres variables espaciales ($n > 3$), así como para $n = 3$, se establece que si $\varphi \in C^{\left[\frac{n}{2}\right]+2}(R_n)$, $\psi \in C^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}(R_n)$ y la función f es continua en el conjunto $(t \geqslant 0)$ junto con sus derivadas respecto a $x_1, \ldots, x_n$ hasta el $\left[\frac{n}{2}\right] + 1$-ésimo orden inclusive, entonces la función u, definida por la representación correspondiente, es la solución del problema (14), (15).

TEOREMA 3. *Si $\varphi(x) \in C^{m+3}(R_n)$, $\psi(x) \in C^{m+2}(R_n)$ donde $m = \max\left(\left[\frac{n}{2}\right] - 1,\ 0\right)$, y la función $f(x, t)$ es continua en $\{t \geqslant 0\}$ junto con sus derivadas respecto a $x_1, \ldots, x_n$ hasta el orden $m + 2$ inclusive, entonces la solución $u(x, t)$ del problema* (14), (15) *existe. Con ello, para cualquier punto (X, T)* del semiespacio $\{t > 0\}$

se efectúa la desigualdad

$$\|u\|_{C(\overline{K}_{x,T,0})} \leqslant C\,(\|\varphi\|_{C^{m+1}(\overline{D}_{x,T,0})} + \|\psi\|_{C^m(\overline{D}_{x,T,0})} + \sum_{|\alpha| \leqslant m} \|D^\alpha f\|_{C(\overline{K}_{x,T,0})})$$

con la constante C que sólo depende de T.

Ya hemos indicado en el punto anterior que de la fórmula de Poisson (cuando $n = 2$) y de la representación correspondiente (cuando cualquier n par es mayor que 2) se deduce que el valor de la solución del problema de Cauchy (14), (15) en el punto (x, t), $t > 0$, depende de los valores de la función f (y de los valores de las derivadas de ésta respecto a las variables espaciales, cuando $n > 2$) por todo el cono $\overline{K}_{x,t,0}$, así como también de los valores de funciones iniciales φ y ψ (y de los de sus derivadas) por toda la base $\overline{D}_{x,t,0}$ de este cono. En el caso de cualquier $n \geqslant 3$ impar (también cuando $n = 3$) el valor de la solución en el punto (x, t) se determina por los valores de la función f, y cuando $n > 3$, también por los valores de sus derivadas respecto a las variables espaciales sólo en la superficie lateral $\Gamma_{x,t,0}$ del cono $K_{x,t,0}$, y por los valores de funciones iniciales φ y ψ y de las derivadas de éstas en el contorno de la base del cono, es decir, en la esfera $S_{x,t,0}$.

Por este motivo, el cono $\overline{K}_{x,t,0}$ (en el caso de un número par de variables espaciales, $n \geqslant 2$) y la superficie cónica $\Gamma_{x,t,0}$ (en el caso de $n \geqslant 3$ impar) se suelen llamar *campo de dependencia del segundo miembro de la ecuación* de la solución del problema de Cauchy (14), (15) en el punto (x, t). Por analogía, la bola $D_{x,t,0}$ ubicada en el plano inicial (cuando $n \geqslant 2$ es par) y el contorno de la bola, es decir, la esfera $S_{x,T,0}$ (cuando $n \geqslant 3$ es impar) se suelen llamar *campo de dependencia de los datos iniciales* de la solución del problema de Cauchy en el punto (x, t).

Cuando $n = 1$, de la fórmula de D'Alembert (18) se deduce que la solución del problema de Cauchy en el punto (x, t) depende sólo de los valores de la función f en el triángulo $K_{x,t,0}$, de los valores de función inicial ψ en la base de este triángulo $\overline{D}_{x,t,0}$ y de los valores de las funciones φ en el contorno de la base, es decir, en los puntos $(x + t, 0)$ y $(x - t, 0)$.

Supongamos que para cierto $R > 0$ las funciones iniciales φ y ψ son nulas, si $|x| \geqslant R$, y la función f es nula cuando $|x| + t \geqslant R$. Entonces, la solución u del problema de Cauchy es nula para todo $(x, t) \in \{|x| \geqslant R + t, t \geqslant 0\}$, puesto que el cono $K_{x,t,0}$ para tales (x, t) no tiene puntos comunes con el conjunto $\{|x| + t < R, t > 0\}$, y la base del cono $\overline{D}_{x,t,0}$ no tiene puntos comunes con la bola $\{|x| < R, t = 0\}$. (Esta afirmación sigue siendo válida incluso cuando f es nula sólo para $|x| \geqslant R + t$.)

En el caso de un número par de variables espaciales el conjunto $\{|x| \geqslant R + t,\ t \geqslant 0\}$ es, hablando en general, un conjunto al máximo posible en el cual $u = 0$. Por ejemplo, si, para $n = 2$, suponemos que la función ψ es positiva en el círculo $\{|x| < R\}$, y que las φ y f son nulas, de la fórmula de Poisson se desprende que $u(x, t) > 0$ para todo $(x, t) \in \{|x| < R + t,\ t > 0\}$.

Cuando el número de variables espaciales $n \geqslant 3$ es impar, la función $u(x, t)$ se anula no sólo en el conjunto $\{|x| \geqslant R + t,\ t \geqslant 0\}$ sino también en el conjunto $\{|x| \leqslant t - R,\ t \geqslant R\}$, ya que para $(x, t) \in \{|x| \leqslant t - R,\ t \geqslant R\}$ la superficie cónica $\Gamma_{x, t, 0}$ no tiene puntos comunes con el conjunto $\{|x| + t < R,\ t > 0\}$, mientras que el contorno de la base $S_{x, t, 0}$ no tiene puntos comunes con la bola $\{|x| < R,\ t = 0\}$. El conjunto $G = \{|x| \geqslant R + t,\ t \geqslant 0\} \cup \{|x| \leqslant t - R,\ t \geqslant R\}$ es, en general, un conjunto máximo en el cual $u = 0$. Por ejemplo, si, cuando $n = 3$, la función $\psi(x) > 0$ para $|x| < R$, y las funciones φ y f son nulas, de la fórmula de Kirchhoff se desprende que $u(x, t) > 0$ en el dominio $\{||x| - t| < R,\ t > 0\}$ complementario a G.

Si el término independiente $f(x, t)$ en la ecuación (14) está definido no por todo el semiespacio $\{t > 0\}$ sino solamente en la banda $\{0 < t < T\} = \Pi_T$ para cierto $T > 0$, entonces el problema de Cauchy para la ecuación (14) se considera en la banda Π_T.

Una función $u(x, t)$, perteneciente a $C^2(0 < t < T) \cap C^1(0 \leqslant t < T)$, se denomina *solución del problema de Cauchy* (14), (15) *en la banda* Π_T, si para todos los puntos $(x, t) \in \Pi_T$ ella satisface la ecuación (14), y para $t = 0$, las condiciones iniciales (15). Para el problema de Cauchy en una banda tienen lugar, por supuesto, los teoremas de existencia e unicidad, análogos a teoremas correspondientes para el problema de Cauchy en un semiespacio. El problema de Cauchy en la banda Π_T no puede tener más que una sola solución y, por ejemplo, cuando $n = 3$, para que exista la solución del problema de Cauchy en Π_T, es suficiente que $\varphi \in C^3(R_3)$, $\psi \in C^2(R_3)$, y la función f sea continua en $\{0 \leqslant t < T\}$ junto con todas sus derivadas respecto a las variables x_1, x_2, x_3 hasta el segundo orden inclusive; con ello, la solución del problema se representa en Π_T por la fórmula de Kirchhoff.

A la par con el problema de Cauchy en el semiespacio $\{t > 0\}$ se puede también examinar este problema en los subespacios $\{t > t^0\}$ o bien $\{t < t^0\}$ para t^0 cualquiera. Una función $u(x, t)$, perteneciente al espacio $C^2(t > t^0) \cap C^1(t \geqslant t^0)$, se llama *solución del problema de Cauchy en el semiespacio* $\{t > t^0\}$ *para la ecuación de onda*, si en $\{t > t^0\}$ ella satisface la ecuación $\Box u = f$, y para $t = t^0$, las condiciones iniciales $u|_{t=t^0} = \varphi$, $u_t|_{t=t^0} = \psi$. De modo semejante se determina la solución del problema de Cauchy en el semiespacio $\{t < t^0\}$. El problema de Cauchy en el semiespacio $\{t > t^0\}$ se reduce al problema de Cauchy, sustituyendo t por $t - t^0$, en el semiespacio $\{t > 0\}$. Sustituyendo t por $t^0 - t$, reducimos el problema de Cauchy en el semiespacio $\{t < t^0\}$ al problema de Cauchy en el semiespacio $\{t > 0\}$. Mediante la sustitución de t por t/a (a es una constante positiva) al problema de Cauchy (14), (15) se reduce el problema de Cauchy en el semiespacio $\{t > 0\}$ para la ecuación $\frac{1}{a^2} u_{tt} - \Delta u = f$.

Supongamos que D es un dominio n-dimensional del plano $\{t = 0\}$ y el dominio Q, ubicado en el semiespacio $\{t > 0\}$, está constituido por los puntos (x, t) que son vértices de los conos $K_{x, t, 0}$, cuyas bases (las bolas $D_{x, t, 0}$) pertenecen a D. Si, en particular, D es la bola $\{|x - x^0| < R\}$, el dominio Q será el cono $K_{x^0, R, 0}$; si D es el cubo $\{|x_i - x_i^0| < a, i = 1, \ldots, n\}$, Q será una pirámide cuya base estará constituida por dicho cubo y con el vértice en el punto (x^0, a); si D es todo el plano $\{t = 0\}$, Q será el semiespacio $\{t > 0\}$.

Una función $u(x, t)$, perteneciente a $C^2(Q) \cap C^1(Q \cup D)$, se llama *solución del problema de Cauchy en Q para la ecuación de onda*, si ella satisface en Q la ecuación $\Box u = f$, y para $t = 0$, $x \in D$, las condiciones iniciales $u|_{t=0} = \varphi$, $u_t|_{t=0} = \psi$.

Del teorema 1 del punto antecedente se deduce inmediatamente el teorema de unicidad de la solución para el problema de Cuachy en Q: el problema de Cauchy en Q no puede tener más que una sola solución.

No es difícil ver que en el caso que consideramos es también válido el teorema de existencia, es decir, el teorema 3. Por ejemplo, para $n = 3$ la solución del problema de Cauchy en Q existe, si $\varphi \in C^3(D)$, $\psi \in C^2(D)$, y la función f es continua en $Q \cup D$ junto con las derivadas respecto a las variables espaciales hasta el segundo orden inclusive. Con ello, la solución $u(x, t)$ se define por la fórmula de Kirchhoff (16).

Señalemos que la solución del problema de Cauchy (14), (15) en el semiespacio $\{t > 0\}$ en el dominio Q coincide con la del problema de Cauchy en Q para la ecuación (14) con las funciones iniciales φ y ψ consideradas sólo en D.

§ 2. Problemas mixtos

1. Unicidad de solución. Sea D un dominio acotado del espacio n-dimensional R_n ($x = (x_1, \ldots, x_n)$ es un punto de este espacio). En el espacio $(n+1)$-dimensional $R_{n+1} = R_n \times \{-\infty < t < +\infty\}$ examinemos un cilindro acotado $Q_T = \{x \in D, 0 < t < T\}$ de altura $T > 0$. Designemos con Γ_T la superficie lateral $\{x \in \partial D, 0 < t < T\}$ del cilindro Q_T, y con D_τ, la sección $\{x \in D, t = \tau\}$ de este cilindro por el plano $t = \tau$; en particular, la base superior del cilindro Q_T es $D_T = \{x \in D,\ t = T\}$ y su base inferior, $D_0 = \{x \in Q,\ t = 0\}$.

En el cilindro Q_T, para cierta $T > 0$, examinemos una ecuación hiperbólica

$$\mathcal{L}u \equiv u_{tt} - \operatorname{div}(k(x)\nabla u) + a(x)u = f(x, t) \tag{1}$$

donde $k(x) \in C^1(\overline{D})$, $a(x) \in C(\overline{D})$, $k(x) \geqslant k_0 = \text{const} > 0$.

La función $u(x, t)$, perteneciente al espacio $C^2(Q_T) \cap C^1(Q_T \cup \cup \Gamma_T \cup \overline{D}_0)$, que satisface la ecuación (1) en Q_T, las condiciones iniciales

$$u|_{t=0} = \varphi, \tag{2}$$

$$u_t|_{t=0} = \psi, \tag{3}$$

en D_0, y una de las condiciones límites

$$u|_{\Gamma_T} = \chi \quad \text{o bien} \quad \left(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u\right)\Big|_{\Gamma_T} = \chi,$$

en Γ_T, donde σ es una función continua en Γ_T, se llama *solución (clásica) del primer o, respectivamente, del tercer problema mixto para la ecuación* (1).

Si es que $\sigma \equiv 0$ en Γ_T, el tercer problema mixto se denomina *segundo problema mixto.*

Ya que el caso de las condiciones límites no homogéneas se reduce fácilmente al de las condiciones límites homogéneas, en lo sucesivo vamos a considerar condiciones límites homogéneas

$$u|_{\Gamma_T} = 0 \tag{4}$$

y

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u\right)\Big|_{\Gamma_T} = 0. \tag{5}$$

Admitamos que el coeficiente $a(x)$ en la ecuación (1) es no negativo en Q_T y la función σ en la condición límite (5) depende sólo de x, $\sigma = \sigma(x)$, y es no negativa en Γ_T.

Sea la función $u(x, t)$ una solución de uno de los problemas (1)—(4) ó (1), (2), (3), (5), con la particularidad de que el segundo miembro $f(x, t)$ de la ecuación (1) pertenece a $L_2(Q_T)$. Elijamos δ, $0 < \delta < T$, arbitrario. Multipliquemos (1) por la función $v(x, t)$ que pertenece a $C^1(\overline{Q}_{T-\delta})$ y satisface la condición

$$v|_{D_{T-\delta}} = 0, \tag{6}$$

e integremos la igualdad por el cilindro $Q_{T-\delta}$. Puesto que $u_{tt}v = (u_tv)_t - u_tv_t$, y $v \operatorname{div}(k\nabla u) = \operatorname{div}(kv\nabla u) - k\nabla u\, \nabla v$, entonces, teniendo en cuenta la condición inicial (3) y la condición (6), empleando la fórmula de Ostrogradski, obtendremos

$$\int_{Q_{T-\delta}} fv\,dx\,dt = \int_{Q_{T-\delta}} ((u_t v)_t - \operatorname{div}(kv\nabla u))\,dx\,dt + \\ + \int_{Q_{T-\delta}} (k\nabla u\nabla v + auv - u_t v_t)\,dx\,dt = \\ = \int_{D_{T-\delta}} u_t v\,dx - \int_{D_0} u_t v\,dx - \int_{\Gamma_{T-\delta}} k\frac{\partial u}{\partial n} v\,dS\,dt + \\ + \int_{Q_{T-\delta}} (k\nabla u\nabla v + auv - u_t v_t)\,dx\,dt = -\int_{D_0} \psi v\,dx - \\ - \int_{\Gamma_{T-\delta}} kv\frac{\partial u}{\partial n}\,dS\,dt + \int_{Q_{T-\delta}} (k\nabla u\nabla v + auv - u_t v_t)\,dx\,dt. \quad (7)$$

Si $u(x, t)$ es la solución del tercero (o segundo) problema mixto, entonces, en virtud de (5), de la última igualdad fluye que $u(x, t)$ satisface la identidad integral

$$\int_{Q_{T-\delta}} (k\nabla u\nabla v + auv - u_t v_t)\,dx\,dt + \int_{\Gamma_{T-\delta}} k\sigma uv\,dS\,dt = \\ = \int_{Q_{T-\delta}} fv\,dx\,dt + \int_{D_0} \psi v\,dx,$$

cualesquiera que sean $v(x, t)$ de $C^1(\bar{Q}_{T-\delta})$, para las cuales se cumple la condición (6), y, por consiguiente, para cualesquiera $v(x, t)$ de $H^1(Q_{T-\delta})$ que satisfagan la condición (6).

Si la función $u(x, t)$ es una solución del primer problema mixto, supondremos, además, que $v(x, t)$ satisface la condición

$$v|_{\Gamma_{T-\delta}} = 0. \quad (8)$$

De (7) resulta que $u(x, t)$ satisface la identidad integral

$$\int_{Q_{T-\delta}} (k\nabla u\nabla v + auv - u_t v_t)\,dx\,dt = \int_{D_0} \psi v\,dx + \int_{Q_{T-\delta}} fv\,dx\,dt$$

cualesquiera que sean $v \in H^1(Q_{T-\delta})$ para las cuales se cumplen las condiciones (6) y (8).

Empleando las identidades obtenidas, introduzcamos los conceptos de soluciones generalizadas para los problemas mixtos en cuestión. Supongamos que $f(x, t) \in L_2(Q_T)$ y $\psi(x) \in L_2(D)$.

Una función u, perteneciente al espacio $H^1(Q_T)$, se denomina *solución generalizada en Q_T del primer problema mixto* (1)—(4), si satisface la condición inicial (2), la condición límite (4), y la identidad

$$\int_{Q_T} (k\nabla u \nabla v + auv - u_t v_t)\, dx\, dt = \int_{D_0} \psi v\, dx + \int_{Q_T} fv\, dx\, dt \qquad (9)$$

cualesquiera que sean $v \in H^1(Q_T)$ para las cuales se cumple la condición (4) y la que sigue

$$v|_{D_T} = 0. \qquad (10)$$

Una función u, perteneciente al espacio $H^1(Q_T)$, se llama *solución generalizada en Q_T del tercero (del segundo, cuando $\sigma = 0$) problema mixto* (1), (2), (3), (5), si ella satisface la condición inicial (2) y la identidad

$$\int_{Q_T} (k\nabla u \nabla v + auv - u_t v_t)\, dx\, dt + \int_{\Gamma_T} k\sigma uv\, dS\, dt =$$

$$= \int_{D_0} \psi v\, dx + \int_{Q_T} fv\, dx\, dt \qquad (11)$$

cualesquiera que sean $v \in H^1(Q_T)$ para las cuales se cumple la condición (10).

Indiquemos que análogamente a las soluciones clásicas, las soluciones generalizadas poseen la siguiente propiedad. Si u es la *solución generalizada del problema* (1)—(4) *ó* (1), (2), (3), (5) *en el cilindro Q_T, ésta también lo será para el problema correspondiente en el cilindro $Q_{T'}$*, cualesquiera que sea $T' < T$.

En efecto, si la función u es solución generalizada en Q_T de uno de los problemas en consideración, entonces para todo $T' < T$ $u \in H^1(Q_{T'})$ (en el caso del primer problema mixto $u|_{\Gamma_{T'}} = 0$) y para ella tendrá lugar la identidad integral correspondiente, cualesquiera que sean v que pertenezcan a $H^1(Q_T)$ y satisfagan la condición $v|_{D_T} = 0$ (y en el caso del primer problema mixto, también la condición $v|_{\Gamma_T} = 0$).

No es difícil comprobar que si la función v pertenece a $H^1(Q_{T'})$, $v|_{D_{T'}} = 0$ y $v = 0$ en $Q_T \setminus Q_{T'}$, entonces $v \in H^1(Q_T)$ y $v|_{D_T} = 0$; y si, adicionalmente, $v|_{\Gamma_{T'}} = 0$, será nula también $v|_{\Gamma_T}$. Por ello, la función u satisface la identidad integral por cuyo intermedio se determina la solución generalizada del correspondiente problema mixto en $Q_{T'}$.

Señalemos, además, que el concepto de solución generalizada del problema mixto se ha introducido como concepto generalizado de la solución clásica (para $f \in L_2(Q_T)$), siendo establecida, en este caso, la siguiente afirmación: *una solución clásica en Q_T de cada uno de los problemas* (1)—(4) *y* (1), (2), (3), (5) *con $f \in L_2(Q_T)$ es solución* *generalizada del problema correspondiente en* $Q_{T-\delta}$, *para cualquier* $\delta \in (0, T)$.

A la par con las soluciones clásicas y generalizadas de los problemas mixtos se puede introducir el concepto de solución en casi todo punto (en c.t.p. o casi siempre). Una función u se llama *solución en c.t.p. del problema mixto* (1) — (4) *o del tercero (del segundo, cuando* $\sigma = 0$) *problema mixto* (1), (2), (3), (5), si ella pertenece a $H^2(Q_T)$, satisface en Q_T (para casi todo $(x, t) \in Q_T$)) la ecuación (1), satisface las condiciones iniciales (2) y (3) y una de las condiciones límites ó (5), respectivamente.

De la definición se deduce inmediatamente que si la solución clásica del problema (1) — (4) o de (1), (2), (3), (5) pertenece al espacio $H^2(Q_T)$, será la solución en c.t.p. del problema correspondiente. Además, si la solución en c.t.p. del problema (1)—(4) (o del problema (1), (2), (3), (5)) pertenece a $C^2(Q_T) \cap C^1(Q_T \cup \Gamma_T \cup \overline{D}_0)$, será solución clásica de este problema (la función $u_{tt} - \operatorname{div}(k \nabla u) + au - f$ es continua y es nula casi siempre en Q_T; por lo tanto, es nula siempre en Q_T).

Como hemos mostrado antes, la solución clásica del primero o tercero (segundo) problema mixto para la ecuación (1) en Q_T para $f \in L_2(Q_T)$, es la solución generalizada del problema correspondiente en $Q_{T-\delta}$ para cualquiera $\delta \in (0, T)$. De modo análogo se demuestra que la solución en c.t.p. del primero o tercero (segundo) problema mixto para la ecuación (1) en Q_T es la solución generalizada del problema correspondiente en Q_T.

Tiene lugar la siguiente afirmación, en cierto sentido inversa.

LEMA 1. *Si la solución generalizada del problema* (1)— (4) *ó del* (1), (2), (3), (5) *pertenece al espacio* $H^2(Q_T)$, *será la solución en c.t.p. del problema correspondiente. Si la solución generalizada del problema* (1)—(4) *o del* (1), (2), (3), (5) *pertenece a* $C^2(Q_T) \cap C^1(Q_T \cup \Gamma_T \cup \overline{D}_0)$, *será la solución clásica del problema correspondiente.*

Demostremos a la vez ambas afirmaciones del lema.

Supongamos que la solución generalizada del problema (1)—(4) o del (1), (2), (3), (5) pertenece a $H^2(Q_T)$ (o bien a $C^2(Q_T) \cap C^1(Q_T \cup \Gamma_T \cup \overline{D}_0)$). Entonces, para demostrar las afirmaciones del lema basta establecer que en Q_T la función u satisface la ecuación (1), en D_0 la condición inicial (3), y en el caso del tercero (segundo) problema mixto, también la condición límite (5) en Γ_T.

Tomemos una función arbitraria $v \in C^1(\overline{Q}_T)$ y, valiéndonos de la fórmula de Ostrogradski, transformemos (9) o, respectivamente, (11) de la manera siguiente

$$\int_{Q_T} (-\operatorname{div} k\nabla u + au + u_{tt} - f)\, v\, dx\, dt = 0.$$

Si $u \in H^2(Q_T)$, entonces $-\operatorname{div}(k\nabla u) + au + u_{tt} - f \in L_2(Q_T)$, y, como el conjunto $\dot{C}^1(Q_T)$ es siempre denso en $L_2(Q_T)$, la función u satisfará la ecuación (1) casi siempre en Q_T.

Si $u \in C^2(Q_T) \cap C^1(Q_T \cup \Gamma_T \cup \overline{D}_0)$, entonces $-\operatorname{div}(k\nabla u) + au + u_{tt} - f \in L_2(Q')$ siendo Q' un subdominio arbitrario, $Q' \Subset Q$; ya que el conjunto de funciones $\dot{C}^1(\overline{Q}_T)$ es siempre denso en $L_2(Q')$, de la arbitrariedad de Q' se desprende que la función u satisface en Q_T la ecuación (1). (Puesto que la función $-\operatorname{div}(k\nabla u) + au + u_{tt}$ es continua en Q_T, la función f será también continua en Q_T, es decir, la función u satisface en todo punto la ecuación (1).)

Tomemos una función arbitraria v que pertenece a $C^1(\overline{Q}_{T-\delta})$ para cierto $\delta \in (0, T)$ y que satisface las condiciones (6) y (8). Si $u \in H^2(Q_T)$, entonces de (9), o respectivamente, de (11), mediante la fórmula de Ostrogradski, obtenemos la igualdad

$$\int_{D_0} (u_t - \psi)\, v\, dx = 0.$$

Esta misma igualdad es válida también si $u \in C^2(Q_T) \cap C^1(Q_T \cup \Gamma_T \cup \overline{D}_0)$, puesto que en este caso $-\operatorname{div} k\nabla u + u_{tt} = f - au \in L_1(Q_T)$ y $u \in C^1(\overline{Q}_{T-\delta})$. Como por cualquier función g de $\dot{C}^1(\overline{D}_0)$ (el conjunto de tales funciones es siempre denso en $L_2(D_0)$) se puede construir una función v que pertenezca a $C^1(\overline{Q}_{T-\delta})$ y satisfaga las condiciones (6), (8) y la condición $v|_{D_0} = g$, entonces la función u satisface la condición inicial (3).

Tomemos ahora, para cualquier $\delta \in (0, T)$, una función arbitraria $v \in C^1(\overline{Q}_{T-\delta})$ que satisface la condición (6). Entonces de (11) obtenemos

$$\int_{\Gamma_{T-\delta}} kv\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u\right) dS\, dt = 0.$$

Pero, para toda función g, continuamente diferenciable y terminal en Γ_T (el conjunto de tales funciones es siempre denso en $L_2(\Gamma_T)$), se puede hallar un $\delta \in (0, T)$ y una función $v \in C^1(\overline{Q}_{T-\delta})$, que satisfaga la condición (6) y la condición $v \mid \Gamma_{T-\delta} = g/k$. Por ello, $\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u\right)\Big|_{\Gamma_T} = 0$. El lema está demostrado.

Demostremos ahora el siguiente teorema de unicidad.

TEOREMA 1. *Cada uno de los problemas* (1)—(4) y (1), (2), (3), (5) *no puede tener más de una solución generalizada.*

Sea u una solución generalizada del problema (1)—(4) o del problema (1), (2), (3), (5) para $f = 0$ en Q_T, $\varphi = 0$, $\psi = 0$ en D_0. Mostremos que $u = 0$ en Q_T.

Tomemos arbitrariamente $\tau \in (0, T)$ y examinemos la función

$$v(x, t) = \begin{cases} \int\limits_t^\tau u(x, \theta)\, d\theta, & 0 < t < \tau, \\ 0, & \tau < t < T. \end{cases}$$

Se comprueba inmediatamente que la función v tiene en Q_T derivadas generalizadas

$$v_t = \begin{cases} -u, & 0 < t < \tau, \\ 0, & \tau < t < T, \end{cases}$$

y

$$v_{x_i} = \begin{cases} \int\limits_t^\tau u_{x_i}(x, \theta)\, d\theta, & 0 < t < \tau \\ 0, & \tau < t < T. \end{cases}$$

Por consiguiente, $v(x, t) \in H^1(Q_T)$. Con ello, $v|_{D_T} = 0$, y para el caso cuando u es una solución generalizada del primer problema mixto, $v|_{\Gamma_T} = 0$.

Sustituimos la función v en la identidad (9), si u es una solución generalizada del problema (1)—(4), o en la identidad (11), si u es una solución generalizada del problema (1), (2), (3), (5). Entonces, para el primer problema mixto, obtenemos la igualdad

$$\int\limits_{Q_\tau} \left(k\nabla u \int\limits_t^\tau \nabla u\, d\theta - avv_t + u_t u \right) dx\, dt = 0,$$

y para el tercero (segundo) problema, la igualdad

$$\int\limits_{Q_\tau} \left(k\nabla u \int\limits_t^\tau \nabla u\, d\theta - avv_t + u_t u \right) dx\, dt +$$

$$+ \int\limits_{\Gamma_\tau} k\sigma u(x, t) \int\limits_t^\tau u(x, \theta)\, d\theta\, dS\, dt = 0$$

(recordemos que en el dominio Q_τ $v_t = -u \in H^1(Q_\tau)$, y por consiguiente, $v_t|_{\Gamma_T} \in L_2(\Gamma_\tau)$).

Puesto que

$$\int_{Q_\tau} k(x)\nabla u(x, t)\int_t^\tau \nabla u(x, \theta)\,d\theta\,dt\,dx =$$

$$= \int_D k(x)\int_0^\tau \nabla u(x, t)\Big[\int_t^\tau \nabla u(x, \theta)\,d\theta\Big]\,dt\,dx =$$

$$= \int_D k(x)\int_0^\tau \nabla u(x, \theta)\,d\theta\int_0^\theta \nabla u(x, t)\,dt\,dx =$$

$$= \int_D k(x)\int_0^\tau \nabla u(x, \theta)\,d\theta\int_0^\tau \nabla u(x, t)\,dt\,dx -$$

$$- \int_D k(x)\int_0^\tau \nabla u(x, \theta)\,d\theta\int_\theta^\tau \nabla u(x, t)\,dt\,dx =$$

$$= \int_D k(x)\left|\int_0^\tau \nabla u(x, t)\,dt\right|^2 dx - \int_{Q_\tau} k(x)\nabla u(x, t)\int_t^\tau \nabla u(x, \theta)\,d\theta\,dt\,dx,$$

entonces

$$\int_{Q_\tau} k(x)\nabla u(x, t)\int_t^\tau \nabla u(x, \theta)\,d\theta\,dt\,dx = \frac{1}{2}\int_D k(x)\left|\int_0^\tau \nabla u(x, t)\,dt\right|^2 dx.$$

Ya que de modo análogo

$$\int_{\Gamma_T} k\sigma u(x, t)\int_t^\tau u(x, \theta)\,d\theta\,dS\,dt =$$

$$= \int_{\partial D} k\sigma\left(\int_0^\tau u(x, t)\,dt\right)^2 dS - \int_{\Gamma_\tau} k\sigma u(x, t)\int_t^\tau u(x, \theta)\,d\theta\,dS\,dt,$$

entonces

$$\int_{\Gamma_\tau} k\sigma u(x, t)\int_t^\tau u(x, \theta)\,d\theta\,dS\,dt = \frac{1}{2}\int_{\partial D} k\sigma\left(\int_0^\tau u(x, t)\,dt\right)^2 dS.$$

Además,

$$\int_{Q_T} avv_t\,dx\,dt = -\int_{D_0} av^2\,dx - \int_{Q_\tau} a v_t v\,dx\,dt.$$

Por eso,

$$\int\limits_{Q_\tau} avv_t\,dx\,dt = -\frac{1}{2}\int\limits_{D_0} av^2\,dx.$$

Análogamente, tenemos

$$\int\limits_{Q_\tau} uu_t\,dx\,dt = \frac{1}{2}\int\limits_{D_\tau} u^2\,dx.$$

Por consiguiente, si u es una solución del primer problema mixto, obtenemos

$$\int\limits_{D} k(x)\left|\int\limits_0^\tau \nabla u(x, t)\,dt\right|^2 dx + \int\limits_{D_0} av^2\,dx + \int\limits_{D_\tau} u^2\,dx = 0,$$

y si u es una solución del tercero (segundo) problema mixto, entonces

$$\int\limits_{D} k(x)\left|\int\limits_0^\tau \nabla u(x, t)\,dt\right|^2 dx + \int\limits_{D_0} av^2\,dx + \int\limits_{D_\tau} u^2\,dx +$$
$$+\int\limits_{\partial D} k\sigma\left(\int\limits_0^\tau u(x, t)\,dt\right)^2 dS = 0.$$

Como $k(x) > 0$, $a(x) \geqslant 0$ en Q_T y $\sigma(x) \geqslant 0$ en Γ_T, entonces de estas dos igualdades se deduce que $\int\limits_{D_\tau} u^2\,dx = 0$. Puesto que τ es un número arbitrario del intervalo $(0, T)$, $u = 0$ en Q_T. El teorema queda demostrado.

Según fue demostrado, las soluciones clásicas de los problemas (1)—(4) y (1), (2), (3), (5) son también soluciones generalizadas de estos problemas en $Q_{T-\delta}$ para cualquier $\delta \in (0, T)$. Por eso, del teorema 1 se deduce inmediatamente la siguiente afirmación.

COROLARIO 1. *Cada uno de los problemas* (1)—(4) y (1), (2), (3), (5) *no puede tener más de una solución clásica.*

Puesto que las soluciones en c.t.p. de los problemas (1)—(4) y (1)—(3), (5) son también soluciones generalizadas de estos problemas, entonces del teorema 1 se desprende

COROLARIO 2. *Cada uno de los problemas* (1)—(4) *y* (1), (2), (3), (5) *no puede tener más de una solución en c.t.p.*

2. Existencia de solución generalizada. Demostremos ahora la existencia de las soluciones de los problemas (1)—(4) y (1), (2), (3), (5). Emplearemos para esto el *método de Fourier*, según el cual la solución del problema mixto se busca en forma de una serie respecto a las funciones propias del problema elíptico de contorno correspondiente.

Sea $v(x)$ una función propia generalizada del primer problema de contorno

$$\begin{gathered}\operatorname{div}(k\nabla v)-av=\lambda v, \qquad x\in D,\\ v|_{\partial D}=0,\end{gathered} \tag{12}$$

o del tercero (segundo, cuando $\sigma=0$) problema de contorno

$$\begin{gathered}\operatorname{div}(k\nabla v)-av=\lambda v, \qquad x\in D,\\ \left(\frac{\partial v}{\partial n}+\sigma v\right)\Big|_{\partial D}=0\end{gathered} \tag{13}$$

(λ es el valor propio correspondiente). Quiere decir, que en el caso del primer problema de contorno $v\in \mathring{H}^1(D)$ y para todo $\eta\in \mathring{H}^1(D)$

$$\int_D (k\nabla v\nabla\eta+av\eta)\,dx+\lambda\int_D v\eta\,dx=0, \tag{14}$$

y en el caso del tercero (segundo) problema de contorno $v\in H^1(D)$ y para todo $\eta\in H^1(D)$

$$\int_D (k\nabla v\nabla\eta+av\eta)\,dx+\int_{\partial D} k\sigma v\eta\,dS+\lambda\int_D v\eta\,dx=0. \tag{15}$$

Examinemos el sistema $v_1, v_2, \ldots$, que es ortonormado en $L_2(D)$ compuesto de todas las funciones propias generalizadas del problema (12) o, respectivamente, del problema (13); $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ es una sucesión de los valores propios correspondientes (consideramos, como siempre, que la sucesión de valores propios es no creciente, con la particularidad de que cada valor propio se repite en esta sucesión tantas veces cual es su multiplicidad). Según lo demostrado en el § 1, cap. IV, el sistema $v_1, v_2, \ldots$ es una base ortonormal en $L_2(D)$ y $\lambda_k\to-\infty$ cuando $k\to\infty$. En el caso de los primero, tercero (cuando $\sigma\not\equiv 0$ en ∂D) y segundo (cuando $a\not\equiv 0$ en D) problemas de contorno (recordemos que $k(x)\geqslant k_0>0$, $a(x)\geqslant 0$ en D y $\sigma(x)\geqslant 0$ en ∂D) el primer valor propio $\lambda_1<0$, es decir, $0>\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\ldots$ Si $a(x)\equiv 0$ en D, para el segundo problema del contorno $0=\lambda_1>\lambda_2\geqslant\ldots$

Supongamos que las funciones iniciales $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ en (2) y (3) pertenecen a $L_2(D)$, y la función $f(x, t)\in L_2(Q_T)$. De acuerdo con el teorema de Fubini, $f(x, t)\in L_2(D)$ para casi todo $t\in(0, T)$. Las funciones $\varphi(x)$ y $\psi(x)$, así como también la función $f(x, t)$ para casi todos los valores de $t\in(0, T)$, las desarrollaremos en las series de Fourier según el sistema $v_1(x), v_2(x), \ldots$ de funciones propias generalizadas del problema (12) (al examinar el problema

(1)—(4)) o del problema (13) (al examinar el problema (1), (2), (3), (5)),

$$\varphi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k v_k(x),\qquad \psi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\psi_k v_k(x),\qquad f(x,t)=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\,v_k(x),\qquad (16)$$

donde $\varphi_k=(\varphi, v_k)_{L_2(D)}$, $\psi_k=(\psi, v_k)_{L_2(D)}$ y $f_k(t)=\int\limits_D f(x,t)\,v_k(x)\,dx$, $k=1, 2, \ldots$ Puesto que $|f_k(t)|^2\leqslant\int\limits_D f^2(x,t)\,dx\cdot\int\limits_D v_k^2\,dx=$ $=\int\limits_D f^2(x,t)\,dx$, entonces $f_k(t)\in L_2(0, T)$, $k=1, 2, \ldots$ De acuerdo con la igualdad de Parseval — Steklov

$$\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k^2=\|\varphi\|_{L_2(D)}^2,\qquad \sum_{k=1}^{\infty}\psi_k^2=\|\psi\|_{L_2(D)}^2 \qquad (17)$$

y para casi todo $t\in(0, T)$

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2(t)=\int\limits_D f^2(x,t)\,dx.$$

Por consiguiente,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_0^T f_k^2(t)\,dt=\int\limits_{Q_T} f^2\,dx\,dt. \qquad (17')$$

A título de funciones iniciales en (2) y (3) tomemos primero las funciones $\varphi_k v_k(x)$ y $\psi_k v_k(x)$, es decir, k-ésimas «armónicas» de las series (16), y a título de la función en el segundo miembro de la ecuación (1), la función $f_k(t)v_k(x)$, $k\geqslant 1$. Examinemos la función

$$u_k(x,t)=U_k(t)\,v_k(x), \qquad (18)$$

donde

$$U_k(t)=\varphi_k\cos\sqrt{-\lambda_k}\,t+\frac{\psi_k}{\sqrt{-\lambda_k}}\operatorname{sen}\sqrt{-\lambda_k}\,t+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{-\lambda_k}}\int\limits_0^t f_k(\tau)\operatorname{sen}\sqrt{-\lambda_k}\,(t-\tau)\,d\tau; \qquad (19)$$

y en el caso $\lambda_1 = 0$

$$U_1(t) = \varphi_1 + \psi_1 t + \int_0^t f_1(\tau)(t-\tau)\,d\tau =$$

$$= \lim_{\lambda_1 \to 0} \Big(\varphi_1 \cos\sqrt{-\lambda_1}\,t + \frac{\psi_1}{\sqrt{-\lambda_1}} \operatorname{sen}\sqrt{-\lambda_1}\,t +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{-\lambda_1}} \int_0^t f_1(\tau) \operatorname{sen}\sqrt{-\lambda_1}\,(t-\tau)\,d\tau \Big).$$

La función $U_k(t)$ pertenece, evidentemente, a $H^2(0, T)$, satisface, cuando $t = 0$, las condiciones iniciales $U_k(0) = \varphi_k$, $U_k'(0) = \psi_k$, y para casi todo $t \in (0, T)$ es una solución de la ecuación

$$U_k'' - \lambda_k U_k = f_k, \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{20}$$

Mostremos que si $v_k(x)$ y λ_k son la función propia generalizada y el valor propio correspondiente del problema (12) (o del problema (13)), entonces la función $u_k(x, t)$ es la solución generalizada del primero (tercero o segundo, correspondientemente) problema mixto para la ecuación

$$u_{tt} - \operatorname{div}(k(x)\nabla u) + au = f_k(t)\, v_k(x)$$

con las condiciones iniciales

$$u|_{t=0} = \varphi_k v_k(x), \qquad u_t|_{t=0} = \psi_k v_k(x).$$

Efectivamente, la función $u_k(x, t) \in H^1(Q_T)$ en D_0; ella satisface la condición inicial (2) y, en el primer problema de contorno, también la condición límite (4). Mostremos que la función $u_k(x, t)$ en el primer problema mixto satisface la identidad integral

$$\int_{Q_T} (k\nabla u_k \nabla v + a u_k v - u_{kt} v_t)\,dx\,dt =$$

$$= \psi_k \int_{D_0} v_k(x)\, v\,dx + \int_{Q_T} f_k(t)\, v_k(x)\, v\,dx\,dt \tag{9_k}$$

para todas las funciones v que pertenecen al espacio $H^1(Q_T)$ y que satisfacen las condiciones (4) y (10), mientras que para el segundo y el tercero problemas mixtos dicha función satisface la identidad integral

$$\int_{Q_T} (k\nabla u_k \nabla v + a u_k v - u_{kt} v_t)\,dx\,dt + \int_{\Gamma_T} k\sigma u_k v\,dS\,dt =$$

$$= \psi_k \int_{D_T} v_k(x)\, v\,dx + \int_{Q_T} f_k(t)\, v_k(x)\, v\,dx\,dt \tag{11_k}$$

para todas las v de $H^1(Q_T)$ que satisfagan la condición (10). Es suficiente, obviamente, establecer la validez de las identidades (9_k) y (11_k) sólo para todas las funciones v que son continuamente diferenciables en $\overline{Q}_T$ y que satisfacen las condiciones (4) y (10), y la (10), respectivamente.

En virtud de (10), (18) y (19) tenemos

$$\int\limits_{Q_T} u_{kt} v_t \, dx\, dt = \int\limits_D v_k(x) \left[\int\limits_0^T U_k'(t)\, v_t\, dt \right] dx =$$

$$= \int\limits_D v_k(x) \left[-\psi_k v(x, 0) - \int\limits_0^T U_k''(t)\, v\, dt \right] dx =$$

$$= -\psi_k \int\limits_D v_k(x)\, v(x, 0)\, dx - \lambda_k \int\limits_{Q_T} u_k v\, dx\, dt - \int\limits_{Q_T} f_k(t)\, v_k(x)\, v\, dx\, dt.$$

Por ello, en el caso del primer problema mixto la identidad (9_k) se infiere de (14):

$$\int\limits_{Q_T} (k \nabla u_k \nabla v + a u_k v - u_{kt} v_t)\, dx\, dt =$$

$$= \int\limits_0^T U_k(t)\, dt \int\limits_D (k(x) \nabla v_k \nabla v + a v_k v +$$

$$+ \lambda_k v_k v)\, dx + \psi_k \int\limits_D v_k(x)\, v(x, 0)\, dx + \int\limits_{Q_T} f_k(t)\, v_k(x)\, v\, dx\, dt =$$

$$= \psi_k \int\limits_D v_k(x)\, v(x, 0)\, dx + \int\limits_{Q_T} f_k(t)\, v_k(x)\, v\, dx\, dt.$$

Por analogía, en el caso del tercer (segundo) problema mixto la identidad (11_k) se infiere de (15):

$$\int\limits_{Q_T} (k(x) \nabla u_k \nabla v + a u_k v - u_{kt} v_t)\, dx\, dt + \int\limits_{\Gamma_T} k(x)\, \sigma u_k v\, dS\, dt =$$

$$= \int\limits_0^T U_k(t)\, dt \left[\int\limits_D (k(x) \nabla v_k \nabla v + a v_k v + \lambda_k v_k v)\, dx + \int\limits_{\partial D} k(x)\, \sigma v_k v\, dS \right] +$$

$$+ \psi_k \int\limits_D v_k(x)\, v(x, 0)\, dx + \int\limits_{Q_T} f_k(t)\, v_k(x)\, v\, dx\, dt =$$

$$= \psi_k \int\limits_D v_k(x)\, v(x, 0)\, dx + \int\limits_{Q_T} f_k(t)\, v_k(x)\, v\, dx\, dt.$$

Si tomamos a título de funciones iniciales en (2) y (3) las sumas parciales de las series de (16), a saber, $\sum_{h=1}^{N} \varphi_h v_h(x)$ y $\sum_{h=1}^{N} \psi_h v_h(x)$ para cierto N, y a título de la función f en (1), la suma parcial de su serie de Fourier, a saber, $\sum_{h=1}^{N} f_h(t), v_k(x)$, entonces la solución generalizada del problema (1)—(4) ((1), (2), (3), (5)) será representada por la función

$$S_N(x, t) = \sum_{h=1}^{N} u_h(x, t) = \sum_{h=1}^{N} U_h(t) v_h(x).$$

En particular, en el primer problema mixto esta función satisface la identidad

$$\int_{Q_T} (k\nabla S_N \nabla v + aS_N v - S_{Nt} v_t)\, dx\, dt =$$

$$= \int_D \sum_{h=1}^{N} \psi_h v_h(x) v(x, 0)\, dx + \int_{Q_T} \sum_{h=1}^{N} f_h(t) v_h(x) v(x, t)\, dx\, dt \quad (21)$$

para cualquier $v \in H^1(Q_T)$ que satisface las condiciones (4) y (10), y en el caso del tercero (segundo) problema, la identidad

$$\int_{Q_T} (k\nabla S_N \nabla v + aS_N v - S_{Nt} v_t)\, dx\, dt + \int_{\Gamma_T} k\sigma S_N v\, dS\, dt =$$

$$= \int_D \sum_{h=1}^{N} \psi_h v_h(x) v(x, 0)\, dx + \int_{Q_T} \sum_{h=1}^{N} f_h(t) v_h(x) v\, dx\, dt \quad (22)$$

para cualquier $v \in H^1(Q_T)$ que satisface la condición (10).

Por esta razón es natural esperar que con ciertas suposiciones respecto a φ, ψ y f, la solución del problema (1)—(4) ((1), (2), (3), (5)) pueda ser representada en forma de la serie

$$u(x, t) = \sum_{h=1}^{\infty} U_h(t) v_h(x), \quad (23)$$

donde $v_1, v_2, \ldots$ son funciones propias generalizadas del problema (12) ((13), respectivamente)

TEOREMA 2. *Sean $f \in L_2(Q_T)$, $\psi \in L_2(D)$ y $\varphi \in \mathring{H}^1(D)$ en el caso del primer problema mixto (1)—(4), y $\varphi \in H^1(D)$, en el caso del tercero (segundo) problema mixto (1), (2), (3), (5). Entonces, la solución generalizada u del problema correspondiente existe y se representa por la serie (23) convergente en $H^1(Q_T)$. Entonces, tiene lugar la* *desigualdad*

$$\|u\|_{H^1(Q_T)} \leqslant C\,(\|\varphi\|_{H^1(D)} + \|\psi\|_{L_2(D)} + \|f\|_{L_2(Q_T)}), \tag{24}$$

en la cual la constante positiva C no depende de φ, ψ y f.

De la fórmula (19) se desprende que para todo $t \in [0, T]$

$$|U_k(t)| \leqslant |\varphi_k| + |\psi_k|\,|\lambda_k|^{-1/2} + |\lambda_k|^{-1/2} \int_0^T |f_k(t)|\,dt \quad \text{para } k > 1$$

y

$$|U_1(t)| \leqslant |\varphi_1| + C_1|\psi_1| + C_1 \int_0^T |f_1(t)|\,dt$$

(en el caso del segundo problema mixto $C_1 = T$ cuando $a \equiv 0$, en todos los demás casos $C_1 = 1/\sqrt{|\lambda_1|}$). Por ello, para todo $t \in [0, T]$

$$U_k^2(t) \leqslant 3\varphi_k^2 + 3\psi_k^2|\lambda_k|^{-1} + 3|\lambda_k|^{-1}\left(\int_0^T |fk|\,dt\right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant C(T)\left(\varphi_k^2 + \psi_k^2|\lambda_k|^{-1} + |\lambda_k|^{-1}\int_0^T f_k^2\,dt\right) \quad \text{para } k > 1, \tag{25}$$

$$U_1^2(t) \leqslant C(T)\left(\varphi_1^2 + \psi_1^2 + \int_0^T f_1^2\,dt\right). \tag{25'}$$

Ya que, para cualquier k, $k = 1, 2, \ldots, \left|\frac{dU_k}{dt}\right| \leqslant |\varphi_k|\,|\lambda_k|^{1/2} + |\psi_k| + \int_0^T |f_k|\,dt$, entonces para todo $t \in [0, T]$

$$\left|\frac{dU_k}{dt}\right|^2 \leqslant C(T)\left(\varphi_k^2|\lambda_k| + |\psi_k|^2 + \int_0^T f_k^2\,dt\right). \tag{26}$$

Puesto que la función φ pertenece en el primer problema mixto al espacio $\mathring{H}^1(D)$ (en el tercer problema mixto, al espacio $H^1(D)$), del teorema 3, p. 3, § 1, cap. IV, se deduce que la serie de Fourier (16) de esta función compuesta según el sistema de las funciones propias del problema (12) (o del (13), respectivamente) converge hacia ella en la norma del espacio $H^1(D)$. Con ello, existe una constante $C > 0$ tal que para todas las φ de $\mathring{H}^1(D)$ (o bien, respectivamente, de $H^1(D)$)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^2|\lambda_k| \leqslant C_1\|\varphi\|^2_{H^1(D)}. \tag{27}$$

Examinemos la suma parcial $S_N(x, t) = \sum_{k=1}^{N} U_k(t) v_k(x)$ de la serie (23). Para todo $t \in [0, T]$ esta suma y su derivada respecto a t (en virtud del teorema 3, p. 2, § 6, cap. III, las funciones $U_k(t)$ y $U'_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots$, son continuas en $[0, T]$) pertenecen a $\mathring{H}^1(D_t)$ (o a $H^1(D_t)$).

Al estudiar los problemas (1)—(4) en el espacio $\mathring{H}^1(D_t)$, resulta cómodo introducir el producto escalar

$$\int_{D_t} (k\nabla u\nabla v + auv)\, dx.$$

Al estudiar los problemas (1), (2), (3), (5), introduzcamos en el espacio $H^1(D_t)$ el producto escalar

$$\int_{D_t} (k\nabla u\nabla v + auv)\, dx + \int_{\partial D_t} k\sigma uv\, dS,$$

si (o) $a \not\equiv 0$ en D, o bien $\sigma \not\equiv 0$ en ∂D, y un producto escalar

$$\int_{D_t} (k\nabla u\nabla v + uv)\, dx,$$

si es que $a \equiv 0$ en D y $\sigma \equiv 0$ en ∂D.
Puesto que en el caso del primero y tercero problemas mixtos (para $\sigma \not\equiv 0$) y en el del segundo problema mixto (para $a \not\equiv 0$), los sistemas de funciones $v_1/\sqrt{-\lambda_1}$, $v_2/\sqrt{-\lambda_2}$, ... están ortonormados en los productos escalares correspondientes, y en el caso del segundo problema mixto resulta ortonormado, para $a \equiv 0$, el sistema de funciones $v_1/\sqrt{1-\lambda_1}$, $v_2/\sqrt{1-\lambda_2}$, ..., entonces para todo $t \in [0, T]$ y para cualesquiera M y N, $1 \leqslant M < N$, en virtud de (25), tenemos

$$\| S_N(x, t) - S_M(x, t) \|^2_{H^1(D_t)} = \Big\| \sum_{k=M+1}^{N} U_k(t) v_k(x) \Big\|^2_{H^1(D_t)} =$$
$$= \sum_{k=M+1}^{N} U_k^2(t) |\lambda_k| \leqslant C(T) \sum_{k=M+1}^{N} \Big(\varphi_k^2 |\lambda_k| + \psi_k^2 + \int_0^T f_k^2\, dt \Big),$$

si (o) $a \not\equiv 0$ en D, o $\sigma \not\equiv 0$ en ∂D y

$$\| S_N(x, t) - S_M(x, t) \|^2_{H^1(D_t)} = \sum_{k=M+1}^{N} U_k^2(t)(1 - \lambda_k) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1 + |\lambda_2|}{|\lambda_2|} C(T) \sum_{k=M+1}^{N} \Big(\varphi_k^2 (1 + |\lambda_k|) + \psi_k^2 + \int_0^T f_k^2\, dt \Big).$$

si $a \equiv 0$ en D y $\sigma \equiv 0$ en ∂D. De este modo en cualquier caso se tiene

$$\| S_N(x, t) - S_M(x, t) \|^2_{H^1(D_t)} \leqslant$$
$$\leqslant C_2 \sum_{h=M+1}^{N} \left(\varphi_h^2 (1 + |\lambda_h|) + \psi_h^2 + \int_0^T f_h^2 \, dt \right) \quad (28)$$

para todo $t \in [0, T]$. Análogamente, en vista de (26), para todo $t \in [0, T]$

$$\left\| \frac{\partial S_N}{\partial t} - \frac{\partial S_M}{\partial t} \right\|^2_{L_2(D_t)} = \left\| \sum_{h=M+1}^{N} U_h'(t) v_h(x) \right\|^2_{L_2(D_t)} =$$
$$= \sum_{h=M+1}^{N} U_h'^2(t) \leqslant C_3 \sum_{h=M+1}^{N} \left(\varphi_h^2 |\lambda_h| + \psi_h^2 + \int_0^T f_h^2 \, dt \right). \quad (28')$$

Junto con estas desigualdades tienen también lugar las siguientes

$$\| S_N(x, t) \|^2_{H^1(D_t)} = \left\| \sum_{h=1}^{N} U_h(t) v_h(x) \right\|^2_{H^1(D_t)} \leqslant$$
$$\leqslant C_4 \sum_{h=1}^{N} \left(\varphi_h^2 (1 + |\lambda_h|) + \psi_h^2 + \int_0^T f_h^2 \, dt \right). \quad (29)$$

$$\left\| \frac{\partial S_N}{\partial t} \right\|^2_{L_2(D_t)} = \left\| \sum_{h=1}^{N} U_h'(t) v_h(x) \right\|^2_{L_2(D_t)} = \sum_{h=1}^{N} U_h'^2(t) \leqslant$$
$$\leqslant C_5 \sum_{h=1}^{N} \left(\varphi_h^2 (|\lambda_h| + 1) + \psi_h^2 + \int_0^T f_h^2 \, dt \right). \quad (29')$$

que son válidas para todo $t \in [0, T]$ y para cualesquiera $N \geqslant 1$.

Sumando las desigualdades (28) y (28′) integramos respecto a $t \in (0, T)$, obtenemos la desigualdad

$$\| S_N(x, t) - S_M(x, t) \|^2_{H^1(Q_T)} \leqslant$$
$$\leqslant C_6 \sum_{h=M+1}^{N} \left(\varphi_h^2 (1 + |\lambda_h|) + \psi_h^2 + \int_0^T f_h^2 \, dt \right). \quad (30)$$

De acuerdo con (17), (17′) y (27), las series $\sum_{h=1}^{\infty} \varphi_h^2 (1 + |\lambda_h|)$, $\sum_{h=1}^{\infty} \psi_h^2$ y $\sum_{h=1}^{\infty} \int_0^T f_h^2 \, dt$ son convergentes. Por eso, de (30) se infiere que la serie (23) converge en $H^1(Q_T)$ y, por tanto, su suma $u \in H^1(Q_T)$. La función $u(x, t)$ satisface, obviamente, la condición inicial (2), y, en el caso del primer problema mixto, la condición límite (4). Pasando al límite para $N \to \infty$ en la igualdad (21) (en el caso del problema (1)—(4)) o en la igualdad (22) (en el caso del problema (1), (2), (3), (5)), resulta que u satisface la identidad (9) y, respectivamente la (11). Así pues, u es una solución generalizada del primer y, respectivamente, del tercer problema mixto. Sumando las desigualdades (29) y (29′), integradas respecto a $t \in (0, T)$, mediante (17), (17′) y (27) obtenemos las desigualdades (24). El teorema está demostrado.

3. Método de Galerkin. La existencia de soluciones generalizadas de los problemas mixtos se demuestra también por otros métodos que no dependen del punto 2 y que no emplean las propiedades de las funciones propias. Este punto está dedicado precisamente a uno de los métodos citados para demostrar los teoremas de existencia, a saber, al método de Galerkin que, a la vez, es uno de los métodos para resolver de modo aproximado los problemas mixtos. Indiquemos que a diferencia del método de Fourier, el de Galerkin permite estudiar los problemas mixtos en el caso cuando los coeficientes dependen no sólo de las variables espaciales x, sino también del tiempo t. Examinemos, para concretar, el primer problema mixto (1)—(4). Suponemos, como antes, que $\varphi \in \mathring{H}^1(D)$, $\psi \in L_2(D)$, $f \in L_2(Q_T)$.

El método de Galerkin consiste en lo siguiente.

Sea $v_1(x)$, $v_2(x)$, ... un sistema arbitrario de funciones de $C^2(\overline{D})$ que satisfacen la condicion límite $v_k \mid_{\partial D} = 0$, $k = 1, 2, \ldots$ Se supone que este sistema es linealmente independiente y completo en $\mathring{H}^1(D)$, es decir, una variedad lineal tendida sobre el sistema es siempre densa en $\mathring{H}^1(D)$. Para un m entero y arbitrario en el subespacio de dimensión finita V_m del espacio $L_2(D)$, tendido sobre las funciones v_k, $k = 1, 2, \ldots, m$, se resuelve un problema que se obtiene del problema (1)—(4) mediante la proyección ortogonal en el subespacio citado, es decir, se busca una función $w_m(x, t)$ (de $H^2(Q_T)$) la cual pertenece, para todo $t \in [0, T]$, al subespacio V_m, satisface las condiciones (2) y (3) con funciones iniciales $\varphi^m(x) = \sum_{k=1}^{m} \varphi_k v_k(x)$, $\psi^m(x) = \sum_{k=1}^{m} \psi_k v_k(x)$ (que son proyecciones ortogonales en V_m de las funciones $\varphi(x)$, y $\psi(x)$, respectivamente) y que es tal que para casi todo $t \in (0, T)$ las proyecciones ortogonales en V_m (en el producto escalar de $L_2(D)$) de las funciones $f(x, t)$ y $w_{m_{tt}} - \operatorname{div}(k \nabla w_m) + a w_m$ coinciden. Esto significa que se buscan unas funciones

$c_1(t), \ldots, c_m(t)$ (de $H^2(0, T)$) (que satisfacen las condiciones $c_k(0) = \varphi_k$, $c_k'(0) = \psi_k$, $k = 1, \ldots, m$) tales que la función $w_{m_{tt}} - \operatorname{div}(k \nabla w_m) + aw_m - f$, donde

$$w_m(x, t) = \sum_{k=1}^{m} c_k(t)\, v_k(x), \tag{31}$$

para casi todo $t \in (0, T)$ (para los cuales $f \in L_2(D_t)$), es ortogonal en $L_2(D)$ al subespacio V_m, es decir,

$$\int_D (w_{mtt} - \operatorname{div}_x(k\nabla w_m) + aw_m)\, v_k\, dx = \int_D f v_k\, dx \tag{32}$$

para $k = 1, \ldots, m$.

El método de Galerkin consiste en que la solución u del problema (1)—(4) es aproximada por las soluciones w_m de los problemas «proyectados». Para fundamentarlo es indispensable demostrar que la solución w_m de cada uno de estos problemas existe (y es única) y que la sucesión w_m, $m = 1, 2, \ldots$, en cierto sentido (débilmente en $H^1(Q_T)$) converge hacia u.

Con el fin de no complicar los razonamientos, examinemos un caso de condiciones iniciales homogéneas ($\varphi = 0$, $\psi = 0$). Entonces $\varphi_k = \psi_k = 0$, $k = 1, \ldots$, es decir

$$c_k(0) = c_k'(0) = 0, \quad k = 1, \ldots, m. \tag{33}$$

Las igualdades (32) es un sistema, lineal respecto a las funciones $c_1(t), \ldots, c_m(t)$, de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden con coeficientes constantes

$$\sum_{s=1}^{m} \left(c_s''(t)\,(v_k, v_s)_{L_2(D)} + c_s(t)\,(v_k, v_s)_{\mathring{H}^1(D)}\right) = f_k(t), \quad k = 1, \ldots, m, \tag{34}$$

donde

$$f_k(t) = \int_D f(x, t)\, v_k(x)\, dx \in L_2(0, T) \left((h, g)_{\mathring{H}^1(D)} = \right.$$
$$\left. = \int_D (k\nabla h \nabla g + ahg)\, dx\right).$$

Demostremos que el sistema (34) tiene una única solución que pertenece a $H^2(0, T)$ (todas las coordenadas pertenecen a $H^2(0, T)$) y satisface las condiciones iniciales (33).

Puesto que el sistema de funciones $v_1, v_2, \ldots$ es linealmente independiente, para todo $m \geqslant 1$ el determinante de la matriz con los elementos $(v_k, v_s)_{L_2(D)}$, $k, s = 1, \ldots, m$, es distinto de cero (una afirmación análoga fue demostrada en el p. 9, § 1, cap. IV). Por ello, el sistema lineal de ecuaciones diferenciales ordinarias (34) puede ser resuelto respecto a las derivadas superiores. Por consiguiente, el problema (34), (33) es equivalente al problema

$$c'(t) = Ac(t) + F(t), \quad c(0) = 0, \tag{35}$$

donde $c(t) = (c_1'(t), \ldots, c_m'(t), c_1(t), \ldots, c_m(t))$, $F(t) = (F_1(t), \ldots, F_{2m}(t))$, $(F_1(t), \ldots, F_m(t)) = \|(\varphi_h, \varphi_s)_{L_2(D)}\|^{-1} (f_1(t), \ldots, f_m(t))$, $F_{m+1}(t) \equiv \ldots \equiv F_{2m}(t) \equiv 0$, y

$$A = -\begin{Vmatrix} 0, & \|(\varphi_h, \varphi_s)_{L_2(D)}\|^{-1} \cdot \|(\varphi_h, \varphi_s)_{\dot{H}^1(D)}\| \\ I, & 0 \end{Vmatrix}$$

es una matriz de orden $2m$ (I — es una matriz unitaria de m-ésimo orden). Es evidente que el vector $F(t) \in L_2(0, T)$ $(F_i(t) \in L_2(0, T)$, $i = 1, \ldots, 2m)$.

Para demostrar la afirmación es suficiente mostrar que el problema (35) tiene una única solución que pertenece al espacio $H^1(0, T)$. Sustituyamos, como siempre, el problema (35) por un sistema equivalente de ecuaciones integrales

$$c(t) = \int_0^t Ac(\tau)\, d\tau + \int_0^t F(\tau)\, d\tau \tag{36}$$

con un término independiente $\int_0^t (F\tau)\, d\tau$, que pertenece a $H^1(0, T)$ y, consecuentemente, continuo en $[0, T]$: si $c(t)$ es una solución del problema (35), perteneciente a $H^1(0, T)$, entonces, debido al teorema 3, p. 2, § 6, cap. III, es continua en $[0, T]$ y satisface el sistema (36); si $c(t)$ es una solución del sistema (36), continua en $[0, T]$, ella pertenece, evidentemente, a $H^1(0, T)$ y es solución del problema (35). Mientras tanto, la existencia (y unicidad) de la solución (continua en $[0, T]$) del sistema de ecuaciones integrales (36) se establece en el Curso de ecuaciones diferenciales ordinarias, al demostrar el teorema de existencia de la solución del problema de Cauchy en un sistema lineal normal de ecuaciones diferenciales ordinarias (véase, por ejemplo, L. S. Pontriaguin, «Ecuaciones diferenciales ordinarias»).

De este modo queda establecida la existencia y la unicidad, para cualquier $m = 1, 2, \ldots,$ de las funciones $w_m(x, t)$ del tipo (31), que satisfacen las igualdades (32) y condiciones iniciales

$$w_m|_{t=0} = \frac{\partial w_m}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0.$$

Multipliquemos (32) por $c_k'(t)$, integremos por $(0, \tau)$, donde τ es un número arbitrario de $[0, T]$, y sumemos según k desde 1 hasta m. De resultas obtenemos la igualdad

$$\int_{Q_\tau} (w_{mtt} - \operatorname{div}(k\nabla w_m) + aw_m)\, w_{mt}\, dx\, dt = \int_{Q_\tau} f w_{mt}\, dx\, dt. \tag{37}$$

Como $w_{mtt}w_{mt}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}w_{mt}^2\right)$, $\operatorname{div}(k\nabla w_m)\,w_{mt}=\operatorname{div}(kw_{mt}\nabla w_m)-$ $-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}|\nabla w_m|^2\right)$ y $aw_m w_{mt}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}aw_m^2\right)$,
resulta que

$$\int\limits_{Q_\tau}(w_{mtt}-\operatorname{div}(k\nabla w_m)+aw_m)\,w_{mt}\,dx\,dt=$$
$$=\frac{1}{2}\int\limits_{D_\tau}(w_{mt}^2+k|\nabla w_m|^2+aw_m^2)\,dx.$$

Advirtiendo que en el subespacio $\tilde{H}^1(Q_T)$ del espacio $H^1(Q_T)$, compuesto por las funciones que se anulan en $\Gamma_T\cup D_0$, se puede introducir una norma, equivalente a la ordinaria,

$$\|w\|_{\tilde{H}^1(Q_T)}=\left(\int\limits_{Q_T}(w_t^2+k|\nabla w|^2+aw^2)\,dx\,dt\right)^{1/2},$$

obtendremos

$$2\int\limits_0^T d\tau\int\limits_{Q_\tau}(w_{mtt}-\operatorname{div}(k\nabla w_m)+aw_m)\,w_{mt}\,dx=\|w_m\|^2_{\tilde{H}^1(Q_T)}.$$

Por eso, de la igualdad (37) se tiene

$$\|w_m\|^2_{\tilde{H}^1(Q_T)}=2\int\limits_0^T d\tau\int\limits_0^\tau dt\int\limits_D f(x,t)\,w_{mt}(x,t)\,dx=$$
$$=2\int\limits_{Q_T}(T-t)\,f(x,t)\,w_{mt}(x,t)\,dx\,dt\leqslant 2T\|f\|_{L_2(Q_T)}\|w_{mt}\|_{L_2(Q_T)}\leqslant$$
$$\leqslant 2T\|f\|_{L_2(Q_T)}\|w_m\|_{\tilde{H}^1(Q_T)},$$

de donde

$$\|w_m\|_{\tilde{H}^1(Q_T)}\leqslant 2T\|f\|_{L_2(Q_T)}.$$

De este modo, el conjunto de funciones w_m, $m=1, 2, \ldots$, es acotado en $\tilde{H}^1(Q_T)$. Del teorema 3, p. 8, § 3, cap. II, se desprende que este conjunto es débilmente compacto en $\tilde{H}^1(Q_T)$, es decir, se puede extraer de él una subsucesión (designémosla de nuevo por w_m) que en $\tilde{H}^1(Q_T)$ converja débilmente hacia cierta función $u\in\tilde{H}^1(Q_T)$.

La función u es la solución generalizada que buscamos del problema mixto. Para demostrar esto será suficiente, evidentemente, comprobar que para toda $v\in\tilde{\tilde{H}}^1(Q_T)$ (designemos así un subespacio del espacio $H^1(Q_T)$ compuesto de las funciones que se anulan en $D_T\cup\Gamma_T$)

tiene lugar la identidad integral (9) (en la cual $\psi = 0$):

$$\int_{Q_T} (k\nabla u\nabla v + auv - u_t v_t)\, dx\, dt = \int_{Q_T} fv\, dx\, dt. \tag{38}$$

Para ello, a su vez, hace falta establecer la identidad (38) para algún conjunto de funciones $\mathcal{M}$, siempre denso en $\tilde{\tilde{H}}^1(Q_T)$.

A título de $\mathcal{M}$ tomemos un conjunto de todas las combinaciones lineales de las funciones $v_k(x)\,\theta(t)$, donde $k = 1, 2, \ldots$, y $\theta(t)$, una función arbitraria de $C^1([0, T])$, que satisface la condición $\theta(T) = 0$. Mostremos, primero, que la igualdad (38) es válida para cualquier función $v(x, t) = v_k(x)\,\theta(t)$, y, por tanto, para cualquier v de $\mathcal{M}$, y cerciorémonos, luego, de que el conjunto $\mathcal{M}$ es siempre denso en $\tilde{\tilde{H}}^1(Q_T)$.

Integrando por $(0, T)$ la igualdad (32), multiplicada por $\theta(t)$, siendo $m \geqslant k$, obtendremos

$$\int_{Q_T} [(k\nabla w_m\nabla v_k + aw_m v_k)\,\theta - w_{mt} v_k \theta']\, dx\, dt = \int_{Q_T} fv_k\theta\, dx\, dt.$$

De aquí se deduce (38), puesto que para $m \to \infty$ w_m converge débilmente en $H^1(Q_T)$ hacia u.

Mostremos que $\mathcal{M}$ es siempre denso en $\tilde{\tilde{H}}^1(Q_T)$. Basta establecer para esto que toda función $\eta(x, t)$ de $C^2(\overline{Q}_T)$ que satisface la condición

$$\eta|_{\Gamma_T \cup D_T} = 0 \tag{39}$$

(el conjunto de estas funciones es siempre denso en $\tilde{\tilde{H}}^1(Q_T)$), pueda ser aproximada en la métrica del espacio $H^1(Q_T)$ por las funciones de $\mathcal{M}$. Definamos la norma en el espacio $\tilde{\tilde{H}}^1(Q_T)$ mediante la ecuación

$$\|f\|_{\tilde{\tilde{H}}^1(Q_T)} = \Big(\int_{Q_T} (f_t^2 + |\nabla f|^2\, dx\, dt)\Big)^{1/2}.$$

Señalemos que el conjunto $\mathcal{M}$ puede considerarse como un conjunto de todas las combinaciones lineales de las funciones $v_k^*(x,)$ $\theta(t)$, donde $\theta(t)$ es una función arbitraria de $C^1([0, T])$ que se anula para $t = T$, y $v_1^*, v_2^*, \ldots$, es una base ortonormal del espacio $\mathring{H}^1(D)$ (en el producto escalar $(f, g)_{\mathring{H}^1(D)} = \int_D \nabla f\nabla g\,dx$), obtenido como resultado de ortonormar el sistema $v_1, v_2, \ldots$ por el método de Gramm—Schmidt (véase p. 5, § 2, cap. II).

Sea $\eta(x, t)$ una función arbitraria de $C^2(\overline{Q}_T)$ que satisface la condición (39). Puesto que para todo $t \in [0, T]$ las funciones $\eta(x, t)$ y $\eta_t(x, t)$ pertenecen a $\mathring{H}^1(D)$, éstas pueden ser desarrolladas en las siguientes series de Fourier, convergentes en la métrica de $\mathring{H}^1(D)$:

$$\eta(x, t) = \sum_{h=1}^{\infty} \eta_h(t)\, v_h^*(x),$$
$$\eta_t(x, t) = \sum_{h=1}^{\infty} \eta_h'(t)\, v_h^*(x) \tag{40}$$

donde

$$\eta_h(t) = \int_D \nabla\eta(x, t)\, \nabla v_h^*(x)\, dx. \tag{41}$$

Con ello,

$$\sum_{h=1}^{\infty} \left(\eta_h^2(t) + \eta_h'^2(t)\right) = \int_D \left(|\nabla\eta(x, t)|^2 + |\nabla\eta_t(x, t)|^2\right) dx,\ t\in[0, T]. \tag{42}$$

Designemos por $\eta_N(x, t)$ la suma parcial de la serie (40):

$$\eta_N(x, t) = \sum_{h=1}^{N} \eta_h(t)\, v_h^*(x). \tag{43}$$

De (41) y (43) se infiere que para todo $N \geqslant 1$ la función $\eta_t - \eta_{Nt} \in \mathring{H}^1(D_t)$, cualquiera que sea $t \in [0, T]$. Por eso, en vista de la desigualdad de Steklov (p. 6, § 5, cap. III)

$$\|\eta_t - \eta_{Nt}\|_{L_2(D_t)} \leqslant C \|\eta_t - \eta_{Nt}\|_{\mathring{H}^1(D_t)},$$

donde $C > 0$ es una constante que sólo depende del dominio D. Por consiguiente, para todo $N \geqslant 1$

$$\|\eta_t - \eta_{Nt}\|^2_{L_2(D_t)} + \|\eta - \eta_N\|^2_{\mathring{H}^1(D_t)} \leqslant$$
$$\leqslant C^2 \|\eta_t - \eta_{Nt}\|^2_{\mathring{H}^1(D_t)} + \|\eta - \eta_N\|^2_{\mathring{H}^1(D_t)} = \sum_{h=N+1}^{\infty} (\eta_h^2(t) + C^2\eta_h'^2(t)).$$

cualquiera que sea $t \in [0, T]$.

En virtud de (42), para cualquier $t \in [0, T]$ $\sum_{h=N+1}^{\infty} (\eta_h^2(t) + C^2\eta_h'^2(t)) \downarrow 0$ cuando $N \to \infty$. Por ello, debido al teorema de Levi (teorema 3, p. 6, §1 , cap. II), obtenemos que para $N \to \infty$

$$\|\eta - \eta_N\|^2_{\tilde{\tilde{H}}^1(Q_T)} = \int_0^T \left(\|\eta_t - \eta_{Nt}\|^2_{L_2(D_t)} + \|\eta - \eta_N\|^2_{\mathring{H}^1(D_t)}\right) dt \to 0.$$

La afirmación está demostrada.

Señalemos que debido a la unicidad de la solución generalizada u del problema (1)—(4) (teorema 1), de lo demostrado se deduce que no sólo alguna subsucesión de la sucesión w_m, $m = 1, 2, \ldots$, sino que también la propia sucesión converge débilmente en $H^1(Q_T)$ hacia u.

4. Suavidad de las soluciones generalizadas. Existencia de la solución en casi todo punto y de la solución clásica. Al estudiar la suavidad de las soluciones generalizadas, limitémonos a la consideración del primero y segundo (para la condición límite (5) $\sigma \equiv 0$) problemas mixtos para un caso particular de la ecuación (1), es decir, de la ecuación de onda (en (1) $k \equiv 1$, $a \equiv 0$), aunque, cuando los coeficientes de esta ecuación y de la función σ sean suficientemente suaves, mediante el mismo procedimiento también se establecen resultados análogos en el caso general.

Sea $u(x, t)$ una solución generalizada del primer o del segundo problemas mixtos para la ecuación de onda

$$u_{tt} - \Delta u = f(x, t) \tag{44}$$

$$u|_{t=0} = \varphi, \quad u_t|_{t=0} = \psi \tag{45}$$

y (o)

$$u|_{\Gamma_T} = 0 \tag{46}$$

en el caso del primer problema mixto, o

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_T} = 0 \tag{47}$$

en el caso del segundo problema mixto.

En los puntos anteriores se ha mostrado que los problemas (44)—(46) y (44), (45), (47) tienen (únicas) soluciones generalizadas, si $\psi \in L_2(D)$, $f \in L_2(Q_T)$ y la función φ pertenece al espacio $\mathring{H}^1(D)$ (para el primer problema mixto) o al espacio $H^1(D)$ (para el segundo problema mixto). Con ello (véase el p. 2), cada una de estas soluciones generalizadas $u(x, t)$ se representa por la serie convergente en $H^1(Q_T)$

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k(t)\, v_k(x), \tag{48}$$

donde

$$U_k(t) = \varphi_k \cos\sqrt{-\lambda_k}\, t + \frac{\psi_k}{\sqrt{-\lambda_k}} \operatorname{sen}\sqrt{-\lambda_k}\, t +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{-\lambda_k}} \int_0^t f_k(\tau) \operatorname{sen}\sqrt{-\lambda_k}\,(t-\tau)\, d\tau, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{49}$$

(para el segundo problema mixto

$$U_1(t)=\varphi_1+t\psi_1+\int_0^t (t-\tau)\, f_1(\tau)\, d\tau=$$

$$=\lim_{\lambda\to 0}\Big(\varphi_1\cos\sqrt{-\lambda}\,t+\frac{\psi_1}{\sqrt{-\lambda}}\operatorname{sen}\sqrt{-\lambda}\,t+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{-\lambda}}\int_0^t f_1(\tau)\operatorname{sen}\sqrt{-\lambda}\,(t-\tau)\,d\tau\Big)\,,$$

$$\varphi_k=(\varphi,\, v_k)_{L_2(D)},\qquad \psi_k=(\psi,\, v_k)_{L_2(D)},$$

$$f_k(t)=\int_{D_t} f(x,\, t)\, v_k(x)\, dx,\qquad k=1,\, 2,\, \ldots, \tag{50}$$

mientras que v_1, v_2, ... y λ_1, λ_2 ... son las sucesiones de las funciones propias generalizadas y de los valores propios correspondientes del primero (si se examina el problema (44)—(46)) o del segundo (si se examina el problema (44), (45), (47)) problema de contorno para el operador de Laplace en D (recordemos que en el primer problema de contorno $\lambda_k<0$ para todos los $k=1, 2, \ldots$, y en el segundo problema de contorno $\lambda_k<0$ para $k=2, 3, \ldots$ y $\lambda_1=0$ siendo $v_1=\mathrm{const}=1/\sqrt{|D|}$).

Supongamos que el contorno ∂D del dominio D pertenece a la clase C^s para cierto $s\geqslant 1$. Entonces, en virtud del teorema 7, p. 4, § 2, cap. IV, las funciones propias $v_k(x)$, $k=1, 2, \ldots$, del primero y segundo problemas de contorno para el operador de Laplace pertenecen a los espacios $H^s_{\mathscr{D}}(D)$ y $H^s_{\mathscr{N}}(D)$, respectivamente, es decir, pertenecen a $H^s(D)$ y satisfacen en ∂D las condiciones límites

$$v_k|_{\partial D}=\ldots=\Delta^{\left[\frac{s-1}{2}\right]}v_k\Big|_{\partial D}=0,\qquad k=1,\, 2,\, \ldots,$$

en el primer problema de contorno y las condiciones límites

$$\frac{\partial v_k}{\partial n}\Big|_{\partial D}=\ldots=\frac{\partial}{\partial n}\Delta^{\left[\frac{s}{2}\right]-1}v_k\Big|_{\partial D}=0,\qquad k=1,\, 2,\, \ldots$$

en el segundo problema de contorno para $s>1$. Recordemos que $H^1_{\mathscr{N}}(D)=H^1(D)$.

Supongamos también que en el caso del primer problema mixto (44)—(46) $\varphi\in H^s_{\mathscr{D}}(D)$, $\psi\in H^{s-1}_{\mathscr{D}}(D)$ y f pertenece al subespacio $\tilde{H}^{s-1}_{\mathscr{D}}(Q_T)$ del espacio $H^{s-1}(Q_T)$ que se compone, cuando $s>1$, de todas las funciones $f \in H^{s-1}(Q_T)$, para las cuales

$$f|_{\Gamma_T} = \ldots = \Delta^{\left[\frac{s}{2}\right]-1} f|_{\Gamma_T} = 0.$$

Cuando $s = 1$, $\tilde{H}^{s-1}_{\mathscr{D}}(Q_T) = \tilde{H}^{0}_{\mathscr{D}}(Q_T) = L_2(Q_T)$.

Al examinar el segundo problema mixto (44), (45), (47), supondremos que $\varphi \in H^s_{\mathscr{N}}(D)$, $\psi \in H^{s-1}_{\mathscr{N}}(D)$ y f pertenece al subespacio $\tilde{H}^{s-1}_{\mathscr{N}}(Q_T)$ del espacio $H^{s-1}(Q_T)$ que se compone, cuando $s > 2$, de todas las funciones $f \in H^{s-1}(Q_T)$, para las cuales

$$\frac{\partial f}{\partial n}\Big|_{\Gamma_T} = \ldots = \frac{\partial}{\partial n} \Delta^{\left[\frac{s-1}{2}\right]-1} f\Big|_{\Gamma_T} = 0.$$

Cuando $s = 2$, $\tilde{H}^{s-1}_{\mathscr{N}}(Q_T) = \tilde{H}^{1}_{\mathscr{N}}(Q_T) = H^1(Q_T)$; para $s = 1$ $\tilde{H}^{s-1}_{\mathscr{N}}(Q_T) = \tilde{H}^{0}_{\mathscr{N}}(Q_T) = L_2(Q_T)$.

En este punto demostraremos que de acuerdo con las suposiciones hechas las soluciones generalizadas de los problemas mixtos pertenecen al espacio $H^s(Q_T)$ y, para s suficientemente grandes, son soluciones clásicas.

TEOREMA 3. *Supongamos que para un cierto* $s \geqslant 1$ $\partial D \in C^s$ *en el caso del primer problema mixto* (44)—(46) $\varphi \in H^s_{\mathscr{D}}(D)$, $\psi \in H^{s-1}_{\mathscr{D}}(D)$, $f \in \tilde{H}^{s-1}_{\mathscr{D}}(Q_T)$, *y en el caso del segundo problema mixto* (44), (45), (47) $\varphi \in H^s_{\mathscr{N}}(D)$, $\psi \in H^{s-1}_{\mathscr{N}}(D)$, $f \in \tilde{H}^{s-1}_{\mathscr{N}}(Q_T)$. *Entonces, la serie* (48) *converge en* $H^s(D_t)$, *uniformemente según* $t \in [0, T]$, *hacia la solución generalizada* $u(x, t)$. *Además, para cualquier* $p = 1, \ldots, s$, *la serie obtenida de* (48) *mediante la derivación término término a respecto a* t, *realizada* p *veces, converge en* $H^{s-p}(D_t)$, *uniformemente según* $t \in [0, T]$, *y para todo* $t \in [0, T]$ *se verifican desigualdades*

$$\sum_{p=0}^{s} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^p}{\partial t^p} (U_k(t) v_k(x)) \right\|^2_{H^{s-p}(D_t)} \leqslant$$
$$\leqslant C (\|\varphi\|^2_{H^s(D)} + \|\psi\|^2_{H^{s-1}(D)} + \|f\|_{H^{s-1}(Q_T)}). \qquad (51)$$

La afirmación del teorema de que una serie obtenida de (48) mediante derivación término a término respecto a t, realizada p veces, converge uniformemente según $t \in [0, T]$ en $H^{s-p}(D_t)$, $p = 0, \ldots, s$, significa que para cualquier $t \in [0, T]$ la subsucesión de las trazas $\sum_{k=1}^{N} \frac{\partial^p}{\partial t^p}(U_k(t) v_k(x))|_{D_t}$ en D_t de p-ésimas derivadas respecto a t de las sumas parciales de la serie (48) (cada una de estas sumas parciales pertenece a $H^1(Q_T)$) converge en $H^{s-p}(D_t)$ y esta convergencia según $t \in [0, T]$, es uniforme, es decir,

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \left\| \sum_{k=M+1}^{N} \frac{\partial^p}{\partial t^p} (U_k(t) v_k(x)) \right\|_{H^{s-p}(D_t)} \to 0 \quad \text{para} \quad M, N \to \infty.$$

Entonces, tal sucesión de sumas parciales de la serie (48) converge también en $H^s(Q_T)$, y de la acotación (51) se deduce la desigualdad

$$\|u\|_{H^s(Q_T)} \leqslant C' (\|\varphi\|_{H^s(D)} + \|\psi\|_{H^{s-1}(D)} + \|f\|_{H^{s-1}(Q_T)}). \qquad (52)$$

De este modo, es válida la siguiente afirmación.

COROLARIO 1. *Supongamos que para un cierto* $s \geqslant 1$ $\partial D \in C^s$ *y en el caso del primer problema mixto* (44)—(46) $\varphi \in H^s_{\mathscr{D}}(D)$, $\psi \in H^{s-1}_{\mathscr{D}}(D)$, $f \in \tilde{H}^{s-1}_{\mathscr{D}}(Q_T)$, *y en el caso del segundo problema mixto* (44), (45), (47) $\varphi \in H^s_{\mathscr{N}}(D)$, $\psi \in H^{s-1}_{\mathscr{N}}(D)$, $f \in \tilde{H}^{s-1}_{\mathscr{N}}(Q_T)$. *Entonces, la solución generalizada de cada uno de estos problemas pertenece a* $H^s(Q_T)$ *y la serie* (48) *converge hacia ella en* $H^s(Q_t)$. *Se verifica, además, la desigualdad* (52).

Para todo $p = 0, \ldots, s-1$, la función $\frac{\partial^p u}{\partial t^p}$ tiene su traza en D_t, cualquiera que sea $t \in [0, T]$, y la serie obtenida de la serie (48) mediante la derivación término a término respecto a t, realizada p veces, converge en $H^{s-p}(D_t)$ hacia $\left.\frac{\partial^p u}{\partial t^p}\right|_{D_t}$ uniformemente según $t \in [0, T]$. Puesto que, para $p = s$ la sucesión de las sumas parciales de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^s}{\partial t^s} (U_k(t) v_k(x)) \mid_{D_t}$, compuesta de las trazas en D_t de las funciones $\frac{\partial^s (U_k v_k)}{\partial t^s}$, también, pertenecientes a $H^1(Q_T)$ converge en $L_2(D_t)$ (uniformemente según $t \in [0, T]$), entonces su límite, para todo $t \in [0, T]$, puede llamarse traza en D_t de la s-ésima derivada respecto a t de la solución generalizada $u(x, t)$.

Antes de proceder a la demostración del teorema 3, demostremos la siguiente afirmación auxiliar.

LEMA 2. *Si* $f \in H^q(Q_T)$, $q \geqslant 0$, y $g \in L_2(D)$, *entonces, la función*

$$h(t) = \int_{D_t} f(x, t) g(x)\, dx$$

pertenece a $H^q(0, T)$ *y se efectúan las igualdades*

$$\frac{d^p h(t)}{dt^p} = \int_{D_t} \frac{\partial^p f(x, t)}{\partial t^p} g(x)\, dx, \qquad 0 \leqslant p \leqslant q.$$

Puesto que para $p=0, 1, \ldots, q \frac{\partial^p f}{\partial t^p} \in L_2(Q_T)$, entonces, en vista del teorema de Fubini, para casi todo $t \in (0, T)$ las funciones $g(x) \frac{\partial^p f(x, t)}{\partial t^p}$ son integrables en D_t y las funciones

$$h^{(p)}(t) = \int_{D_t} \frac{\partial^p f(x, t)}{\partial t^p} g(x)\, dx, \quad p=0, 1, \ldots, q$$

$(h^{(0)}(t) = h(t))$, son integrables en $(0, T)$. Ya que, además,

$$\left(\int_{D_t} \frac{\partial^p f(x, t)}{\partial t^p} g(x)\, dx\right)^2 \leqslant \int_{D_t} \left(\frac{\partial^p f(x, t)}{\partial t^p}\right)^2 dx \cdot \|g\|^2_{L_2(D)},$$

entonces $h^{(p)}(t) \in L_2(0, T)$, $p=0, \ldots, q$.

Para una función arbitraria $\eta(x, t) \in \dot{C}^q(\overline{Q}_T)$

$$\int_{Q_T} \frac{\partial^p f(x, t)}{\partial t^p} \eta(x, t)\, dx\, dt = (-1)^p \int_{Q_T} f(x, t) \frac{\partial^p \eta(x, t)}{\partial t^p}\, dx\, dt,$$

por esta razón, siendo arbitrarias $\eta_1(t) \in \dot{C}^q([0, T])$ y $\eta_2(x) \in \dot{C}^q(\overline{D})$, se verifica la igualdad

$$\int_0^T \eta_1(t) \left(\int_D \frac{\partial^p f}{\partial t^p} \eta_2(x)\, dx\right) dt = (-1)^p \int_0^T \frac{d^p \eta_1(t)}{dt^p} \left(\int_D f \eta_2(x)\, dx\right) dt.$$

El conjunto $\dot{C}^q(\overline{D})$ es siempre denso en $L_2(D)$. Por eso, la última igualdad tiene también lugar para $\eta_2 \in L_2(D)$ arbitraria y, en particular, para $\eta_2 = g$. De este modo, para toda $\eta_1(t) \in \dot{C}^q([0, T])$

$$\int_0^T \eta_1 h^{(p)}\, dt = (-1)^p \int_0^T \frac{d^p \eta_1}{dt^p} h\, dt, \quad p=1, \ldots, q.$$

Esto significa que para $p = 1, \ldots, q$ la función $h^{(p)}(t)$ es la solución generalizada de p-ésimo orden de la función $h(t)$, es decir, $\frac{d^p h}{dt^p} = h^{(p)} \in L_2(0, T)$. El lema está demostrado.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 3. Del lema 2 se desprende que las funciones $f_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots$, dadas por la fórmula (50), pertenecen al espacio $H^{s-1}(0, T)$ y, consecuentemente (véase el teorema 3, p. 2, § 6, cap. III), para $s \geqslant 2$, al espacio $C^{s-2}([0, T])$. Por consiguiente, las funciones U_k, $k = 1, 2, \ldots$, que están dadas por (49) y que satisfacen en $(0, T)$ las ecuaciones $U_k'' - \lambda_k U_k = f_k$, pertenecen al espacio $H^{s+1}(0, T)$ y, por tanto, al espacio $C^s([0, T])$.

Entonces, en virtud de las propiedades de las funciones propias $v_k(x)$, las sumas parciales $s_N(x, t) = \sum_{k=1}^{N} U_k(t) v_k(x)$ de la serie (48) pertenecen al espacio $H^s(Q_T)$ y para todo $t \in [0, T]$, al espacio $H^s_{\mathscr{D}}(D_t)$ en el caso del problema (44)—(46) (o al espacio $H^s_{\mathscr{N}}(D_t)$, en el caso del problema (44), (45), (47)).

Además, cuando $p = 1, \ldots, s$, la función $\frac{\partial^p S_N}{\partial t^p}$ pertenece al espacio $H^{s-p+1}(Q_T)$, y para todo $t \in [0, T]$, al espacio $H^s_{\mathscr{D}}(D_t)$ $(H^s_{\mathscr{N}}(D_t))$. Por esto, según el lema 3, p. 5, § 2, cap. IV, y a consecuencia de la ortogonalidad de las funciones propias $v_k(x)$ en $L_2(D)$ y $H^1(D)$, tenemos, para todo $t \in [0, T]$, cualquier $p = 0, \ldots, s$ y cualesquiera M y N, $1 \leqslant M < N$, las siguientes desigualdades

$$\left\| \frac{\partial^p S_N}{\partial t^p} - \frac{\partial^p S_M}{\partial t^p} \right\|^2_{H^{s-p}(D_t)} \leqslant C_1' \left\| \Delta^{\frac{s-p}{2}} \frac{\partial^p}{\partial t^p}(S_N - S_M) \right\|^2_{L_2(D_t)} =$$

$$= C_1 \left\| \sum_{k=M+1}^{N} |\lambda_k|^{\frac{s-p}{2}} \frac{d^p U_k(t)}{dt^p} v_k(x) \right\|^2_{L_2(D_t)} =$$

$$= C_1 \sum_{k=M+1}^{N} |\lambda_k|^{s-p} \left(\frac{d^p U_k}{dt^p} \right)^2,$$

si $s-p$ es par y

$$\left\| \frac{\partial^p S_N}{\partial t^p} - \frac{\partial^p S_M}{\partial t^p} \right\|^2_{H^{s-p}(D_t)} \leqslant C_1' \left\| \Delta^{\frac{s-p-1}{2}} \frac{\partial^p}{\partial t^p}(S_N - S_M) \right\|^2_{H^1(D_t)} =$$

$$= C_1' \left\| \sum_{k=M+1}^{N} |\lambda_k|^{\frac{s-p-1}{2}} \frac{d^p U_k(t)}{dt^p} v_k(x) \right\|^2_{H^1(D_t)} \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \sum_{k=M+1}^{N} |\lambda_k|^{s-p} \left(\frac{d^p U_k(t)}{dt^p} \right)^2,$$

si $s-p$ es impar. Es decir, para todo $t \in [0, T]$, cualquier $p = 0, \ldots, s$, y cualesquiera M y N, $1 \leqslant M < N$,

$$\left\| \frac{\partial^p (S_N - S_M)}{\partial t^p} \right\|^2_{H^{s-p}(D_t)} \leqslant C_1 \sum_{k=M+1}^{N} |\lambda_k|^{s-p} \left(\frac{d^p U_k(t)}{dt^p} \right)^2. \qquad (53)$$

Análogamente, para todo $t \in [0, T]$, cualquier $p = 0, \ldots, s$ y cualquier $N \geqslant 1$

$$\left\| \frac{\partial^p S_N}{\partial t^p} \right\|^2_{H^{s-p}(D_t)} \leqslant C_1 \sum_{k=1}^{N} |\lambda_k|^{s-p} \left(\frac{d^p U_k(t)}{dt^p} \right)^2$$

en el caso del primer problema mixto ($\lambda_1 \neq 0$), y

$$\left\| \frac{\partial^p S_N}{\partial t^p} \right\|^2_{H^{s-p}(D_t)} = \left\| \frac{\partial^p (U_1 v_1)}{\partial t^p} + \frac{\partial^p (S_N - S_1)}{\partial t^p} \right\|^2_{H^{s-p}(D_t)} \leqslant$$

$$\leqslant 2 \left(\frac{\partial^p U_1}{\partial t^p} \right)^2 \left\| \frac{1}{\sqrt{|D|}} \right\|^2_{H^{s-p}(D_t)} + 2 \left\| \frac{\partial^p (S_N - S_1)}{\partial t^p} \right\|^2_{H^{s-p}(D_t)} \leqslant$$

$$\leqslant C_2 \left(\left(\frac{d^p U_1}{dt^p} \right)^2 + \sum_{k=2}^{N} |\lambda_k|^{s-p} \left(\frac{d^p U_k}{dt^p} \right)^2 \right)$$

en el caso del segundo problema mixto ($\lambda_1 = 0$). De este modo, para todo $t \in [0, T]$, $p = 0, \ldots, s$, $N \geqslant 1$

$$\left\| \frac{\partial^p S_N}{\partial t^p} \right\|^2_{H^{s-p}(D_t)} \leqslant C_3 \left(\left(\frac{d^p U_1}{dt^p} \right)^2 + \sum_{k=1}^{N} |\lambda_k|^{s-p} \left(\frac{d^p U_k}{dt^p} \right)^2 \right).$$

Sumando las últimas desigualdades según p, desde cero hasta s, obtendremos

$$\sum_{p=0}^{s} \left\| \frac{\partial^p S_N}{\partial t^p} \right\|^2_{H^{s-p}(D_t)} \leqslant C_3 \sum_{p=0}^{s} \left[\left(\frac{d^p U_1}{dt^p} \right)^2 + \sum_{k=1}^{N} |\lambda_k|^{s-p} \left(\frac{d^p U_k}{dt^p} \right)^2 \right]. \tag{54}$$

Hagamos ahora uso del siguiente lema cuya demostración daremos a conocer más abajo.

LEMA 3. *Si para un cierto $s \geqslant 1$ $\partial D \in C^s$ y $\varphi \in H^s_{\mathscr{D}}(D)$, $\psi \in H^{s-1}_{\mathscr{D}}(D)$, $f \in \tilde{H}^{s-1}_{\mathscr{D}}(Q_T)$ en el caso del primer problema mixto (44)—(46), o bien $\varphi \in H^s_{\mathscr{N}}(D)$, $\psi \in H^{s-1}_{\mathscr{N}}(D)$, $f \in \tilde{H}^{s-1}_{\mathscr{N}}(Q_T)$ en el caso del segundo problema mixto (44), (45), (47), entonces, para cualquier $p \leqslant s$ la serie*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{d^p U_k(t)}{dt^p} \right)^2 |\lambda_k|^{s-p}$$

converge uniformemente según $t \in [0, T]$ y

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{d^p U_k}{dt^p} \right)^2 |\lambda_k|^{s-p} \leqslant C \left(\|\varphi\|^2_{H^s(D)} + \|\psi\|^2_{H^{s-1}(D)} + \|f\|^2_{H^{s-1}(Q_T)} \right), \tag{55}$$

donde la constante $C > 0$ depende sólo de Q_T.

Debido a este lema, de las desigualdades (53) se deduce que para todo $p = 0, 1, \ldots, s$ la sucesión $\left. \frac{\partial^p S_N}{\partial t^p} \right|_{D_t}$ converge en $H^{s-p}(D_t)$ uniformemente según $t \in [0, T]$, y de las desigualdades (54), en virtud de la evidente acotación $\left(\frac{d^pU_s}{dt^p}\right)^2 \leqslant \text{const}\,(\|\varphi\|^2_{L_2(D)}+$ $+\|\psi\|^2_{L_2(D)}+\|f\|^2_{H^{s-1}(Q_T)})$ se desprende la desigualdad (51). El teorema está demostrado.

Del corolario 1 se desprende que, siendo $s=2$, la solución generalizada de cada uno de los problemas mixtos en consideración pertenece a $H^2(Q_T)$ y, por tanto, es la solución en casi todo punto.

Señalemos que en las condiciones del teorema 3, además de la suavidad de las funciones dadas, se supone el cumplimiento de las siguientes condiciones

$$\varphi|_{\partial D}=\ldots=\Delta^{\left[\frac{s-1}{2}\right]}\varphi|_{\partial D}=0,\quad \psi|_{\partial D}=\ldots=\Delta^{\left[\frac{s}{2}\right]-1}\psi|_{\partial D}=0 \qquad (56)$$

$$f|_{\Gamma_T}=\ldots=\Delta^{\left[\frac{s}{2}\right]-1}f|_{\Gamma_T}=0 \qquad (57)$$

en el caso del primer problema mixto, y de las condiciones

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_{\partial D}=\ldots=\frac{\partial}{\partial n}\Delta^{\left]\frac{s}{2}\right]-1}\varphi\Big|_{\partial D}=0,$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial n}\Big|_{\partial D}=\ldots=\frac{\partial}{\partial n}\Delta^{\left[\frac{s-3}{2}\right[}\psi\Big|_{\partial D}=0 \qquad (58)$$

y

$$\frac{\partial f}{\partial n}\Big|_{\Gamma_T}=\ldots=\frac{\partial}{\partial n}\Delta^{\left[\frac{s-3}{2}\right]}f\Big|_{\Gamma_T}=0 \qquad (59)$$

en el caso del segundo problema mixto. Notemos que algunas de las condiciones de este especie son necesarias para que sea válida la afirmación del teorema 3.

Efectivamente, por ejemplo, en el caso del primer problema mixto para $s\geqslant 2$, del hecho de que $\varphi(x)=u(x,t)|_{t=0}$ se representa por la serie (48), convergente en $H^s(D_0)$, mientras que $\psi(x)=$ $=\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0}$ (u es una solución casi por doquier) se representa por la serie $\sum\limits_{h=1}^{\infty}\frac{dU_h(t)}{dt}\Big|_{t=0}v_h(x)$, convergente en $H^{s-1}(D_0)$, se deduce el cumplimiento de las condiciones (56). Puesto que la serie (48) converge en $H^s(Q_T)$ hacia la solución en casi todo punto $u(x,t)$ y, por consiguiente, las series $\sum\limits_{h=1}^{\infty}U_h(t)\,\Delta v_h(x)$ y $\sum\limits_{h=1}^{\infty}\frac{d^2U_h(t)}{dt^2}v_h(x)$ convergen en $H^{s-2}(Q_T)$ hacia Δu y u_{tt}, respectivamente, entonces $f = u_{tt} - \Delta u$ satisface, para $s \geqslant 3$, las condiciones

$$f|_{\Gamma_T} = \ldots = \Delta^{\left[\frac{s-3}{2}\right]} f|_{\Gamma_T} = 0.$$

En el teorema 3 se ha exigido, para s par, la condición adicional $\Delta^{\left[\frac{s}{2}\right]-1} f|_{\Gamma_T} = 0$. Esta condición es en realidad superflua. Para simplificar, mostremos esto para $s = 2$.

COROLARIO 2. *Sea $\partial D \in C^2$ y $f \in H^1(Q_T)$, y supongamos que en el caso del problema (44)—(46) $\varphi \in H^2_{\mathscr{D}}(D)$, $\psi \in H^1_{\mathscr{D}}(D)$, y en el caso del problema (44), (45), (47) $\varphi \in H^2_{\mathscr{N}}(D)$, $\psi \in H^1_{\mathscr{N}}(D)$. Entonces, para $p = 0, 1, 2$, una serie, obtenida de (48) mediante derivación realizada p veces término a término respecto a t, converge en $H^{2-p}(D_t)$ uniformemente según $t \in [0, T]$ y la suma $u(x, t)$ de la serie (48) es una solución casi por doquier del problema (44)—(46) o, respectivamente, del problema (44), (45), (47). Con ello, para $s = 2$ se verifican las desigualdades (51), cualquiera que sea $t \in [0, T]$.*

En vista del teorema 3, basta demostrar esta afirmación para las condiciones iniciales homogéneas: $\varphi = 0$, $\psi = 0$.

Puesto que para $k > 1$

$$U_k(t) = \frac{1}{\sqrt{-\lambda_k}} \int_0^t f_k(\tau) \operatorname{sen} \sqrt{-\lambda_k}(t-\tau)\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{|\lambda_k|}\left(f_k(t) - f_k(0)\cos\sqrt{-\lambda_k}\, t\right) -$$

$$- \frac{1}{|\lambda_k|} \int_0^t f_k'(\tau) \cos\sqrt{-\lambda_k}(t-\tau)\, d\tau,$$

$$U_k'(t) = \int_0^t f_k(\tau)\cos\sqrt{-\lambda_k}(t-\tau)\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-\lambda_k}} f_k(0) \operatorname{sen}\sqrt{-\lambda_k}\, t + \frac{1}{\sqrt{-\lambda_k}} \int_0^t f_k'(\tau) \operatorname{sen}\sqrt{-\lambda_k}(t-\tau)\, d\tau,$$

$$U_k''(t) = f_k(t) + \lambda_k U_k(t) =$$

$$= f_k(0)\cos\sqrt{-\lambda_k}\, t + \int_0^t f_k'(\tau)\cos\sqrt{-\lambda_k}(t-\tau)\, d\tau,$$

entonces,

$$\lambda_k^2 U_k^2(t) \leqslant \text{const}\left(f_k^2(t)+f_k^2(0)+T\int_0^T (f_k'(\tau))^2\,d\tau\right),$$

$$|\lambda_k|(U_k'(t))^2 \leqslant \text{const}\left(f_k^2(0)+T\int_0^T (f_k'(\tau))^2\,d\tau\right),$$

$$(U_k''(t))^2 \leqslant \text{const}\left(f_k^2(0)+T\int_0^T (f_k'(\tau))^2\,d\tau\right).$$

Y como, en virtud del lema 2 y del hecho de que f pertenece al espacio $H^1(Q_T)$, las series $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\int\limits_0^T (f_k'(\tau))^2\,d\tau$ y $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k^2(t)$ convergen uniformemente según $t \in [0, T]$, entonces, de las desigualdades (53) y (54) se deduce la validez de la afirmación que vamos a demostrar.

Señalemos que si $f = 0$, de la correlación

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{L_2(D_t)} + \|\,|\nabla u|\,\|^2_{L_2(D_t)} = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\left(\frac{dU_k(t)}{dt}\right)^2 + |\lambda_k|\,U_k^2(t)\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\left[(\psi_k \cos\sqrt{|\lambda_k|}\,t - \varphi_k\sqrt{|\lambda_k|}\,\operatorname{sen}\sqrt{|\lambda_k|}\,t)^2 + \right.$$

$$\left. + (\psi_k \operatorname{sen}\sqrt{|\lambda_k|}\,t + \varphi_k\sqrt{|\lambda_k|}\cos\sqrt{|\lambda_k|}\,t)^2\right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}(\psi_k^2 + |\lambda_k|\,\varphi_k^2) = \|\psi\|^2_{L_2(D)} + \|\,|\nabla\varphi|\,\|_{L_2(D)}$$

se deduce que para las soluciones, cualquiera que sea $t \in [0, T]$, tiene lugar la igualdad

$$\int_{D_t}\left(\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right)^2 + |\nabla u(x,t)|^2\right)dx = \int_D (\psi^2 + |\nabla\varphi|^2)\,dx,$$

que se denomina *«ley de conservación de la energía».*

TEOREMA 4. *Sea* $\partial D \in C^{\left[\frac{n}{2}\right]+3}$ *y supongamos que el caso del problema* (44)—(46) $\varphi \in H_{\mathscr{D}}^{\left[\frac{n}{2}\right]+3}(D)$, $\psi \in H_{\mathscr{D}}^{\left[\frac{n}{2}\right]+2}(D)$, $f \in \widetilde{H}_{\mathscr{D}}^{\left[\frac{n}{2}\right]+2}(Q_T)$, *y en el caso del problema* (44), (45), (47) $\varphi \in H_{\mathscr{N}}^{\left[\frac{n}{2}\right]+3}(D)$, $\psi \in H_{\mathscr{N}}^{\left[\frac{n}{2}\right]+2}(D)$, $f \in \widetilde{H}_{\mathscr{N}}^{\left[\frac{n}{2}\right]+2}(Q_T)$. *Entonces, la serie* (48) *converge en* $C^2(\overline{Q}_T)$ *y su suma* $u(x,t)$ *es la solución clásica del problema* *correspondiente. Además, se verifican las desigualdades*

$$\|u\|_{C^p(\overline{Q}_T)} \leqslant C\left(\|\varphi\|_{H^{\left[\frac{n}{2}\right]+p+1}(D)} + \|\psi\|_{H^{\left[\frac{n}{2}\right]+p}(D)} + \right.$$
$$\left. + \|f\|_{H^{\left[\frac{n}{2}\right]-p}(Q_T)}\right), \quad p=0,\ 1,\ 2. \qquad (60)$$

DEMOSTRACIÓN. Puesto que $\partial D \in C^{\left[\frac{n}{2}\right]+2}$, las funciones propias generalizadas $v_1(x)$, $v_2(x)$, ... del primero y segundo problemas de contorno para el operador de Laplace en D pertenecen al espacio $H^{\left[\frac{n}{2}\right]+3}(D)$ y, por tanto, en virtud del teorema 3, p. 2, § 6, cap. III, al espacio $C^2(\overline{D})$. Por eso, las sumas parciales $S_N(x, t)$, $N=1, 2, \ldots$, de la serie (48) pertenecen a $C^2(\overline{Q}_T)$.

Según el teorema 3, p. 2, § 6, cap. III, y la desigualdad (53), para todo $t \in [0, T]$ y $1 \leqslant M < N$ tenemos

$$\|S_N - S_M\|^2_{C^2(\overline{D}_t)} + \left\|\frac{\partial}{\partial t}(S_N - S_M)\right\|^2_{C^1(\overline{D}_t)} +$$
$$+ \left\|\frac{\partial^2}{\partial t^2}(S_N - S_M)\right\|^2_{C(\overline{D}_t)} \leqslant C\left(\|S_N - S_M\|^2_{H^{\left[\frac{n}{2}\right]+3}(D_t)} + \right.$$
$$\left. + \left\|\frac{\partial}{\partial t}(S_N - S_M)\right\|^2_{H^{\left[\frac{n}{2}\right]+2}(D_t)} + \left\|\frac{\partial^2}{\partial t^2}(S_N - S_M)\right\|^2_{H^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}(D_t)}\right) \leqslant$$
$$\leqslant C_4 \sum_{p=0}^{2} \sum_{k=M+1}^{N} |\lambda_k|^{\left[\frac{n}{2}\right]+3-p} \left(\frac{d^pU_k}{dt^p}\right)^2,$$

de donde proviene que

$$\|S_N - S_M\|^2_{C^2(\overline{Q}_T)} \leqslant C_4 \max_{0\leqslant t\leqslant T} \sum_{p=0}^{2} \sum_{k=M+1}^{N} |\lambda_k|^{\left[\frac{n}{2}\right]+3-p} \left(\frac{d^pU_k}{dt^p}\right)^2.$$

Conforme al lema 3, las series de términos comunes $\left(\frac{d^pU_k}{dt^p}\right)^2 |\lambda_k|^{\left[\frac{n}{2}\right]+3-p}$, $p=0, 1, 2$ convergen uniformemente en $[0, T]$, por lo que la serie (48) converge en $C^2(\overline{Q}_T)$. De este modo, $u \in C^2(\overline{Q}_T)$. Según el teorema 3, p. 2, § 6, cap. III, para $p=0, 1, 2$

$$\|u\|_{C^p(\overline{Q}_T)} = \max_{0\leqslant t\leqslant T} \sum_{q=0}^{p} \left\|\frac{\partial^q u}{\partial t^q}\right\|_{C^{p-q}(\overline{D}_t)} \leqslant$$
$$\leqslant C \max_{0\leqslant t\leqslant T} \sum_{q=0}^{p} \left\|\frac{\partial^q u}{\partial t^q}\right\|_{H^{\left[\frac{n}{2}\right]+1+p-q}(D_t)},$$

Por esta razón, las desigualdades (60) se deducen de las desigualdades (51) en las que $s = \left[\frac{n}{2}\right] + 1 + p$. El teorema queda demostrado.

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA 3. Es cómodo realizarla en dos etapas. Primero establezcamos su validez cuando $f = 0$, y luego, cuando $\varphi = \psi = 0$.

Sea $f = 0$. De las fórmulas (49) se desprende que para todo $t \in [0, T]$ y $k = 1, 2, \ldots$ (en el caso del primer problema mixto) y $k = 2, 3, \ldots$ (en el caso del segundo problema mixto)

$$|U_k(t)| \leqslant |\varphi_k| + \frac{|\psi_k|}{\sqrt{|\lambda_k|}},$$

y en el caso del segundo problema mixto

$$|U_1(t)| \leqslant |\varphi_1| + T|\psi_1|.$$

Además, para todo $t \in [0, T]$ tenemos

$$\left|\frac{d^pU_k}{dt^p}\right| \leqslant |\varphi_k|\,|\lambda_k|^{p/2} + |\psi_k|\,|\lambda_k|^{(p-1)/2}, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

cualquiera que sea $p = 1, 2, \ldots$ (si $\lambda_1 = 0$, entonces $(\lambda_1)^0 = 1$). Por lo tanto, para todo $t \in [0, T]$

$$\left(\frac{d^pU_k}{dt^p}\right)^2 |\lambda_k|^{s-p} \leqslant 2\left(\varphi_k^2\,|\lambda_k|^s + \psi_k^2\,|\lambda_k|^{s-1}\right)$$

cualesquiera que sean $k \geqslant 1$ y p, $0 \leqslant p \leqslant s$. Por ello, la afirmación del lema 3 (cuando $f = 0$) se deduce de la convergencia de las series numéricas $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \varphi_k^2 |\lambda_k|^s$ y $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \psi_k^2 |\lambda_k|^{s-1}$ y de las desigualdades

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^2\,|\lambda_k|^s \leqslant C\,\|\varphi\|^2_{H^s(D)}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k^2\,|\lambda_k|^{s-1} \leqslant C\,\|\psi\|_{H^{s-1}(D)},$$

en las cuales la constante $C > 0$ no depende ni de φ ni de ψ (teorema 8, p. 5, § 2, cap. IV).

Para demostrar la validez del lema 3 cuando $\varphi = \psi = 0$, nos harán falta varias afirmaciones auxiliares.

LEMA 4. *Sea $\partial D \ni C^2$. Entonces*

1) *Si la función $f(x, t)$ pertenece al espacio $\tilde{H}^q_{\mathscr{D}}(Q_T)$, $q \geqslant 2$, para cualquier p, $p = 1, \ldots, q$, $\frac{\partial^p f}{\partial t^p}$ pertenece al espacio $\tilde{H}^{q-p}_{\mathscr{D}}(Q_T)$;*

2) *si la función $f(x, t)$ pertenece al espacio $\tilde{H}^q_{\mathscr{N}}(Q_T)$, $q \geqslant 2$, para cualquier p, $p = 1, \ldots, q$, $\frac{\partial^p f}{\partial t^p}$ pertenece al espacio $\tilde{H}^{q-p}_{\mathscr{N}}(Q_T)$.*

Para demostrar la primera afirmación del lema es, en realidad, suficiente establecer que si $G \in H^2(Q_T)$ y $G|_{\Gamma_T} = 0$, entonces $G_t|_{\Gamma_T} = 0$.

Para demostrar la segunda afirmación basta mostrar que si $G \in H^3(Q_T)$ y $\frac{\partial G}{\partial n}\Big|_{\Gamma_T} = 0$, entonces $\frac{\partial}{\partial n} G_t|_{\Gamma_T} = 0$.

Demostremos la primera afirmación. Como $G|_{\Gamma_T} = 0$, tenemos, para cualquier i, $1 \leqslant i \leqslant n$

$$\int_{Q_T} G_{x_i t}\eta \, dx\, dt = -\int_{Q_T} G_{x_i}\eta_t \, dx\, dt = \int_{Q_T} G\eta_{x_i t} \, dx\, dt = -\int_{Q_T} G_t \eta_{x_i} \, dx\, dt,$$

donde η es una función arbitraria de $C^2(\overline{Q}_T)$ que satisface las condiciones $\eta|_{D_0} = \eta|_{D_T} = 0$. Por otra parte, para cualquier i, $1 \leqslant i \leqslant n$,

$$\int_{Q_T} G_{x_i t}\eta \, dx\, dt = \int_{\Gamma_T} G_t \eta n_i \, dS\, dt - \int_{Q_T} G_t \eta_{x_i} \, dx\, dt,$$

donde n_i es el coseno del ángulo entre la normal (exterior) a Γ_T y el eje Ox_i.

Así pues, para todas las funciones $\eta \in C^2(\overline{\Gamma}_T)$ que satisfagan las condiciones $\eta|_{\partial D_0} = \eta|_{\partial D_T} = 0$, se verifican las desigualdades

$$\int_{\Gamma_T} G_t \eta n_i \, dS\, dt = 0, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{61}$$

Cubramos la superficie cerrada $\overline{\Gamma}_T$ con un número finito de bolas (abiertas, $(n+1)$-dimensionales) $V_1, \ldots, V_m$ de tal manera que para todo $j = 1, \ldots, m$ se halle un número $i = i(j)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, tal que en $\overline{\Gamma}_{Tj}$, donde $\Gamma_{Tj} = \Gamma_T \cap V_j$, sea que la función $|n_{i(j)}(x)| > 0$. Tomemos un cierto j, $1 \leqslant j \leqslant m$, arbitrario y una función arbitraria $\eta(x, t) \in \dot{C}^2(\overline{\Gamma}_{Tj})$, prolongada (en Γ_T) por cero fuera de Γ_{Tj}. De (61) se infiere que

$$\int_{\Gamma_{Tj}} G_t n_{i(j)}(x)\, \eta(x, t)\, dS\, dt = 0.$$

Puesto que el conjunto de funciones $n_{i(j)}(x)\,\eta(x, t)$ es, para $\eta(x, t)$ de $\dot{C}^2(\overline{\Gamma}_{Tj})$ arbitrarias, siempre denso en $L_2(\Gamma_{Tj})$, entonces $G_t|_{\Gamma_{Tj}} = 0$. Por consiguiente, $G_t|_{\Gamma_T} = 0$. La primera afirmación queda así demostrada.

Análogamente se demuestra la segunda afirmación. En efecto, como $\frac{\partial G}{\partial n}\Big|_{\Gamma_T} = 0$, entonces para toda $\eta \in C^2(\overline{Q}_T)$, $\eta|_{D_0} = \eta|_{D_T} = 0$, tenemos

$$\int_{Q_T} \Delta G_t \cdot \eta \, dx \, dt = -\int_{Q_T} \Delta G \cdot \eta_t \, dx \, dt = \int_{Q_T} \nabla G \cdot \nabla \eta_t \, dx \, dt =$$

$$= -\int_{Q_T} \nabla G_t \cdot \nabla \eta \, dx \, dt.$$

Por otra parte,

$$\int_{Q_T} \Delta G_t \cdot \eta \, dx \, dt = \int_{\Gamma_T} \frac{\partial G_t}{\partial n} \cdot \eta \, dS \, dt - \int_{Q_T} \nabla G_t \cdot \nabla \eta \, dx \, dt,$$

de donde

$$\int_{\Gamma_T} \frac{\partial}{\partial n} G_t \cdot \eta \, dS \, dt = 0$$

para cualquier $\eta \in C^2(\overline{\Gamma}_T)$. Por consiguiente, $\left.\frac{\partial G_t}{\partial n}\right|_{\Gamma_T} = 0$. El lema está demostrado.

LEMA 5. *Si $\partial D \in C^2$ y la función $f(x, t)$ pertenece al espacio $\tilde{H}^q_{\mathscr{Z}}(Q_T)$ o bien al $\tilde{H}^q_{\mathscr{N}}(Q_T)$, para cierto $q \geqslant 2$, entonces, para cualquier $t \in [0, T]$ y $p = 1, \ldots, q-1$ la traza de la función $\frac{\partial^p f}{\partial t^p}$ en D_t pertenece a $H^{q-p-1}_{\mathscr{Z}}(D_t)$ o, respectivamente, a $H^{q-p-1}_{\mathscr{N}}(D_t)$.*

Según el lema 4, para demostrar el lema 5 basta demostrar la afirmación siguiente. Si la función $G(x, t) \in H^2(Q_T)$, entonces para todo $t \in [0, T]$ se tiene $G|_{D_t} \in H^1(D_t)$; si $G \in H^2(Q_T)$ y $G|_{\Gamma_T} = 0$, entonces para todo $t \in [0, T]$ tendremos $G|_{D_t} \in \mathring{H}^1(D_t)$.

En virtud del teorema de las trazas (teorema 1, p. 1, § 5, cap. III), para todo $t \in [0, T]$ resulta que $G|_{D_t} \in L_2(D_t)$ y $G_{x_i}|_{D_t} \in L_2(D_t)$, $i = 1, \ldots, n$. Tomemos una función arbitraria $\eta_1(t)$ de $C^1([0, T])$ y una función arbitraria $\eta_2(x)$ de $\mathring{C}^1(\overline{D})$. Según la fórmula de Ostrogradski, para cualquier $i = 1, \ldots, n$

$$\int_{Q_T} G_{x_i} \eta_1 \eta_2 \, dx \, dt = -\int_{Q_T} G \eta_1 \eta_{2x_i} \, dx \, dt, \tag{62}$$

es decir,

$$\int_0^T \eta_1(t) \left[\int_{D_t} (G_{x_i} \eta_2 + G \eta_{2x_i}) \, dx \right] dt = 0.$$

Ya que el conjunto $C^1([0, T])$ es siempre denso en $L_2(0, T)$, y la función $\int_{D_t} (G_{x_i} \eta_2 + G \eta_{2x_i}) \, dx$ pertenece, debido al lema 2, al espacio

$H^1(0, T)$ y, consecuentemente, es continua en $[0, T]$, entonces, para la función arbitraria $\eta_2(x) \in \dot{C}^1(\overline{D})$

$$\int_{D_t} G_{x_i}\eta_2\,dx = -\int_{D_t} G\eta_{2x_i}\,dx, \tag{63}$$

cualquiera que sea $t \in [0, T]$.

Por lo tanto, para $t \in [0, T]$ cualquiera, $G|_{D_t} \in H^1(D_t)$ y la traza en D_t de la función $G_{x_i}(x, t)$, $i = 1, \ldots, n$, es la derivada generalizada de G respecto a x_i.

Sea, ahora, $G \in H^2(Q_T)$ y $G|_{\Gamma_T} = 0$. En este caso las igualdades (62) también se verifican para cualquier función $\eta_2(x)$ de $C^1(\overline{D})$. Por eso, para toda $\eta_2(x)$ de $C^1(\overline{D})$ también tienen lugar las igualdades (63) cualquiera que sea $t \in [0, T]$.

Según lo demostrado, para todo $t \in [0, T]$, $G|_{D_t} \in H^1(D_t)$, por lo que para cualquier $\eta_2(x) \in C^1(\overline{D})$, a la par con las igualdades (63), también se cumplen las igualdades

$$\int_{D_t} G_{x_i}\eta_2\,dx = \int_{\partial D_t} G\eta_2 n_i\,dS - \int_{D_t} G\eta_{2x_i}\,dx.$$

De este modo, siendo $\eta_2(x)$ de $C^1(\overline{D})$ arbitraria

$$\int_{\partial D_t} G\eta_2 n_i\,dS = 0, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

De estas igualdades se deduce (véase la demostración del lema 4) que en el contorno ∂D_t del dominio D_t la traza de la función $G(x, t)|_{D_t}$ es nula. El lema está demostrado.

OBSERVACIÓN. De la demostración del lema 5 proviene inmediatamente que es válida la siguiente afirmación. Si $\partial D \in C^2$ y $f(x, t) \in H^q(Q_T)$, entonces $f|_{D_t} \in H^{q-1}(D_t)$, cualquiera que sea $t \in [0, T]$.

LEMA 6. *Sea $v_1, v_2, \ldots$ una base ortonormal del espacio $L_2(D)$. Entonces, para toda función $G(x, t) \in L_2(Q_T)$ es válida la igualdad*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^T\left(\int_{D_t} G(x, t)\,v_k(x)\,dx\right)^2 dt = \|G\|^2_{L_2(Q_T)}.$$

Puesto que para casi todo $t \in (0, T)$ la función $G(x, t) \in L_2(D_t)$, entonces para estos valores de t

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_{D_t} G(x, t)\,v_k(x)\,dx\right)^2 = \|G(x, t)\|^2_{L_2(D_t)}.$$

Integrando esta correlación en $(0, T)$, de acuerdo con el teorema de Levi, obtenemos la igualdad necesaria. El lema está demostrado.

Pasemos ahora a la demostración del lema 3 cuando $\varphi = \psi = 0$. De (49) y (50) tenemos

$$U_k(t) = \frac{1}{\sqrt{|\lambda_k|}} \int_{Q_t} f(x, \tau)\, v_k(x) \operatorname{sen} \sqrt{|\lambda_k|}\,(t-\tau)\, d\tau, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{49'}$$

$\Big($para el segundo problema mixto $U_1(t) = \frac{1}{\sqrt{|D|}} \int_{Q_t} (t-\tau)\, x \times$

$\times f(x, \tau)\, dx\, d\tau\Big)$.

Supongamos al principio que $p = 0$. Puesto que las funciones f y v_k pertenecen al espacio $\tilde{H}^{s-1}_{\mathscr{D}}(Q_T)$ (o bien $\tilde{H}^{s-1}_{\mathscr{N}}(Q_T)$), y $\Delta^\mu v_k = \lambda_k^\mu v_k$ para cualquier $\mu = 1, \ldots, [s/2]$, entonces, si $s-1$ es par, para todo $t \in [0, T]$

$$|\lambda_k|^{s/2} U_k(t) =$$

$$= (-1)^{\frac{s-1}{2}} \int_{Q_T} f(x, \tau)\, \Delta^{\frac{s-1}{2}} v_k(x) \operatorname{sen} \sqrt{|\lambda_k|}\,(t-\tau)\, dx\, d\tau =$$

$$= (-1)^{\frac{s-1}{2}} \int_{Q_T} \Delta^{\frac{s-1}{2}} f(x, \tau) \cdot v_k(x) \operatorname{sen} \sqrt{|\lambda_k|}\,(t-\tau)\, dx\, d\tau = \tilde{\alpha}_k(t),$$

donde

$$\tilde{\alpha}_k^2(t) \leqslant \int_0^t \operatorname{sen}^2 \sqrt{|\lambda_k|}\,(t-\tau)\, d\tau \cdot \int_0^t d\tau \Big(\int_{D_\tau} \Delta^{\frac{s-1}{2}} f(x, \tau) \cdot v_k(x)\, dx \Big)^2 \leqslant$$

$$\leqslant T \int_0^T \Big(\int_{D_t} \Delta^{\frac{s-1}{2}} f(x, t) \cdot v_k(x)\, dx \Big)^2 dt.$$

Ya que $\Delta^{\frac{s-1}{2}} f \in L_2(Q_T)$, en virtud del lema 6, la serie numérica $\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^T \Big(\int_{D_t} \Delta^{\frac{s-1}{2}} f(x, t)\, v_k(x)\, dx \Big)^2 dt$ converge y

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_0^T \Big(\int_{D_t} \Delta^{\frac{s-1}{2}} f(x, t)\, v_k(x)\, dx \Big)^2 dt =$$

$$= \int_{Q_T} (\Delta^{\frac{s-1}{2}} f)^2\, dx\, dt \leqslant C' \| f \|^2_{H^{s-1}(Q_T)}.$$

Por consiguiente, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{\alpha}_k^2(t)$ converge uniformemente en $[0, T]$ y

$$\sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{\alpha}_k^2(t) \leqslant TC' \| f \|^2_{H^{s-1}(Q_T)} C \| f \|^2_{H^{s-1}(Q_T)}.$$

Cuando $s-1$ es impar,

$$|\lambda_k|^{s/2} U_k(t) =$$
$$= (-1)^{\frac{s-2}{2}} |\lambda_k|^{1/2} \int_{Q_t} \Delta^{\frac{s-2}{2}} f(x, \tau) v_k(x) \operatorname{sen} \sqrt{|\lambda_k|}\,(t-\tau)\, dx\, d\tau =$$
$$= (-1)^{\frac{s-2}{2}} \int_{Q_t} \Delta^{\frac{s-2}{2}} f(x, \tau) v_k(x)\, d(\cos \sqrt{|\lambda_k|}\,(t-\tau)\, dx =$$
$$= (-1)^{\frac{s-2}{2}} \Big\{ \int_{D_t} \Delta^{\frac{s-2}{2}} f(x, t) v_k(x)\, dx -$$
$$- \cos \sqrt{|\lambda_k|}\, t \int_{D_0} \Delta^{\frac{s-2}{2}} f(x, 0) v_k(x)\, dx -$$
$$- \int_0^t \cos \sqrt{|\lambda_k|}\,(t-\tau) \Big[\int_{D_t} \Delta^{\frac{s-2}{2}} f_\tau(x, \tau) v_k(x)\, dx \Big] d\tau =$$
$$= \widetilde{\widetilde{\alpha}}_k^{(1)}(t) + \widetilde{\widetilde{\alpha}}_k^{(2)}(t) + \widetilde{\widetilde{\alpha}}_k^{(3)}(t) = \widetilde{\widetilde{\alpha}}_k(t),$$

donde

$$|\widetilde{\widetilde{\alpha}}_k^{(1)}(t)|^2 = \Big| \int_{D_t} \Delta^{\frac{s-2}{2}} f(x, t) v_k(x)\, dx \Big|^2,$$

$$|\widetilde{\widetilde{\alpha}}_k^{(2)}(t)|^2 \leqslant \Big| \int_{D_0} \Delta^{\frac{s-2}{2}} f(x, 0) v_k(x)\, dx \Big|^2,$$

$$|\widetilde{\widetilde{\alpha}}_k^{(3)}(t)|^2 \leqslant T \int_0^T \Big(\int_{D_t} \Delta^{\frac{s-2}{2}} f_t(x, t) v_k(x)\, dx \Big)^2 dt.$$

La función $\Delta^{\frac{s-2}{2}} f \in H^1(Q_T)$, por eso, para todo $t \in [0, T]$ se tiene $\Delta^{\frac{s-2}{2}} f(x, t) \in L_2(D_t)$ y

$$\| \Delta^{\frac{s-2}{2}} f(x, t) \|^2_{L_2(D_t)} \leqslant \text{const} \, \| \Delta^{\frac{s-2}{2}} f(x, t) \|^2_{H^1(Q_T)} \leqslant$$
$$\leqslant \text{const} \, \| f \|^2_{H^{s-1}(Q_T)}.$$

Por lo tanto, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} |\tilde{\tilde{\alpha}}^{(2)}(t)|^2$ converge uniformemente en $[0, T]$ y

$$\sum_{k=1} |\tilde{\tilde{\alpha}}_k^{(2)}(t)|^2 \leqslant C^{(2)} \| f \|^2_{H^{s-1}(Q_T)}.$$

Dado que para toda función $G(x, t) \in H^1(Q_T)$, siendo $|t'-t''| \to 0$, $t' \in [0, T]$, $t'' \in [0, T]$:

$$\| G \|^2_{L_2(D_{t'})} - \| G \|^2_{L_2(D_{t''})} = 2 \int_{t''}^{t'} \int_{D_\tau} G(x, \tau) G_\tau(x, \tau)\, dx\, d\tau = o(1),$$

lo que se debe a la continuidad absoluta de la integral, entonces, la función $\| \Delta^{\frac{s-2}{2}} f \|^2_{L_2(D_t)}$ es continua en $[0, T]$. Por lo tanto, para todo $t \in [0, T]$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{D_t} \Delta^{\frac{s-2}{2}} f(x, t) v_k(x)\, dx \right)^2 =$$

$$= \| \Delta^{\frac{s-2}{2}} f \|^2_{L_2(D_t)} \leqslant C \| f \|^2_{H^{s-1}(Q_T)},$$

con la particularidad de que, de acuerdo al teorema de Dini, la serie en el primer miembro de esta igualdad (en vista del lema 2, los términos de esta serie son continuos en $[0, T]$) converge uniformemente en $[0, T]$. De aquí se deduce que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} |\tilde{\tilde{\alpha}}^{(1)}(t)|^2$ converge uniformemente en $[0, T]$ y

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\tilde{\tilde{\alpha}}^{(1)}(t)|^2 \leqslant C^{(1)} \| f \|^2_{H^{s-1}(Q_T)}.$$

Luego, la función $\Delta^{\frac{s-2}{2}} f_t \in L_2(Q_T)$, por lo que, según el lema 6,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^T \left(\int_{D_t} \Delta^{\frac{s-2}{2}} f_t(x, t) v_k(x)\, dx \right)^2 dt =$$

$$= \| \Delta^{\frac{s-2}{2}} f_t \|_{L_2(Q_T)} \leqslant C \| f \|^2_{H^{s-1}(Q_T)}.$$

Así pues, la serie $\sum_{k=1}^{\infty}|\tilde{\tilde{\alpha}}^{(3)}(t)|^2$ converge uniformemente en el segmento $[0, T]$ y

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\tilde{\tilde{\alpha}}^{(3)}(t)|^2 \leqslant C^{(3)}\|f\|^2_{H^{s-1}(Q_T)}.$$

De este modo, la serie $\sum_{k=1}^{\infty}\tilde{\tilde{\alpha}}_k^2(t)$ converge uniformemente en $[0, T]$ y su suma

$$\sum_{k=1}^{\infty}\tilde{\tilde{\alpha}}_k^2(t) \leqslant C\|f\|^2_{H^{s-1}(Q_T)}.$$

La afirmación del lema 3 para $p = 0$ está demostrada.

Del modo análogo esta afirmación se demuestra para $p = 1$. De acuerdo con (49′), (50) para $s - 1$ pares

$$|\lambda_k|^{\frac{s-1}{2}}\frac{dU_k}{dt} =$$

$$= (-1)^{\frac{s-1}{2}}\int_{Q_t} f(x, \tau)\,\Delta^{\frac{s-1}{2}}v_k(x)\cos\sqrt{|\lambda_k|}\,(t-\tau)\,dx\,d\tau =$$

$$= (-1)^{\frac{s-1}{2}}\int_{Q_T}\Delta^{\frac{s-1}{2}}f(x, \tau)\cdot v_k(x)\cos\sqrt{|\lambda_k|}\,(t-\tau)\,dx\,d\tau = \tilde{\beta}_k(t).$$

Ya que

$$\tilde{\beta}_k^2(t) \leqslant T\int_0^T dt\left(\int_{D_t}\Delta^{\frac{s-1}{2}}f(x, t)\,v_k(x)\,dx\right)^2,$$

la serie $\sum_{k=1}^{\infty}\tilde{\beta}_k^2(t)$, igual que la serie $\sum_{k=1}^{\infty}\tilde{\alpha}_k^2(t)$, converge uniformemente $[0, T]$ y

$$\sum_{k=1}^{\infty}\tilde{\beta}_k^2(t) \leqslant C\|f\|^2_{H^{s-1}(Q_T)}.$$

Cuando $s-1$ es impar,

$$|\lambda_k|^{\frac{s-1}{2}}\frac{dU_k}{dt} =$$

$$= (-1)^{\frac{s-2}{2}}|\lambda_k|^{\frac{1}{2}}\int_{Q_t}\Delta^{\frac{s-2}{2}}f(x, \tau)\,v_k(x)\cos\sqrt{|\lambda_k|}\,(t-\tau)\,dx\,d\tau =$$

$$= (-1)^{\frac{s-2}{2}} \Big(\operatorname{sen} \sqrt{|\lambda_k|}\, t \cdot \int\limits_{D_0} \Delta^{\frac{s-2}{2}} f(x, 0)\, v_k(x)\, dx +$$

$$+ \int\limits_{Q_t} \Delta^{\frac{s-2}{2}} f_\tau(x, \tau)\, v_k(x) \operatorname{sen} \sqrt{|\lambda_k|}\, (t-\tau)\, dx\, d\tau \Big) =$$

$$= \tilde{\tilde{\beta}}_k^{(2)}(t) + \tilde{\tilde{\beta}}_k^{(3)}(t) = \tilde{\tilde{\beta}}_k(t).$$

Puesto que

$$|\tilde{\tilde{\beta}}_k^{(2)}(t)|^2 \leqslant \Big(\int\limits_{D_0} \Delta^{\frac{s-2}{2}} f(x, 0)\, v_k(x)\, dx \Big)^2,$$

$$|\tilde{\tilde{\beta}}_k^{(3)}(t)|^2 \leqslant T \int\limits_0^T \Big(\int\limits_{D_\tau} \Delta^{\frac{s-2}{2}} f_\tau(x, \tau)\, v_k(x)\, dx \Big)^2 d\tau,$$

entonces, las series $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (\tilde{\tilde{\beta}}_k^{(s)}(t))^2$ (lo mismo que las series $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \times$ $\times (\tilde{\tilde{\alpha}}_k^{(s)}(t))^2$), $s = 2, 3$, y, por tanto, la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \tilde{\tilde{\beta}}_k^2(t)$ convergen uniformemente en $[0, T]$ y

$$\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\tilde{\beta}}_k^2(t) \leqslant C \, \|f\|_{H^{s-1}(Q_T)}.$$

La afirmación del lema 3 para $p = 1$ está demostrada.

Sea, ahora, $p \geqslant 2$. Dado que la función $U_k(t)$ satisface la ecuación diferencial $U_k'' - \lambda_k U_k = f_k$, cuando p es par, $2 \leqslant p \leqslant s$,

$$\frac{d^p U_k}{dt^p} = \lambda_k^{\frac{p}{2}} U_k + \lambda_k^{\frac{p-2}{2}} f_k + \lambda_k^{\frac{p-4}{2}} \frac{d^2 f_k}{dt^2} + \ldots + \frac{d^{p-2} f_k}{dt^{p-2}},$$

y cuando p es impar, $2 < p \leqslant s$,

$$\frac{d^p U_k}{dt^p} = \lambda_k^{\frac{p-1}{2}} \frac{dU_k}{dt} + \lambda_k^{\frac{p-3}{2}} \frac{df_k}{dt} + \ldots + \frac{d^{p-2} f_k}{dt^{p-2}}.$$

Por esta razón, la afirmación del lema 3, para $p \leqslant s$ cualquiera, quedará demostrada, si comprobamos que, para todo q, $0 \leqslant q \leqslant s-2$, la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{s-2-q} \left(\frac{d^q f_k}{dt^q} \right)^2$ converge uniformemente en $[0, T]$ y tiene lugar la desigualdad

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^{s-2-q} \left(\frac{d^q f_k}{dt^q} \right)^2 \leqslant C \, \|f\|^2_{H^{s-1}(Q_T)},$$

en la que la constante $C > 0$ depende sólo de Q_T.

Cuando $s-q$ es par, en virtud de los lemas 2 y 5 tenemos para cualquier $t \in [0, T]$

$$|\lambda_k|^{\frac{s-q-2}{2}} \frac{d^q f_k}{dt^q} = |\lambda_k|^{\frac{s-q-2}{2}} \int\limits_{D_t} \frac{\partial^q f(x, t)}{\partial t^q} v_k(x)\, dx =$$

$$= (-1)^{\frac{s-q-2}{2}} \int\limits_{D_t} \Delta^{\frac{s-q-2}{2}} \frac{\partial^q f(x, t)}{\partial t^q} v_k(x)\, dx = \widetilde{\gamma}_k(t).$$

Puesto que $\Delta^{\frac{s-q-2}{2}} \frac{\partial^q f}{\partial t^q} \in H^1(Q_T)$, entonces para cualquier $t \in [0, T] \times \times \Delta^{\frac{s-q-2}{2}} \frac{\partial^q f}{\partial t^q} \in L_2(D_t)$ y la función $\left\| \Delta^{\frac{s-q-2}{2}} \frac{\partial^q f(x, t)}{\partial t^q} \right\|^2_{L_2(D_t)}$ es continua en $[0, T]$. Por eso, la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \widetilde{\gamma}_k^2(t)$ converge uniformemente en $[0, T]$ y

$$\sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{\gamma}_k^2(t) = \left\| \Delta^{\frac{s-q-2}{2}} \frac{\partial^q f(x, t)}{\partial t^q} \right\|^2_{L_2(D_t)} \leqslant C \, \|f\|^2_{H^{s-1}(Q_T)}.$$

Sea $s-q$ impar. Entonces, para todo $t \in [0, T]$

$$|\lambda_k|^{\frac{s-q-2}{2}} \frac{\partial^q f_k}{\partial t^q} =$$

$$= (-1)^{\frac{s-q-3}{2}} |\lambda_k|^{\frac{1}{2}} \int\limits_{D_t} \Delta^{\frac{s-q-3}{2}} \frac{\partial^q f(x, t)}{\partial t^q} v_k(x)\, dx = \sqrt{|\lambda_k|}\, \widetilde{\widetilde{\gamma}}_k(t).$$

Puesto que $\Delta^{\frac{s-q-3}{2}} \frac{\partial^q f}{\partial t^q} \in \widetilde{H}^2_{\mathscr{D}}(Q_T)$ (o bien $\widetilde{H}^2_{\mathscr{N}}(Q_T)$), entonces, en vista del lema 5, para cualquier $t \in [0, T]$ $\Delta^{\frac{s-q-3}{2}} \frac{\partial^q f}{\partial t^q} \in \mathring{H}^1(D_t)$ (o bien $H^1(D_t)$), con la particularidad de que la función $\left\| \Delta^{\frac{s-q-3}{2}} \frac{\partial^q f}{\partial t^q} \right\|^2_{H^1(D_t)}$ es continua en $[0, T]$. Ya que para todo $t \in [0, T]$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{\widetilde{\gamma}}_k^2(t) \left(|\lambda_k| + 1\right) = \left\| \Delta^{\frac{s-q-3}{2}} \frac{\partial^q f}{\partial t^q} \right\|^2_{H^1(D_t)},$$

entonces la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \tilde{\tilde{\gamma}}_k^2(t)(|\lambda_k|+1)$ y, con mayor razón, la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \tilde{\tilde{\gamma}}_k^2(t)|\lambda_k|$ convergen uniformemente en $[0, T]$ y

$$\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\tilde{\gamma}}_k^2(t)|\lambda_k| \leqslant \left\| \Delta^{\frac{s-q-1}{2}} \frac{\partial^q f}{\partial t^q} \right\|^2_{H^1(D_t)} \leqslant C \| f \|^2_{H^{s-1}(Q_T)}.$$

El lema está demostrado.

Como ya indicamos, sin las condiciones del tipo (56), (57) (en el primer problema mixto) y (58), (59) (en el segundo problema mixto), impuestas a las funciones dadas, los teoremas 3 u 4 no son válidos. No obstante, si queremos establecer la suavidad de las soluciones generalizadas y no la convergencia en el espacio correspondiente de la serie de Fourier, las condiciones (56), (57) y, respectivamente, las (58), (59) pueden ser considerablemente debilitadas. Examinemos, por ejemplo, el caso del primer problema mixto.

TEOREMA 3'. *Supongamos que para un cierto* $s \geqslant 1$ $\partial D \in C^s$, $\varphi \in H^s(D)$, $\psi \in H^{s-1}(D)$, $f \in H^{s-1}(Q_T)$ *y que se han cumplido las siguientes condiciones de concordancia:*

$$\varphi|_{\partial D} = \ldots = \left[\Delta^{\left[\frac{s-1}{2}\right]} \varphi + \sum_{i=0}^{\left[\frac{s-3}{2}\right]} \Delta^{\left[\frac{s-3}{2}\right]-i} \frac{\partial^{2i} f}{\partial t^{2i}} \right]\Big|_{\partial D_0} = 0 \qquad (64)$$

y para $s \geqslant 2$

$$\psi|_{\partial D} = \ldots = \left[\Delta^{\left[\frac{s}{2}\right]-1} \psi + \sum_{i=0}^{\left[\frac{s}{2}\right]-2} \Delta^{\left[\frac{s}{2}\right]-2-i} \frac{\partial^{2i+1} f}{\partial t^{2i+1}} \right]\Big|_{\partial D_0} = 0 \qquad (65)$$

$\Big($*consideramos que para* $s < 0$ $\sum\limits_{i=0}^{s} a_i = 0\Big)$. *Entonces, la solución generalizada del primer problema mixto* (44)—(46) *pertenece a* $H^s(Q_T)$.

Las condiciones de concordancia (64) y (65) en el teorema 3' tienen la forma

$$\varphi|_{\partial D} = 0,$$

cuando $s = 1$, o bien la forma

$$\varphi|_{\partial D} = \psi|_{\partial D} = 0,$$

cuando $s = 2$, o bien la forma

$$\varphi|_{\partial D} = \psi|_{\partial D} = 0, \qquad (\Delta\varphi + f)|_{\partial D_0} = 0,$$

cuando $s = 3$.

Ya que $f \in H^{s-1}(Q_T)$, en virtud de la observación al lema 5, su traza $f|_{D_0}$ pertenece a $H^{s-2}(D_0)$. Por lo tanto, para $s \geqslant 3$ cualquiera que sea $i = 0, \ldots, \left[\frac{s-3}{2}\right]$ existe una traza, $\Delta^{\left[\frac{s-3}{2}\right]-i} \times$ $\times \frac{\partial^{2i} f}{\partial t^{2i}}\Big|_{\partial D}$ que pertenece a $L_2(\partial D_0)$. y para $s \geqslant 4$, cualquiera que sea $i = 0, \ldots, \left[\frac{s}{2}\right] - 2$, existe una traza $\Delta^{\left[\frac{s}{2}\right]-2-i} \frac{\partial^{2i+1} f}{\partial t^{2i+1}}\Big|_{\partial D_0}$.

DEMOSTRACIÓN. **Cuando $s = 1$, la afirmación del teorema es obvia. Cuando $s = 2$, la afirmación se desprende del corolario 2 al teorema 3. Demostrémosla para $s = 3$; cuando $s > 3$, la demostración es la misma.**

Junto con el problema (44)—(46) examinemos el que sigue:

$$v_{tt} - \Delta v = f_t, \tag{66}$$

$$v|_{t=0} = \psi, \tag{67}$$

$$v_t|_{t=0} = \Delta\varphi + f|_{D_0}. \tag{68}$$

Las condiciones del teorema garantizan la existencia de la solución generalizada $v(x, t)$ del problema (66)—(68). En virtud del corolario 2 al teorema 3, la función $v(x, t)$ pertenece a $H^2(Q_T)$ y es la solución en casi todo punto del problema (66)—(68). Mostremos que $v = u_t$.

La función

$$w(x, t) = \varphi(x) + \int_0^t v(x, \tau)\, d\tau,$$

pertenece, evidentemente, a $H^2(Q_T)$ y

$$\nabla w = \nabla\varphi + \int_0^t \nabla v(x, \tau)\, d\tau, \qquad w_t = v.$$

En virtud de que v es una solución generalizada del problema (66)—(68), la función w satisface la identidad integral

$$\int_{Q_T} (\nabla w_t \nabla\eta - w_{tt}\eta_t)\, dx\, dt = \int_{D_0} (f + \Delta\varphi)\, \eta\, dx + \int_{Q_T} f_t \eta\, dx\, dt \tag{69}$$

para todo $\eta \in H^1(Q_T)$ que satisfagan las condiciones

$$\eta|_{D_t} = 0, \quad \eta|_{\Gamma_T} = 0. \tag{70}$$

Sea $\eta \in C^2(\overline{Q}_T)$ y que satisface las condiciones

$$\eta|_{D_t} = \eta_t|_{D_t} = 0, \quad \eta|_{\Gamma_T} = 0. \tag{71}$$

Entonces,

$$\int\limits_{Q_T} (\nabla w_t \nabla\eta - w_{tt}\eta_t)\, dx\, dt = -\int\limits_{Q_T} (\nabla w\, \nabla\eta_t - w_t\eta_{tt})\, dx\, dt -$$

$$-\int\limits_{D_0} (\nabla\varphi\, \nabla\eta - \psi\eta_t)\, dx = -\int\limits_{Q_T} (\nabla w\, \nabla\eta_t - w_t\eta_{tt})\, dx\, dt +$$

$$+\int\limits_{D_0} (\Delta\varphi\cdot\eta + \psi\eta_t)\, dx$$

y

$$\int\limits_{Q_T} f_t\eta\, dx\, dt = -\int\limits_{Q_T} f\eta_t dx\, dt - \int\limits_{D_0} f\eta\, dx.$$

Sustituyendo estas igualdades en (69), obtenemos

$$\int\limits_{Q_T} (\nabla w\, \nabla\eta_t - w_t\eta_{tt}) dx\, dt = \int\limits_{D_0} \psi\eta_t\, dx + \int\limits_{Q_T} f\eta_t\, dx\, dt.$$

Ya que para toda función $\zeta(x, t)$, que pertenezca a $C^2(\overline{Q}_T)$ y que satisfaga las condiciones (70), existe una función $\eta(x, t)$ (que pertenece a $C^2(\overline{Q}_T)$ y que satisface las condiciones (71)) tal que $\zeta = \eta_t$ $\left(\eta(x, t) = -\int\limits_t^T \zeta(x, \tau)\, d\tau\right)$, entonces la función w satisface la identidad integral

$$\int\limits_{Q_T} (\nabla w\, \nabla\zeta - w_t\zeta_t)\, dx\, dt = \int\limits_{D_0} \psi\zeta dx + \int\limits_{Q_T} f\zeta\, dx\, dt$$

para cualesquiera $\zeta(x, t)$ que pertenezcan a $C^2(\overline{Q}_T)$ y que satisfagan las condiciones (70) y, por lo tanto, para cualesquiera ζ de $H^1(Q_T)$ que satisfagan las condiciones (70). En vista de la unicidad de la solución generalizada del problema (44)—(46), $w = u$ y, consecuentemente, $v = u_t$.

Así pues, $u \in H^2(Q_T)$, $u_t \in H^2(Q_T)$. Dado que u es una solución en casi todo punto del problema (44)—(46), para casi todo $t \in [0, T]$ la función $u(x, t)$ es la solución en casi todo punto del primer problema de contorno para la ecuación de Poisson

$$\Delta u = f_1, \quad x \in D_t, \quad u|_{D_t} = 0,$$

donde $f_1 = (f + u_{tt})|_{D_t}$. Puesto que, según el corolario 2 del teorema 3, $u_{tt}|_{D_t} = v_t|_{D_t} \in H^1(D_t)$, entonces $f_1 \in H^1(D_t)$ y, de acuerdo con el teorema 4, p. 3, § 2, cap. IV, para casi todo $t \in [0, T]$

$u \in H^3(D_t)$ y

$$\|u\|_{H^3(D_t)} \leqslant \mathrm{const}\, \|f_1\|_{H^1(D_t)} \leqslant$$
$$\leqslant \mathrm{const}\, \{\|f\|_{H^1(D_t)} + \|u_{tt}\|_{H^1(D_t)}\} \leqslant$$
$$\leqslant \mathrm{const}\, \{\|f\|_{H^2(Q_T)} + \|\psi\|_{H^2(D)} + \|\Delta\varphi + f\|_{H^1(D_0)} +$$
$$+ \|f_t\|_{H^1(Q_T)}\} \leqslant \mathrm{const}\, \{\|f\|_{H^2(Q_T)} + \|\psi\|_{H^2(D)} + \|\varphi\|_{H^3(D)}\}.$$

Por consiguiente, $u \in H^3(Q_T)$. El teorema queda demostrado.

§ 3. Solución generalizada del problema de Cauchy

En la banda $\Pi_T = \{x \in R_n,\ 0 < t < T\}$ examinemos, para cierto $T > 0$, la ecuación hiperbólica

$$u_{tt} - \operatorname{div}(k(x) \nabla u) + a(x)\, u = f, \tag{1}$$

donde $k(x) \in C^1(R_n)$, $a(x) \in C(R_n)$, $\inf\limits_{x \in R_n} k(x) = k_0 > 0$, $\sup\limits_{x \in R_n} \times$ $\times\, k(x) = k_1 < \infty$; vamos también a considerar que $a(x) \geqslant 0$.

La función $u(x, t)$, que pertenece a $C^2(\Pi_T) \cap C^1(\Pi_T \cup \{t = 0\})$, se llama *solución clásica del problema de Cauchy* para la ecuación (1) en la banda Π_T, si en Π_T ella satisface la ecuación (1) y, cuando $t = 0$, las condiciones iniciales

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \tag{2}$$

$$u_t|_{t=0} = \psi(x). \tag{3}$$

Designemos mediante $Q_{T,R}$ (para $R > 0$ arbitrario) un cilindro $\{|x| < R,\ 0 < t < T\}$, mediante $S_{T,R}$ su superficie lateral $\{|x| = R,\ 0 < t < T\}$ y mediante $D_{\tau,R}$, $\tau \in [0, T]$, el conjunto $\{|x| < R,\ t = \tau\}$; en particular, $D_{0,R}$ es la base inferior y $D_{T,R}$ la superior del cilindro $Q_{T,R}$.

Sea $u(x, t)$ una solución clásica del problema de Cauchy (1)—(3) en la banda $\Pi_{T+\delta}$ para un cierto $\delta > 0$, con la función $f(x, t)$ perteneciente, para todo $R > 0$, al espacio $L_2(Q_{T,R})$. Multipliquemos (1) por una función arbitraria $v(x, t)$ que para cierto $R_0 = R_0(v) > 0$ satisface la siguiente condición:

$$v(x, t) \in H^1(Q_{T,R_0}), \quad v(x, t) = 0 \text{ en } \Pi_T \setminus Q_{T,R_0}$$
$$v|_{D_{T,R_0}} = 0, \quad v|_{S_{T,R_0}} = 0, \tag{4}$$

e integremos la igualdad obtenida en la banda Π_T. Valiéndonos de la fórmula de Ostrogradski, obtenemos

$$\int_{\Pi_T} (k\nabla u \nabla u + auv - u_t v_t)\, dx\, dt =$$

$$= \int_{\Pi_T} fv\, dx\, dt + \int_{R_n} \psi(x)\, v(x, 0)\, dx \qquad (5)$$

(en esta igualdad la integración se realiza en realidad no por toda la banda Π_T y por el plano $\{x \in R_n,\ t = 0\}$, sino sólo por el cilindro Q_{T, R_0} y por su base inferior D_{0, R_0}, respectivamente).

Sea $f(x, t) \in L_2(Q_{T, R})$ y sea $\psi(x) \in L_2(|x| < R)$ para todo $R > 0$. Introduzcamos la siguiente definición.

La función u se denomina *solución generalizada del problema de Cauchy* (1)—(3) *en la banda* Π_T, si ella pertenece a $H^1(Q_{T,R})$ para cualquier $R > 0$ satisface la identidad integral (5) para todas las v que satisfacen la condición (4) para cierto $R_0 = R_0(v) > 0$, y satisface, además, la condición inicial (2) (es decir, $u(x, t)|_{D_{0,R}} = \varphi(x)$, cualquiera que sea $R > 0$).

A la par con los conceptos de la solución clásica y la solución generalizada del problema de Cauchy (1)—(3), se puede enunciar el concepto de la solución en casi todo punto de este problema.

La función u se llama *solución en casi todo punto de* Π_T *del problema de Cauchy* (1)—(3), si ella pertenece a $H^2(Q_{T,R})$ para todo $R > 0$, satisface la ecuación (1) para casi todo $(x, t) \in \Pi_T$, y satisface las condiciones iniciales (2) y (3) (es decir, $u|_{D_{0,R}} = \varphi$, $u_t|_{D_{0,R}} = \psi$ cualquiera que sea $R > 0$).

Más arriba ya se ha mostrado que una solución clásica en $\Pi_{T+\delta}$ (siendo $\delta > 0$ arbitrario) del problema (1)—(3) con f perteneciente a $L_2(Q_{T,R})$ para todo $R > 0$, es la solución generalizada en Π_T de dicho problema. Análogamente se demuestra que la solución en casi todo punto del problema (1)—(3) (en Π_T) es también la solución generalizada (en Π_T) de este problema.

Igual que en el caso de los problemas mixtos, es fácil mostrar (compárese con el lema 1, p. 1, § 2) que si la solución generalizada en Π_T del problema (1)—(3) pertenece a $H^2(Q_{T,R})$ para todo $R > 0$, entonces será la solución en casi todo punto, y al pertenecer a $C^2(\Pi_T) \cap C^1(\Pi_T \cup \{t = 0\})$, será la solución clásica.

Demostremos, ahora, el teorema de existencia y unicidad de la solución generalizada del problema (1)—(3). Para ello nos hará falta la siguiente afirmación auxiliar.

Tomemos un número $\gamma > \sqrt{k_1}$ $(k_1 = \sup\limits_{x \in R_n} k(x) < \infty)$. Sea t_1 un número arbitrario mayor que T, y sea x^0 un punto arbitrario de R_n. Designemos con $K_{t_1, \tau}(x^0)$, donde $\tau \in [0, T]$, un cono truncado

$\{|x-x^0|<\gamma(t_1-t),\ 0<t<\tau\}$ dispuesto en Π_T, con $\Gamma_{t_1,\tau}(x^0)$ su superficie lateral, $\Gamma_{t_1,\tau}(x^0)=\{|x-x^0|=\gamma(t_1-t),\ 0<t<\tau\}$, y mediante $D_{\theta,\gamma(t_1-\theta)}(x^0)$ el conjunto $\{|x-x^0|<\gamma(t_1-\theta),\ t=\theta\}$, $0\leqslant\theta\leqslant\tau$ (entonces, $D_{0,\gamma t_1}(x^0)$ y $D_{\tau,\gamma(t_1-\tau)}(x^0)$ son las bases inferior y superior del cono). Si x^0 es el origen de coordenadas del espacio R_n, el cono $K_{t_1,\tau}(x^0)=K_{t_1,\tau}(0)$ lo designaremos por $K_{t_1,\tau}$, y la superficie $\Gamma_{t_1,\tau}(0)$, por $\Gamma_{t_1,\tau}$. En este caso, $D_{\tau,\gamma(t_1-\tau)}(0)=D_{\tau,\gamma(t_1-\tau)}$ y, en particular, $D_{0,\gamma t_1}$ y $D_{T,\gamma(t_1-T)}$ son las bases inferior y superior del cono $K_{t_1,T}$.

LEMA 1. *Supongamos que para ciertos $t_1>T$ y $x^0\in R_n$, la función $u(x,t)\in H^1(K_{t_1,T}(x^0))$, $u|_{D_{0,\gamma t_1}(x^0)}=0$ y*

$$\int\limits_{K_{t_1,T}(x^0)}(k(x)\nabla u\nabla v+auv-u_tv_t)\,dx\,dt=0 \tag{6}$$

para todo v que satisfacen la condición siguiente

$$v\in H^1(K_{t_1,T}(x_0))\quad v=0\quad\text{en}\quad \Pi_T\diagdown K_{t_1,T}(x^0),$$
$$v|_{D_{T,\gamma(t_1-T)}(x^0)}=0,\qquad v|_{\Gamma_{t_1,T}(x^0)}=0.$$

Entonces, $u=0$ en $K_{t_1,T}(x^0)$.

Es evidente que la validez del lema 1 es suficiente establecerla para $x^0=0$.

Tomemos $\tau\in[0,T]$ arbitrario y examinemos en $K_{t_1,T}$ la función

$$v(x,t)=\begin{cases}\displaystyle\int\limits_t^{\theta(x)}u(x,z)\,dz & \text{en}\quad K_{t_1,\tau},\\ 0 & \text{en}\quad K_{t_1,T}\diagdown K_{t_1,\tau},\end{cases}$$

donde

$$\theta(x)=\begin{cases}t_1-\dfrac{|x|}{\gamma} & \text{para}\quad \gamma(t_1-\tau)<|x|<\gamma t_1,\\ \tau & \text{para}\quad |x|<\gamma(t_1-\tau)\end{cases}$$

($t=\theta(x)$, $|x|<\gamma t_1$, es la ecuación de la superficie $\Gamma_{t_1,\tau}\cup\overline{D}_{\tau,\gamma(t_1-\tau)}$). La función $v(x,t)$ pertenece a $H^1(K_{t_1,T})$, $v|_{\Gamma_{t_1,\tau'}}=0$, $v|_{D_{\tau',\gamma(t_1-\tau')}}=0$ para cualquier $\tau'\in[\tau,T]$ y las derivadas generalizadas de la función v tienen la forma

$$\nabla v=\begin{cases}\displaystyle\int\limits_t^{\theta(x)}\nabla u(x,z)\,dz+u(x,\theta(x))\nabla\theta & \text{en}\quad K_{t_1,\tau},\\ 0 & \text{en}\quad K_{t_1,T}\diagdown K_{t_1,\tau},\end{cases} \tag{7}$$

$$v_t=\begin{cases}-u(x,t) & \text{en}\quad K_{t_1,\tau},\\ 0 & \text{en}\quad K_{t_1,T}\diagdown K_{t_1,\tau}.\end{cases} \tag{8}$$

He aquí el modo más fácil de convencernos de esto. Puesto que $u \in H^1(K_{t_1,T})$, existe una sucesión u_s, $s = 1, 2, \ldots$, de funciones de $C^1(\overline{K}_{t_1,T})$, convergente en $H^1(K_{t_1,T})$ hacia u. Examinemos la sucesión de funciones $v_1, v_2, \ldots$, pertenecientes a $C^1(\overline{K}_{t_1,T})$

$$v_m(x, t) = \begin{cases} \zeta_m(t) \int\limits_t^{\theta(x)} u_m(x, z)\, dz & \text{en } K_{t_1,\tau}, \\ 0 & \text{en } K_{t_1,T} \setminus K_{t_1,\tau}, \end{cases}$$

donde $\zeta_m(t)$ es igual a 1 cuando $t < \tau(1 - 1/m)$ y es nula cuando $t > \tau$, $0 \leqslant \zeta_m(t) \leqslant 1$, $\zeta_m(t) \in C^1(-\infty, +\infty)$, $\left|\frac{d\zeta_m}{dt}\right| \leqslant C_0 m$. Para cualquier $\tau' \in [\tau, T]$ $v_m|_{\Gamma_{t_1,\tau'} \cup D_{\tau', \gamma(t_1-\tau')}} = 0$. Mostremos que la sucesión v_m, $m = 1, 2, \ldots$, converge en $H^1(K_{t_1,T})$ hacia v. Efectivamente, es evidente que la sucesión v_m, $m = 1, 2, \ldots$, converge hacia v en $L_2(K_{t_1,T})$; la sucesión ∇v_m, $m = 1, 2, \ldots$,

$$\nabla v_m = \begin{cases} \zeta_m(t) \int\limits_t^{\theta(x)} \nabla u_m(x, z)\, dz + \zeta_m(t)\, u_m(x, \theta(x))\, \nabla\theta \\ \qquad\qquad \text{en } K_{t_1,\tau}, \\ 0 \qquad\qquad \text{en } K_{t_1,T} \setminus K_{t_1,\tau}, \end{cases}$$

converge en $L_2(K_{t_1,T})$ hacia una función vector ∇v, prefijada por la fórmula (7) (es decir, $(v_m)_{x_i} \to v_{x_i}$, $i = 1, \ldots, n$, cuando $m \to \infty$), y como

$$C_0^2 m^2 \int\limits_{K_{t_1,\tau} \setminus K_{t_1,\tau(1-1/m)}} \Big(\int\limits_t^{\theta(x)} u_m(x, z)\, dz \Big)^2 dx\, dt \leqslant$$

$$\leqslant C_0^2 T^2 \int\limits_{K_{t_1,\tau} \setminus K_{t_1,\tau(1-1/m)}} u_m^2(x, z)\, dx\, dz \leqslant$$

$$\leqslant 2C_0^2 T^2 \Big[\int\limits_{K_{t_1,T}} (u - u_m)^2\, dx\, dt + \int\limits_{K_{t_1,\tau} \setminus K_{t_1,\tau(1-1/m)}} u^2\, dx\, dt \Big] \to 0$$

cuando $m \to \infty$, entonces la sucesión $v_{1t}, v_{2t}, \ldots$,

$$v_{mt} = \begin{cases} -\zeta_m(t)\, u_m(x, t) + \zeta_m'(t) \int\limits_\tau^{\theta(x)} u_m(x, z)\, dz & \text{en } K_{t_1,\tau} \\ 0 & \text{en } K_{t_1,T} \setminus K_{t_1,\tau}, \end{cases}$$

converge en $L_2(K_{t_1,T})$ hacia la función v_t, prefijada por la fórmula (8).

Sustituyendo la función v en la indentidad (6), obtenemos

$$\int\limits_{K_{t_1,\tau}} k(x)\nabla u(x, t)\int\limits_t^{\theta(x)} \nabla u(x, z)\,dz\,dx\,dt+$$

$$+\int\limits_{K_{t_1,\tau}} k(x)\,u(x, \theta(x))\,\nabla u(x, t)\,\nabla\theta\,dx\,dt-$$

$$-\int\limits_{K_{t_1,\tau}} a(x)\,v_t\,v\,dx\,dt+\int\limits_{K_{t_1,\tau}} u_t u\,dx\,dt=0. \qquad (9)$$

Dado que $v|_{\Gamma_{t_1,\tau}\cup D_{\tau,\gamma(t_1-\tau)}}=0$,

$$\int\limits_{K_{t_1,\tau}} avv_t\,dx\,dt=-\frac{1}{2}\int\limits_{D_{0,\gamma t_1}} av^2\,dx\leqslant 0. \qquad (10)$$

Puesto que $u|_{D_{0,\gamma t_1}}=0$, por analogía tenemos

$$\int\limits_{K_{t_1,\tau}} uu_t\,dx\,dt=\frac{1}{2}\int\limits_{|x|<\gamma t_1} u^2(x, \theta(x))\,dx. \qquad (11)$$

Como

$$\int\limits_{K_{t_1,\tau}} k(x)\nabla u(x, t)\int\limits_t^{\theta(x)} \nabla u(x, z)\,dz\,dt\,dx=$$

$$=\int\limits_{|x|<\gamma t_1} k(x)\int\limits_0^{\theta(x)} \nabla u(x, t)\int\limits_t^{\theta(x)} \nabla u(x, z)\,dz\,dt\,dx=$$

$$=\int\limits_{|x|<\gamma t_1} k(x)\int\limits_0^{\theta(x)} \nabla u(x, t)\int\limits_0^{\theta(x)} \nabla u(x, z)\,dz\,dt\,dx-$$

$$-\int\limits_{|x|<\gamma t_1} k(x)\int\limits_0^{\theta(x)} \nabla u(x, t)\int\limits_0^{t} \nabla u(x, z)\,dz\,dt\,dx=$$

$$=\int\limits_{|x|<\gamma t_1} k(x)\left|\int\limits_0^{\theta(x)} \nabla u(x, t)\,dt\right|^2 dx-$$

$$-\int\limits_{|x|<\gamma t_1} k(x)\int\limits_0^{\theta(x)} \nabla u(x, z)\int\limits_z^{\theta(x)} \nabla u(x, t)\,dt\,dz\,dx,$$

entonces, conforme a (7)

$$\int\limits_{K_{t_1,\tau}} k(x)\nabla u(x,t)\int\limits_t^{\theta(x)}\nabla u(x,z)\,dz\,dt\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{|x|<\gamma t_1} k(x)\left|\int\limits_0^{\theta(x)}\nabla u(x,t)\,dt\right|^2 dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{|x|<\gamma t_1} k(x)\left[\left|\int\limits_0^{\theta(x)}\nabla u(x,t)\,dt+u(x,\theta(x))\nabla\theta\right|^2-\right.$$

$$\left.-2u(x,\theta(x))\nabla\theta\int\limits_0^{\theta(x)}\nabla u(x,t)\,dt-u^2(x,\theta(x))\,|\nabla\theta|^2\right]dx\geqslant$$

$$\geqslant\int\limits_{K_{t_1,\tau}} k(x)\,u(x,\theta(x))\nabla\theta\,\nabla u(x,t)\,dx\,dt-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{|x|<\gamma t_1} k(x)\,u^2(x,\theta(x))\,|\nabla\theta|^2\,dx.$$

Por eso,

$$\int\limits_{K_{t_1,\tau}} k(x)\nabla u(x,t)\int\limits_t^{\theta(x)}\nabla u(x,z)\,dz\,dt\,dx+$$

$$+\int\limits_{K_{t_1,\tau}} k(x)\,u(x,\theta(x))\nabla u\cdot\nabla\theta\,dx\,dt\geqslant$$

$$\geqslant-\frac{1}{2}\int\limits_{|x|<\gamma t_1} k(x)\,u^2(x,\theta(x))\,|\nabla\theta|^2\,dx\geqslant$$

$$\geqslant-\frac{k_1}{2\gamma^2}\int\limits_{|x|<\gamma t_1} u^2(x,\theta(x))\,dx. \qquad (12)$$

Sustituyendo las correlaciones (10)—(12) en (9), obtendremos la desigualdad $\left(1-\frac{k_1}{\gamma^2}\right)\int\limits_{|x|<\gamma t_1} u^2(x,\theta(x))\,dx\leqslant 0$, de la cual se infiere que $\int\limits_{D_{\tau,\,\gamma(t_1-\tau)}} u^2(x,\tau)\,dx=0$, de donde, por ser $\tau\in(0,T)$ arbitrario, resulta que $u=0$ en $K_{t_1,T}$. El lema está demostrado.

Del lema 1 se deduce inmediatamente el teorema de unicidad de la solución generalizada para el problema de Cauchy (1)—(3) y, por consiguiente, la unicidad de la solución en casi todo punto y de la solución clásica.

TEOREMA 1. *El problema de Cauchy* (1)—(3) *no puede tener más de una solución generalizada, más de una solución en casi todo punto y más de una solución clásica.*

Sean u_1 y u_2 soluciones generalizadas (y, en particular, soluciones en casi todo punto) del problema (1)—(3) ($f \in L_2(Q_{T,R})$ $\psi \in L_2(|x| < R)$ para todo $R > 0$). Entonces, su diferencia $u_1 - u_2$ satisface las condiciones del lema 1, cualesquiera que sean $t_1 > T$ y $x^0 \in R_n$. Por eso, $u_1 = u_2$.

Si u_1 y u_2 son soluciones clásicas del problema (1)—(3), su diferencia $u_1 - u_2$ será la solución clásica del problema (1)—(3) con las funciones nulas f, φ y ψ; por ello, $u_1 - u_2$ es la solución generalizada y, por tanto, $u_1 = u_2$. El teorema queda demostrado.

Sean $\varphi \in H^1(|x| < R)$, $\psi \in L_2(|x| < R)$, $f \in L_2(Q_{T,R})$ para todo $R > 0$. Elijamos, para cada m, $m = 1, 2, \ldots$, una función $\zeta_m(x, t)$, indefinidamente diferenciable en $\overline{\Pi}_T$, que es igual a 1 en $K_{8mT,T}$, y nula en $\Pi_T \setminus K_{8(m+1/2)T,T}$ y designemos mediante $u_m(x, t)$ una solución generalizada en el cilindro $Q_{T,8(m+1)T\gamma}$ del siguiente problema mixto:

$$
\begin{aligned}
u_{mtt} - \operatorname{div}(k(x)\nabla u_m) + a(x)\, u_m &= f_m(x, t),\\
u_m|_{D_{0,8(m+1)T\gamma}} &= \varphi_m(x),\\
u_{mt}|_{D_{0,8(m+1)T\gamma}} &= \psi_m(x),\\
u_m|_{S_{T,8(m+1)T\gamma}} &= 0,
\end{aligned} \tag{13}
$$

donde $\varphi_m(x) = \varphi(x)\,\zeta_m(x, 0)$, $\psi_m(x) = \psi(x)\,\zeta_m(x, 0)$, $f_m(x, t) = f(x, t)\,\zeta_m(x, t)$. Esto significa que la función u_m pertenece a $H^1(Q_{T,8(m+1)T\gamma})$, satisface la condición inicial $u_m|_{D_{0,8(m+1)T\gamma}} = 0$, y para toda v de $H^1(Q_{T,8(m+1)T\gamma})$ para las cuales $v|_{D_{T,8(m+1)T\gamma}} = 0$ y $v|_{S_{T,8(m+1)T\gamma}} = 0$, satisface la indentidad integral

$$
\int\limits_{Q_{T,8(m+1)T\gamma}} (k(x)\nabla u_m \nabla v + a u_m v - u_{mt} v_t)\, dx\, dt = \int\limits_{Q_{T,8(m+1)T\gamma}} f_m v\, dx\, dt + \int\limits_{D_{0,8(m+1)T\gamma}} \psi_m(x)\, v(x, 0)\, dx, \quad m = 1, 2, \ldots \tag{14}
$$

Dado que $\varphi_m \in \mathring{H}^1(D_{0,8(m+1)T\gamma})$ ($\varphi \in H^1(D_{0,8(m+1)T\gamma})$) y es nula para $8(m + 1/2)\,T\gamma < |x| < 8(m+1)\,T\gamma$), de acuerdo con el teorema 1 del párrafo anterior, las soluciones generalizadas u_m existen.

Tomemos un punto arbitrario $x^0 \in R_n$ para el cual $|x^0| = (8m + 6)\,T\gamma$ y sustituyamos en la identidad (14) una función arbitraria v que satisface la siguiente condición:

$$v \in H^1(K_{2T,\,T}(x^0)), \qquad v=0 \quad \text{en} \quad \Pi_T \setminus K_{2T,\,T}(x^0),$$
$$v|_{D_{T,\,T\gamma}(x^0)}=0, \qquad v|_{\Gamma_{2T,\,T}(x^0)}=0$$

(no es difícil comprobar que esta función v pertenece a $H^1(Q_{T,\,8(m+1)T\gamma})$ y que sus trazas en $D_{T,\,8(m+1)T\gamma}$ y $S_{T,\,8(m+1)T\gamma}$ son nulas). En virtud del lema 1 resulta que $u_m=0$ en $K_{2T,\,T}(x^0)$. Ya que x^0 es un punto arbitrario de una esfera n-dimensional $\{|x|=(8m+6)\,T\gamma,\ t=0\}$, entonces $u_m=0$ en la capa cilíndrica $\{(8m+5)\,T\gamma<|x|\leq(8m+7)\,T\gamma,\ 0<t<T\}$.

Designemos con $\tilde{u}_m(x,t)$ una función que es igual a $u_m(x,t)$ en $Q_{T,\,(8m+6)T\gamma}$ y es nula en $\Pi_T\setminus Q_{T,\,(8m+6)T\gamma}$, $m=1,2,\ldots$ Evidentemente, la función $\tilde{u}_m$, $m=1,2,\ldots$, pertenece al espacio $H^1(Q_{T,\,R})$ y

$$\tilde{u}_m|_{D_{0,\,R}}=\varphi_m \tag{15}$$

cualquiera que sea $R>0$.

Tomemos una función arbitraria v que satisface la condición (4) en la cual $R_0=R_0(v)>0$. Si $R_0<(8m+7)\,T\gamma$, se puede sustituir la función v en (14). Y como $u_m(x,t)=\tilde{u}_m(x,t)$ en $Q_{T,\,(8m+7)\,T\gamma}$, resulta que

$$\int\limits_{\Pi_T}(k\nabla\tilde{u}_m\nabla v+a\tilde{u}_mv-\tilde{u}_{mt}v_t)\,dx\,dt=$$
$$=\int\limits_{\Pi_T}f_mv\,dx\,dt+\int\limits_{R_n}\psi_m(x)\,v(x,0)\,dx. \tag{16}$$

Sea $R_0>(8m+7)\,T\gamma$. Puesto que $\tilde{u}_m=u_m$ en $Q_{T,\,(8m+7)\,T\gamma}$ y $\tilde{u}_m=0$ en $\Pi_T\setminus Q_{T,\,(8m+5)T\gamma}$ (en $Q_{T,\,(8m+7)T\gamma}\setminus Q_{T,\,(8m+5)T\gamma}$ $\tilde{u}_m=u_m=0$), entonces

$$\int\limits_{\Pi_T}(k\nabla\tilde{u}_m\cdot\nabla v+a\tilde{u}_mv-\tilde{u}_{mt}v_t)\,dx\,dt=$$
$$=\int\limits_{Q_{T,\,(8m+5)T\gamma}}(k\nabla u_m\cdot\nabla v+au_mv-u_{mt}v_t)\,dx\,dt.$$

Tomemos una función $\tilde{\zeta}_m(x)$, indefinidamente diferenciable en $\overline{\Pi}_T$, que es igual a 1 en $Q_{T,\,(8m+5)T\gamma}$ y es nula en $\Pi_T\setminus Q_{T,\,(8m+7)T\gamma}$. Sustituyendo la función $v\tilde{\zeta}_m$ en (14), obtenemos ($u_m=0$ en $Q_{T,\,(8m+7)T\gamma}\setminus Q_{T,\,(8m+5)T\gamma}$, $f_m=0$ en $\Pi_T\setminus Q_{T,\,(8m+4)T\gamma}$, y $\psi_m=0$ en

$\{|x| > (8m+4)T\gamma\})$

$$\int\limits_{Q_{T,(8m+5)T\gamma}} (k\nabla u_m\cdot\nabla v + au_m v - u_{mt}v_t)\,dx\,dt =$$

$$= \int\limits_{Q_{T,8(m+1)T\gamma}} (k\nabla u_m\cdot\nabla(v\tilde{\xi}_m) + au_m(v\tilde{\xi}_m) -$$

$$- u_{mt}(v\tilde{\xi}_m)_t)\,dx\,dt = \int\limits_{\Pi_T} f_m v\,dx\,dt + \int\limits_{R_n} \psi_m(x)\,v(x,0)\,dx.$$

De este modo, la función $\tilde{u}_m$ satisface la identidad integral (16) cualesquiera que sean v, para las cuales se cumple la condición (4) con cierto $R_0 = R_0(v) > 0$. Por consiguiente, la función $\tilde{u}_m$ es la solución generalizada en Π_T del problema de Cauchy (1)—(3) con las funciones $\varphi = \varphi_m$, $\psi = \psi_m$, $f = f_m$, $m = 1, 2, \ldots$ Como la función $\tilde{u}_{m'} - \tilde{u}_m$ (consideramos que $m' > m$) es la solución generalizada en Π_T del problema de Cauchy (1)—(3) con las funciones $\varphi = \varphi_{m'} - \varphi_m = 0$ para $|x| < 8\,mT\gamma$, $\psi = \psi_{m'} - \psi_m = 0$, para $|x| < 8mT\gamma$, y $f = f_{m'} - f_m = 0$ en $K_{8mT,T}$, entonces, en virtud del lema 1, $\tilde{u}_{m'} - \tilde{u}_m = 0$ en $K_{8mT,T}$. Es decir, para todo $m' \geqslant m$ se tiene $\tilde{u}_{m'} = \tilde{u}_m$ en $K_{8mT,T}$, y, por lo tanto, en $Q_{T,(8m-1)T\gamma}$. Quiere decir, que la sucesión de las funciones $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \ldots$ converge en casi todo punto en Π_T, hacia una función u, con la particularidad de que para cualquier $R > 0$ existe un número $N = N(R)$ $\Big(N(R) =$ $= 1 + \left[\frac{R+T\gamma}{8T\gamma}\right]\Big)$ tal que en $Q_{T,R}$ $u = \tilde{u}_m = u_m$ para todo $m \geqslant N$. De (15) y (16) se desprende que $u|_{t=0} = \varphi$ (cualquiera que sea $R > 0$, para $m \geqslant N(R)$ $\varphi_m = \varphi$ en $D_{0,R}$ y $\varphi_m = \tilde{u}_m|_{D_{0,R}} = u|_{D_{0,R}}$) y u satisface la identidad integral (5), cualesquiera que sean v para las cuales fue cumplida la condición (4) con cierto $R_0 = R_0(v) > 0$.

Por consiguiente, u es una solución generalizada en Π_T del problema de Cauchy (1)—(3). Así pues, queda establecido el

TEOREMA 2. *Si* $\varphi(x) \in H^1(|x| < R)$, $\psi(x) \in L_2(|x| < R)$ *y* $f \in L_2(Q_{T,R})$ *para cualquier* $R > 0$, *entonces en* Π_T *existe una solución generalizada del problema de Cauchy* (1)—(3).

Señalemos que está también demostrada la afirmación siguiente. Para cualquier $R > 0$ existe tal $N = N(R)$ que la solución generalizada u del problema (1)—(3) en el cilindro $Q_{T,R}$ coincide con las soluciones u_m de los problemas mixtos (13) para todo $m \geqslant N$.

Examinemos ahora un caso particular de la ecuación (1), es decir, la ecuación de onda ($k \equiv 1$, $a \equiv 0$ en (1))

$$u_{tt} - \Delta u = f. \qquad (17)$$

Supongamos que para un cierto $s > 1$ entero $\varphi \in H^s(|x| < R)$, $\psi \in H^{s-1}(|x| < R)$, $f \in H^{s-1}(Q_{T,R})$, cualquiera que sea $R > 0$. Entonces, según el teorema 3, p. 4 del párrafo anterior, la solución generalizada $u_m(x, t)$ del problema mixto (13) (siendo $k \equiv 1$, $a \equiv 0$) pertenece a $H^s(Q_{T,8(m+1)T\gamma})$

$$\varphi_m = \zeta_m(x, 0)\,\varphi(x) \in H^s_{\mathscr{D}}(D_{0,\,8(m+1)T\gamma}),$$

$$\psi_m = \zeta_m(x, 0)\,\psi(x) \in H^{s-1}_{\mathscr{D}}(D_{0,\,8(m+1)T\gamma}),$$

$$f_m = \zeta_m f \in \tilde{H}^{s-1}_{\mathscr{D}}(Q_{T,\,8(m+1)T\gamma})).$$

Por consiguiente, la solución u del problema de Cauchy (17), (2), (3), generalizada en Π_T, pertenece a $H^s(Q_{T,R})$ para todo $R > 0$.

Así pues, queda demostrado el siguiente.

TEOREMA 3. *Si, para un cierto* $s > 1$ entero, $\varphi \in H^s(|x| < R)$, $\psi \in H^{s-1}(|x| < R)$, $f \in H^{s-1}(Q_{T,R})$ *cualquiera que sea* $R > 0$, *la solución generalizada del problema de Cauchy* (17), (2), (3) *pertenece a* $H^s(Q_{T,R})$ *para todo* $R > 0$.

Puesto que la solución generalizada del problema de Cauchy, perteneciente, para todo $R > 0$, al espacio $H^2(Q_{T,R})$, es una solución en casi todo punto del mismo problema, entonces del teorema 3 (para $s = 2$) se deduce la afirmación siguiente.

TEOREMA 4. *Si* $\varphi \in H^2(|x| < R)$, $\psi \in H^1(|x| < R)$, $f \in H^1(Q_{T,R})$ *para todo* $R > 0$, *entonces existe en* Π_T una solución en casi todo punto del problema de Cauchy (17), (2), (3).

Indiquemos que las órdenes de la suavidad de las funciones iniciales y del segundo miembro de la ecuación, que garantizan la existencia de la solución generalizada del problema de Cauchy o de la solución en casi todo punto, no dependen (teorema 2, 4) de la dimensión del espacio.

Sea $s = \left[\frac{n}{2}\right] + 3$. En virtud del teorema 4, p. 4 del párrafo anterior, la solución generalizada $u_m(x, t)$ del problema mixto (13) (siendo $k \equiv 1$, $a \equiv 0$) es la solución clásica de este problema. Por consiguiente, la solución generalizada $u(x, t)$ del problema (17), (2), (3) es la solución clásica del mismo problema.

De este modo, queda demostrado el siguiente

TEOREMA 5. *Si* $\varphi \in H^{\left[\frac{n}{2}\right]+3}(|x| < R)$, $\psi \in H^{\left[\frac{n}{2}\right]+2}(|x| < R)$, $f \in H^{\left[\frac{n}{2}\right]+2}(Q_{T,R})$ *para todo* $R > 0$, *entonces la solución clásica del problema de Cauchy* (17), (2), (3) *existe*.

A título de complemento de los teoremas 4 y 5 sobre la existencia de la solución en casi todo punto y de la solución clásica del problema de Cauchy (17), (2), (3) demostremos la siguiente afirmación.

TEOREMA 6. *Sea u una solución en casi todo punto del problema* (17), (2), (3) *en* Π_T *o la solución clásica de este problema con* $f \in L_2(Q_{T,R})$ *para todo* $R > 0$. *Entonces, para todo* $R > 0$ *y todo* t, $0 < t < \min(R, T)$, *se verifica la desigualdad*

$$E_R^{1/2}(t) \leqslant E_R^{1/2}(0) + 2\sqrt{t}\, \|f\|_{L_2(K_{R,T})}, \tag{18}$$

donde

$$E_R(t) = \int\limits_{D_{t,R-t}} (u_t^2 + |\nabla u|^2)\, dx, \tag{19}$$

$$D_{\tau,R-\tau} = \{|x| < R-\tau,\ t=\tau\},$$

$$K_{R,\tau} = \{|x| < R-t,\ 0 < t < \tau\}, \quad \tau \in (0, \min(R, T)].$$

Tomemos arbitrariamente $\tau \in (0, \min(R, T))$ e integremos en el cono truncado $K_{R,\tau}$ la igualdad (17), multiplicada por u_t

$$\int\limits_{K_{R,\tau}} (u_{tt}u_t - u_t\Delta u)\, dx\, dt = \int\limits_{K_{R,\tau}} f u_t\, dx\, dt.$$

Según la fórmula de Ostrogradski tenemos

$$\int\limits_{D_{\tau,R-\tau}} (u_t^2 + |\nabla u|^2)\, dx - \int\limits_{D_{0,R}} (\psi^2 + |\nabla\varphi|^2)\, dx +$$

$$+ \int\limits_{\Gamma_{R,\tau}} \left[(u_t^2 + |\nabla u|^2)n_0 - 2u_t \sum_{i=1}^n u_{x_i} n_i\right] dS = 2 \int\limits_{K_{R,\tau}} f u_t\, dx\, dt,$$

donde $\Gamma_{R,\tau}$ es la superficie lateral del cono $K_{R,\tau}$, es decir, $\Gamma_{R,\tau} = \{|x| = R-t,\ 0 < t < \tau\}$ y

$$(n_0, n_1, \ldots, n_n) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{x_1}{\sqrt{2}(R-t)}, \ldots, \frac{x_n}{\sqrt{2}(R-t)}\right)$$

es el vector de la normal exterior a $\Gamma_{R,\tau}$. Ya que en $\Gamma_{R,\tau}$

$$(u_t^2 + |\nabla u|^2) n_0 - 2u_t \sum_{i=1}^n u_{x_i} n_i =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{i=1}^n \left(\left(\frac{u_t x_i}{R-t}\right)^2 - 2\frac{u_t x_i}{R-t} u_{x_i} + u_{x_i}^2\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{i=1}^n \left(\frac{u_t x_i}{R-t} - u_{x_i}\right)^2 \geqslant 0,$$

entonces

$$E_R(\tau) \leqslant E_R(0) + 2 \int_{K_{R,\tau}} |f|\,|u_t|\,dx\,dt \leqslant E_R(0) +$$

$$+ 2\|f\|_{L_2(K_{R,\tau})} \Big(\int_{K_{R,\tau}} (u_t^2 + |\nabla u|^2\,dx\,dt\Big)^{1/2}. \qquad (20)$$

Dado que $2\,|ab| = 2\left|a\sqrt{2\tau}\dfrac{b}{\sqrt{2\tau}}\right| \leqslant 2\tau a^2 + \dfrac{b^2}{2\tau}$, entonces de (20) se deduce que para todo $t \in (0, \tau)$

$$E_R(t) \leqslant E_R(0) + 2\tau \|f\|^2_{L_2(K_{R,\tau})} + \frac{1}{2\tau} \int_{K_{R,\tau}} (u_t^2 + |\nabla u|^2)\,dx\,dt.$$

Integrando esta desigualdad respecto de $t \in (0, \tau)$, obtendremos

$$\int_{K_{R,\tau}} (u_t^2 + |\nabla u|^2)\,dx\,dt \leqslant \tau E_R(0) + 2\tau^2 \|f\|^2_{L_2(K_{R,\tau})} +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{K_{R,\tau}} (u_t^2 + |\nabla u|^2)\,dx\,dt,$$

de donde

$$\int_{K_{R,\tau}} (u_t^2 + |\nabla u|^2)\,dx\,dt \leqslant 2\tau E_R(0) + 4\tau^2 \|f\|^2_{L_2(K_{R,\tau})} \leqslant$$

$$\leqslant \left(2\sqrt{\tau}\,E_R^{1/2}(0) + 2\tau \|f\|_{L_2(K_{R,\tau})}\right)^2. \qquad (21)$$

La desigualdad (18) se desprende de (20) y (21). El teorema queda demostrado.

PROBLEMAS DEL CAPITULO V

Sea $u(x, t)$ $= (x_1, x_2) \in R_2$, una solución clásica del problema de Cauchy

$$u_{tt} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}, \qquad (1)$$

$$u|_{t=0} = \varphi, \quad u_t|_{t=0} = \psi$$

con las funciones iniciales terminales φ y ψ: $\varphi = \psi = 0$ para $|x|^2 = x_1^2 + x_2^2 > R_0^2$.

1. Muéstrese que la función $u(x, t)$ es analítica en el cono $\{|x| < t - R_0,\ t > R_0$.
2. Demuéstrese que existe una constante positiva C tal que para la solución $u(x, t)$ del problema (1) tiene lugar la siguiente acotación

$$|u(x, t)| \leqslant \frac{C}{\sqrt{t}\,(1 + \sqrt{|t - |x||})},$$

cualesquiera que sean $x \in R_2$ y $t \geqslant 0$.

Con ello, si $\varphi = 0$ y $\psi \geqslant 0$, $\psi \not\equiv 0$, existen tales constantes positivas C_0 y T que para cualesquiera $t \geqslant T$ y $|x| \leqslant t - R_0$

$$u(x, t) \geqslant \frac{C_0}{\sqrt{t}\,(1+\sqrt{|t-|x||})}.$$

3. Muéstrese que para todo $R > 0$ existe tal $T > 0$ que para todo $(x, t) \in \in \{|x| \leqslant R, t \geqslant T\}$ la solución $u(x, t)$ del problema (1) se representa en forma de una serie convergente

$$u(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{c_m(x)}{t^{m+1}};$$

hállense c_0 y c_1.

Demuéstrese que si para el círculo $K_0 = \{|x - x^0| < r_0\}$ (x^0 es un punto de R_2, r_0, un número positivo) y para todos los números naturales l es que $t^l u(x, t) \to 0$ uniformemente según $x \in K_0$, entonces $u = 0$.

4. Sea $\varphi \in C^2(R_2)$ y $\psi \in C^1(R_2)$ y supongamos que todas las segundas derivadas de la función φ y todas las primeras derivadas de la función ψ pertenecen a la clase $C^\alpha(R_2)$ (véase el problema 17. cap. III) para cierto $\alpha > 1/2$. Demuéstrese que en este caso existe una solución clásica del problema de Cauchy (1).

5. Sea $u(x, t)$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in R_3$, una solución (clásica) del problema de Cauchy

$$\begin{gathered} u_{tt} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}, \\ u|_{t=0} = \varphi, \quad u_t|_{t=0} = \psi \end{gathered} \tag{2}$$

con funciones iniciales φ y ψ terminales.

Muéstrese que para todo $x \in R_3$ y $t > 0$

$$|u(x, t)| \leqslant C/t,$$

donde C es una constante positiva.

6. Supóngase que la función $u(x, t)$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in R_3$, pertenece a $C^2(Q \setminus \{x^0, t^0\})$ (donde Q es un dominio del espacio de cuatro dimensiones R_4, y (x^0, t^0), un punto del dominio Q), y que satisface en $Q \setminus \{x^0, t^0\}$ la ecuación de onda (2). Demuéstrese que u pertenece a $C^2(Q)$ (es decir, u puede ser complementariamente definida en el punto (x^0, t^0) de tal modo que ella se haga dos veces continuamente diferenciable en Q).

7. Supóngase que la función $u(x, t) = v(x - nt)$, $x = (x_1, x_2, x_3)$, $n = (n_1, n_2, n_3)$ es un vector constante, pertenece a $C^2(R_4 \setminus L)$ (donde L es una recta definida por la ecuación $x - nt = 0$) y que satisface fuera de L la ecuación de onda (2). Demuéstrese que si $u(x, t) = o(1/r)$, donde r es la distancia del punto (x, t) a la recta L, entonces $u(x, t) \in C^2(R_4)$ (es decir, u puede ser complementariamente definida en L de tal modo que ella se haga continuamente diferenciable dos veces en R_4).

8. Sea $u(x, t)$ una solución clásica o generalizada en $\{t > 0\}$ del problema de Cauchy para una ecuación de onda

$$u_{tt} = \Delta u + f(x, t), \tag{3}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \tag{4}$$

y sea $u_R(x, t)$ una solución clásica o, respectivamente, generalizada del segundo problema mixto para la ecuación de onda en el cilindro $\{|x| < R + 1, t >

$>0)$, $R>0$,

$$(u_R)_{tt}=\Delta u_R+f_R,$$

$$u_R|_{t=0}=\varphi_R,\quad u_{Rt}|_{t=0}=\psi_R,\quad \frac{\partial u_R}{\partial n}\bigg|_{|x|=R+1}=0,$$

con la particularidad de que para $|x|<R$ $\varphi_R=\varphi$, $\psi_R=\psi$ y para $|x|<R$, $t<R$ $f_R=f$. Muéstrese que en cualquier cilindro $Q_T=\{|x\in D_0, 0<t<T\}$, donde D_0 es un dominio arbitrario n-dimensional y T es un número positivo arbitrario, la diferencia $u-u_R=0$, cuando R es suficientemente grande.

9. La solución del primer problema mixto para una ecuación de onda en el cilindro $Q_T=\{x\in D_0, 0<t<T\}$ se puede definir de la manera siguiente: la función $u(x, t)$ se llama solución clásica del primer problema mixto para la ecuación de onda (3), si ella pertenece a $C^2(Q_T)\cap C^1(Q_T\cup D_0)\cap C(Q_T)\cup$ $\cup\ \Gamma_T\ 0\cup\overline{D}_0)$, satisface en Q_T la ecuación (3), en D_0, las condiciones iniciales (4) y en Γ_T satisface la condición límite

$$u|_{\Gamma_T}=\chi. \tag{5}$$

Demuéstrese la unicidad de esta solución.

10. Demuéstrese la existencia y unicidad en el cilindro $Q_T=\{x\in D_0, 0<t<T\}$ de la solución generalizada del tercer problema mixto (véase p. 1, § 2) para la ecuación de onda

$$u_{tt}-\Delta u=f(x, t)$$

$$\left\{\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma(x)\,u\right\}\bigg|_{\Gamma_T}=0,$$

$$u|_{t=0}=\varphi(x),\quad u_t|_{t=0}=\psi(x)$$

($\varphi\in H^1(D_0)$, $\psi\in L_2(D_0)$, $f\in L_2(Q_T)$) en caso de una función $\sigma(x)$, continua en ∂D_0 (sin suponer que es no negativa).

11. Una función $u(x, t)$, perteneciente al espacio $H^1(Q_T)$, se llama solución generalizada del problema

$$u_{tt}=\Delta u,\quad (x, t)\in Q_T,$$

$$\left\{\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma(x)\frac{\partial u}{\partial t}\right\}\bigg|_{\Gamma_T}=0,$$

$$u|_{t=0}=\varphi(x),\quad u_t|_{t=0}=\psi(x)$$

donde $\sigma(x)\in C(\partial D_0)$, $\sigma(x)\geqslant 0$, $\varphi\in H^1(D)$, $\psi\in L_2(D)$, si ella satisface la condición inicial $u|_{t=0}=\varphi$ y la identidad integral

$$\int\limits_{Q_T}(u_tv_t-\nabla u\nabla v)\,dx\,dt=\int\limits_{\Gamma_T}\sigma uv_t\,dS\,dt+\int\limits_{D_0}\psi v\,dx+\int\limits_{\partial D_0}\sigma\varphi v\,dS$$

cualesquiera que sean v de $C^1(\overline{Q}_T)$ para las cuales $v_t\in C^1(\overline{Q}_T)$ y $v|_{t=T}=0$.

Demuéstrese la existencia y unicidad de la solución generalizada de este problema.

LITERATURA ADICIONAL PARA EL CAPITULO V

V. S. Vladímirov, Ecuaciones de la física matemática, «Naúka», 1971 (en ruso).

R. Curant, D. Hilbert, Métodos de la física matemática, vols I, II, «Gostejizdat», 1951 (en ruso).

O. A. Ladyzhénskaya, Problemas de contorno de la física matemática, «Naúka», 1973 (en ruso).
O. A. Ladyzhénskaya, Problema mixto para la ecuación hiperbólica, «Gostejizdat», 1953 (en ruso).
I. G. Petrovski, Conferencias sobre las ecuaciones en derivadas parciales, Fismatgiz, 1961 (en ruso).
I. G. Petrovski, On the diffusion of waves and lacunas for hyperbolic equations. Compendio matemático 17, (1945), 289—370.
S. L. Sóbolev, Ecuaciones de la física matemática, Fismatgiz, 1954 (en ruso)
S. L. Sóbolev, Aplicaciones del análisis funcional en la física matemática. Ediciones de la universidad estatal de Leningrado, 1950 (en ruso).
V. A. Steklov, Sobre el comportamiento asintótico de las soluciones de una ecuación diferencial, Ediciones de la Universidad de Jarcov, 1956.
A. Tijonov, A. Samarsky, Ecuaciones de la física matemática, Editorial Mir.

En este capítulo estudiaremos el problema de Cauchy y los problemas mixtos para una ecuación parabólica del tipo

$$u_t = \operatorname{div}(k(x)\nabla u(x,\ t)) + a(x)\, u(x,\ t) = f(x,\ t).$$

Aquí, $(x,\ t) = (x_1,\ \ldots,\ x_n,\ t)$ es un punto del espacio $(n+1)$-dimensional R_{n+1}, $x \in R_n$, $t \in R_1$; $\nabla v(x,\ t) = \left(\frac{\partial v}{\partial x_1},\ \ldots,\ \frac{\partial v}{\partial x_n}\right)$ y $\operatorname{div}(w_1(x,\ t),\ \ldots,\ w_n(x,\ t)) = \frac{\partial w_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial w_n}{\partial x_n}$; por $\Delta v(x,\ t)$ se comprenderá $\operatorname{div}\nabla v(x,\ t) = \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 v}{\partial x_n^2}$. Convengamos en considerar los datos de los problemas como funciones de valores reales y examinaremos sólo soluciones de valores reales de los problemas citados. Por este motivo, los espacios funcionales $C^{p,\,q}$, $H^{p,\,q}$ que serán empleados en lo sucesivo, los vamos a considerar de valores reales *).

§ 1. Propiedades de las soluciones de la ecuación de la conducción de calor. Problema de Cauchy para la ecuación de la conducción de calor

1 Propiedades de las soluciones de la ecuación de la conducción de calor. Examinemos la ecuacion de la conducción de calor

$$\mathscr{L}u \equiv u_t - \Delta u = f(x,\ t), \tag{1}$$

que es la ecuación parabólica más sencilla.

Ante todo, construyamos en el semiespacio $\{t > 0\} = \{x \in R_n,\ t > 0\}$ ciertas soluciones especiales de la ecuación homogénea de la conducción de calor

$$\mathscr{L}u \equiv u_t - \Delta u = 0. \tag{1_0}$$

*) Las definiciones de los espacios $C^{p,q}$ y $H^{p,q}$ se han dado en los p.p. 1 y 2, § 7, cap. III, respectivamente.

Examinemos primero el caso de una sola variable espacial, $n = 1$. Una función $u(x, t) = w(x^2/t)$, que sólo depende de x^2/t y que es en $\{t > 0\}$ la solución de la ecuación $u_t - u_{xx} = 0$, satisface la ecuación diferencial ordinaria

$$4zw''(z) + (2+z)w'(z) = 0.$$

La solución general de esta ecuación en el semieje $(0, \infty)$ se prefija mediante la fórmula $c_1 \int\limits_0^z e^{-\zeta/4}\zeta^{-1/2}\, d\zeta + c_2$, donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias. En este caso la función $c_1 \int\limits_0^{x^2/t} e^{-\zeta/4}\zeta^{-1/2}\, d\zeta + c_2$ será la solución de la ecuación (1_0) (para $n = 1$) en los dominios $\{x > 0,\ t > 0\}$ y $\{x < 0,\ t > 0\}$.

Hagamos $c_2 = 0$, $c_1 = \frac{1}{4\sqrt{\pi}}$ para $x > 0$, y $c_1 = -\frac{1}{4\sqrt{\pi}}$ para $x < 0$. No es difícil comprobar que la función obtenida es indefinidamente diferenciable en el semiplano $\{x \in R_1,\ t > 0\}$ y, por lo tanto, satisface en este semiplano la ecuación (1_0). Entonces, la misma ecuación será también satisfecha por cualquier derivada (respecto de x o t) de esta función, en particular, por la primera derivada respecto de x que es la función $U(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$.

Sea, ahora, $n > 1$. Para construir en este caso las soluciones buscadas de la ecuación (1_0), señalemos que si las funciones $v_i(x, t)$, $i = 1, \ldots, n$, son soluciones de (1_0), para $n = 1$, en el semiplano $\{x \in R_1,\ t > 0\}$, entonces la función $v(x, t) = v_1(x_1, t)\, v_2(x_2, t) \ldots \ldots v_n(x_n, t)$ será la solución de la ecuación (1_0) en el semiespacio $\{x \in R_n,\ t > 0\}$. Por eso, en particular, la función

$$U(x, t) = \prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-\frac{x_i^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}} = \frac{e^{-\frac{|x|^2}{4t}}}{(2\sqrt{\pi t})^n}$$

es la solución de la ecuación (1_0) en el semiespacio $\{t > 0\}$. De aquí se deduce que si (x^0, t^0) es un punto arbitrario de R_{n+1}, la función

$$U(x - x^0,\ t - t^0) = \frac{e^{-\frac{|x-x^0|^2}{4(t-t^0)}}}{(2\sqrt{\pi(t-t^0)})^n}$$

será la solución de la ecuación (1_0) en el semiespacio $\{t > t^0\} = \{x \in R_n,\ t > t^0\}$. Esta función lleva el nombre de *solución fundamental de la ecuación de la conducción de calor* con peculiaridad en el punto (x^0, t^0)).

Subrayemos las siguientes propiedades de la solución fundamental.

Si la función $U(x-x^0,\ t-t^0)$ es prolongada por cero en el semiespacio $\{t<t^0\}=\{x\in R_n,\ t<t^0\}$, entonces la función obtenida será indefinidamente diferenciable en $R_{n+1}\setminus\{x^0,\ t^0\}$.

Para todo $x^0\in R_n$, $t>t^0$

$$\int\limits_{R_n} U(x-x^0,\ t-t^0)\,dx=\frac{1}{\pi^{n/2}}\int\limits_{R_n} e^{-|\xi|^2}\,d\xi=1. \qquad (2)$$

La función $U(x-x^0,\ t-t^0)$, como función de las variables $(x^0,\ t^0)=(x_1^0,\ \ldots,\ x_n^0,\ t^0)$, es en el semiespacio $\{t^0<t\}=\{x^0\in R_n,\ t^0<t\}$ la solución de la ecuación

$$\mathcal{L}^*_{x^0,\,t^0}U(x-x^0,\ t-t^0)=-\frac{\partial U}{\partial t^0}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 U}{\partial x_i^{0\,2}} \qquad (1_0^*)$$

Examinemos la banda $\{0<t<T\}=\{x\in R_n,\ 0<t<T\}$ que está limitada por las características de la ecuación (1). Al igual que en el caso de las ecuaciones de Laplace y de onda, emplearemos las soluciones especiales construidas (solución fundamental) para dar la representación en esta banda de una función arbitraria $u(x,\ t)$, perteneciente a $C^{2,1}(0<t<T)\cap C(0\leqslant t<T)$, en términos de las funciones $\mathcal{L}u=u_t-\Delta u$ y $u(x,\ 0)$ la que constituye el valor de $u(x,\ t)$ en el plano $\{t=0\}=\{x\in R_n,\ t=0\}$. Realizando esta operación supondremos que las funciones $u(x,\ t)$ y $\mathcal{L}u(x,\ t)$ son acotadas en $\{0<t<T\}$.

Veamos las funciones $\zeta_N(x)=\zeta_N(|x|)$, $N=1,\ 2,\ \ldots$, que son indefinidamente diferenciables en R_n y que satisfacen las condiciones siguientes: $\zeta_N(x)\equiv 1$ cuando $|x|<N$, $\zeta_N(x)\equiv 0$ cuando $|x|>N+1$, y $|\zeta_N(x)|\leqslant C_0|\nabla\zeta_N|\leqslant C_0$, $|\Delta\zeta_N|\leqslant C_0$, donde la constante C_0 no depende de N.

Sea $(\xi,\ \tau)$ un punto arbitrario de la banda $\{0<t<T\}$. Puesto que las funciones $\zeta_N(x)$, $u(x,\ t)$, $N=1,2,\ \ldots$, y $U(\xi-x,\ \tau-t)$ pertenecen a $C^{2,1}(0<t<\tau)$, entonces, en virtud de (1_0^*) y la correlación

$$\mathcal{L}(u(x,\ t)\zeta_N(x))=\zeta_N\mathcal{L}u-2\nabla\zeta_N\cdot\nabla u-u\Delta\zeta_N$$

para todo $(x,t)\in\{0<t<\tau\}$ tiene lugar la igualdad

$$\begin{gathered}U(\xi-x,\tau-t)(\zeta_N(x)\mathcal{L}u(x,\ t)-2\nabla\zeta_N(x)\cdot\nabla u(x,\ t)-u(x,t)\,\Delta\zeta_N(x))=\\ =U(\xi-x,\ \tau-t)\,\mathcal{L}(u(x,\ t)\,\zeta_N(x))-u(x,\ t)\,\zeta_N(x)\times\\ \times\mathcal{L}^*_{x,t}(u(\xi-x,\quad\tau-t))=(u\zeta_N U)_t+\\ +\sum_{i=1}^{n}(u\zeta_N U_{x_i}-(u\zeta_N)_{x_i}U)_{x_i}.\end{gathered}$$

Integrémosla en el cilindro $\{|x| < N+1,\ \varepsilon < t < \tau - \varepsilon\}$ para cierto $\varepsilon \in (0, \tau/2)$. Valiéndonos de la fórmula de Ostrogradski, obtenemos

$$\int_{\varepsilon}^{\tau-\varepsilon} dt \int_{|x|<N+1} \zeta_N(x)\mathscr{L}u(x, t)\cdot U(\xi - x, \tau - t)\, dx =$$

$$= \int_{|x|<N+1} u(x, \tau-\varepsilon)\zeta_N(x) U(\xi - x, \varepsilon)\, dx -$$

$$- \int_{|x|<N+1} u(x, \varepsilon)\zeta_N(x) U(\xi - x, \tau - \varepsilon)\, dx +$$

$$+ \int_{\varepsilon}^{\tau-\varepsilon} dt \int_{N<|x|<N+1} u(x, t)\cdot\Delta\zeta_N(x)\cdot U(\xi - x, \tau - t)\, dx +$$

$$+2\int_{\varepsilon}^{\tau-\varepsilon} dt \int_{N<|x|<N+1} \nabla u(x, t)\cdot\nabla\zeta_N(x) U(\xi - x, \tau - t)\, dx =$$

$$= \int_{|x|<N+1} u(x, \tau-\varepsilon)\zeta_N(x) U(\xi - x, \varepsilon)\, dx -$$

$$- \int_{|x|<N+1} u(x, \varepsilon)\zeta_N(x) U(\xi - x, \tau - \varepsilon)\, dx -$$

$$- \int_{\varepsilon}^{\tau-\varepsilon} dt \int_{N<|x|<N+1} u(x, t)\,\Delta\zeta_N(x)\cdot U(\xi - x, \tau - t)\, dx -$$

$$-2\int_{\varepsilon}^{\tau-\varepsilon} dt \int_{N<|x|<N+1} u(x, t)\,\nabla\zeta_N(x)\cdot\nabla_x U(\xi - x, \tau - t)\, dx =$$

$$= I_{1,\varepsilon,N} + I_{2,\varepsilon,N} + I_{3,\varepsilon,N} + I_{4,\varepsilon,N}. \qquad (3)$$

Pasemos en la igualdad (3) al límite, primero para $N \to \infty$, y luego, para $\varepsilon \to +0$.

Dado que para todo $N = 1, 2, \ldots,$ y todo $(x, t) \in \{0 < t < \tau\}$ $\zeta_N(x)\,\mathscr{L}u(x, t)| \leqslant C_0 \cdot \sup\limits_{\{0<t<T\}} |\mathscr{L}u|$ ($\mathscr{L}u$ es acotada en $\{0 < t < T\}$), entonces, en virtud de (2), para todo $t \in (0, \tau)$

$$\int_{R_n} |\zeta_N(x)\,\mathscr{L}u(x, t)\,U(\xi - x, \tau - t)|\, dx \leqslant C_0 \sup_{\{0<t<T\}} |\mathscr{L}u(x, t)|.$$

Por consiguiente, según el teorema de Lebesgue tenemos

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{N\to\infty}\int_{\varepsilon}^{\tau-\varepsilon} dt \int_{|x|<N+1} \zeta_N(x)\,\mathscr{L}u(x,\ t)\cdot U(\xi-x,\quad \tau-t)\,dx=$$

$$=\int_0^{\tau} dt\int_{R_n} \mathscr{L}u(x,\ t)\cdot U(\xi-x,\ \tau-t)\,dx. \qquad (4)$$

Puesto que para todo $N=1,\ 2,\ \dots$ y todo $(x,\ t)\in\{0<t<\tau\}\times$ $\times\,|\,\zeta_N(x)\,u(x,\ t)\,|\leqslant C_0\cdot\sup\limits_{\{0<t<T\}}|\,u(x,\ t)\,|$ (u es acotada en $\{0<t<T\}$), entonces para todo $t\in(0,\ \tau)$

$$\int_{R_n} |\,\zeta_N(x)\,u(x,\ t)\cdot U(\xi-x,\ \tau-t)\,dx\leqslant C_0\sup_{\{0<t<T\}}|\,u(x,\ t)\,|,$$

de donde

$$\lim_{N\to\infty}\int_{|x|<N+1}\zeta_N(x)\,u(x,\ \tau-\varepsilon)\,U(\xi-x,\ \varepsilon)\,dx=$$

$$=\int_{R_n} u(x,\ \tau-\varepsilon)\,U(\xi-x,\ \varepsilon)\,dx$$

y

$$\lim_{N\to\infty}\int_{|x|<N+1}\zeta_N(x)\,u(x,\ \varepsilon)\,U(\xi-x,\ \tau-t)\,dx=$$

$$=\int_{R_n} u(x,\ \varepsilon)\,U(\xi-x,\ \tau-\varepsilon)\,dx.$$

Mas, la función $u(x,\ t)$ es continua y acotada en $\{0\leqslant t\leqslant\tau\}$, por esta razón

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{N\to\infty} I_{1,\,\varepsilon,\,N}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{R_n} u(x,\ \tau-\varepsilon)\,U(\xi-x,\ \varepsilon)\,dx=$$

$$=\frac{1}{(\pi)^{n/2}}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{R_n} u(\xi+2\sqrt{\varepsilon}\,\eta,\ \tau-\varepsilon)\,e^{-|\eta|^2}\,d\eta=$$

$$=u(\xi,\ \tau)\frac{1}{(\pi)^{n/2}}\int_{R_n} e^{-|\eta|^2}\,d\eta=u(\xi,\ \tau) \qquad (5)$$

y

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{N\to\infty} I_{2,\,\varepsilon,\,N}=\int_{R_n} u(x,\ 0)\,U(\xi-x,\ \tau)\,dx. \qquad (6)$$

Puesto que para todo $N = 1, 2, \ldots$ y todo $(x, t) \in \{0 < t < \tau\}$ $|u(x, t)\Delta\zeta_N(x)| \leqslant C_0 \sup\limits_{\{0<t<T\}} |u(x, t)|$, entonces, para todo $t \in (0, \tau)$

$$\int\limits_{R_n} |u(x, t)\Delta\zeta_N(x)\cdot U(\xi - x, \tau - t)|\, dx \leqslant C_0 \sup\limits_{\{0<t<T\}} |u|.$$

Por consiguiente

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{N\to\infty} |I_{3,\varepsilon,N}| \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{\varepsilon\to\infty}\lim_{N\to\infty} \int\limits_{\varepsilon}^{\tau-\varepsilon} dt \int\limits_{N<|x|<N+1} |u(x, t)\Delta\zeta_N(x)\cdot U(\xi - x, \tau - t)|\, dx \leqslant$$

$$\leqslant C_0 \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\varepsilon}^{\tau-\varepsilon} dt \lim_{N\to\infty} \int\limits_{N<|x|<N+1} |u(x, t)|\, U(\xi - x, \tau - t)\, dx = 0. \quad (7)$$

Examinemos, por fin, en (3) el sumando $I_{4,\varepsilon,N}$. Puesto que para todo $(x, t) \in \{0 < t < \tau\}$ y todo $N = 1, 2, \ldots$ $|\nabla\zeta_N \cdot u| \leqslant C_0 \sup\limits_{\{0<t<T\}} |u(x, t)|$ entonces para cualquier $t \in (0, \tau)$

$$\int\limits_{R_n} |u(x, t)\nabla\zeta_N(x)\cdot\nabla_x U(\xi - x, \tau - t)|\, dx \leqslant C_0 \int\limits_{R_n} |u(x, t)|\, |\nabla_x U|\, dx \leqslant$$

$$\leqslant C_0 \sup\limits_{\{0<t<T\}} |u| \int\limits_{R_n} \frac{|x-\xi|\, e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4(\tau-t)}}}{2(\tau - t)\left(2\sqrt{\pi(\tau - t)}\right)^n}\, dx =$$

$$= \frac{C_0 \sup|u|}{\pi^{n/2}\sqrt{\tau - t}} \int\limits_{R_n} |\eta|\, e^{-|\eta|^2}\, d\eta = \frac{C_1}{\sqrt{\tau - t}},$$

donde C_1 es una constante que no depende de N. Por esto,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{N\to\infty} I_{4,\varepsilon,N} = 0. \quad (8)$$

De las correlaciones (3)—(8) se infiere la representación buscada de la función u.

De este modo, resulta válida la siguiente afirmación.

Si la función $u(x, t)$ pertenece a $C^{2,1}(0 < t < T) \cap C(0 \leqslant t < T)$ y es acotada en $\{0 < t < T\}$, mientras que la función $\mathscr{L}u$ es también acotada en $\{0 < t < T\}$, entonces para cualquier punto (x, t) de $\{0 < t < T\}$ tiene lugar la siguiente igualdad

$$u(x, t) = \int\limits_{R_n} u(\xi, 0)\, U(x - \xi, t)\, d\xi +$$

$$+ \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{R_n} \mathscr{L}u(\xi, \tau)\, U(x - \xi, t - \tau)\, d\xi. \quad (9)$$

Empleando la representación (9), establezcamos varias propiedades de las soluciones de la ecuación de la conducción de calor.

TEOREMA 1. *Si la función $u(x, t)$ pertenece a $C^{2,1}(Q)$ y $\mathscr{L}u = u_t - \Delta u = 0$ en Q, donde a es un dominio del espacio $(n+1)$-dimensional R_{n+1}, entonces $u(x, t) \in C^\infty(Q)$, y la función $u(x, t^0)$, siendo función de las variables $x_1, \ldots, x_n$, es analítica en $Q \cap \{t = t^0\}$, cualquiera que sea t^0.*

Sea (x^0, t^0) un punto arbitrario de Q. Vamos a suponer que $t^0 > 0$ (lo que siempre se puede lograr trasladando el origen de coordenadas). Tomemos tal $\delta = \delta(x^0, t^0) > 0$ que el cilindro

$Q_{x^0,\, t^0,\, 2\delta} = \{|x - x^0| < 2\delta,\ |t - t^0| < 2\delta\} \Subset Q \cap \{t > 0\}$, y sea $\zeta(x, t)$

una función indefinidamente diferenciable en R_{n+1} que es igual a la unidad en $Q_{x^0,\, t^0,\, \delta} = \{|x - x^0| < \delta,\ |t - t^0| < \delta\}$ y es nula fuera de $Q_{x^0,\, t^0,\, 2\delta}$. En estas circunstancias, la función $\tilde{u}(x, t)$, igual a $u(x, t)\,\zeta(x, t)$ en $Q_{x^0,\, t^0,\, 2\delta}$ y nula fuera de $Q_{x^0,\, t^0,\, 2\delta}$, pertenece a $C^{2,1}(0 < t < T) \cap C(0 \leqslant t \leqslant T)$ para $T > t^0 + 2\delta$, es acotada en $\{0 < t < T\}$, coincide en $Q_{x^0,\, t^0,\, \delta}$ con la función $u(x, t)$ y $\tilde{u}(x, 0) = 0$; además, la función $\mathscr{L}(\tilde{u}(x, t))$ es acotada en $\{0 < t < T\}$ y $\mathscr{L}(\tilde{u}) = 0$ cuando $(x, t) \in Q_{x^0,\, t^0,\, \delta}$ y cuando $(x, t) \in \{0 < t < T\} \setminus Q_{x^0,\, t^0,\, 2\delta}$. En vista de (9), para todos los puntos $(x, t) \in Q_{x^0,\, t^0,\, \delta}$ tenemos

$$u(x, t) = \int_0^t d\tau \int_{R_n} U(x - \xi, t - \tau)\, \mathscr{L}(\tilde{u}(\xi, \tau))\, d\xi =$$

$$= \int_{t^0 - 2\delta}^{t^0 - \delta} d\tau \int_{|x^0 - \xi| < 2\delta} \frac{g(\xi, \tau)}{(t - \tau)^{n/2}}\, e^{-\frac{|x - \xi|^2}{4(t - \tau)}}\, d\xi +$$

$$+ \int_{t^0 - \delta}^{t} d\tau \int_{\delta < |x^0 - \xi| < 2\delta} \frac{g(\xi, \tau)}{(t - \tau)^{n/2}}\, e^{-\frac{|x - \xi|^2}{4(t - \tau)}}\, d\xi,$$

donde $g(\xi, \tau) = \dfrac{1}{(2\sqrt{\pi})^n}\, \mathscr{L}(\tilde{u}(\xi, \tau))$.

De esta representación se deduce inmediatamente que $u(x, t) \in C^\infty(Q_{x^0,\, t^0,\, \delta})$. De esta manera, la primera afirmación del teorema ((x^0, t^0) es un punto arbitrario del dominio Q) queda demostrada.

Mostremos ahora que la función

$$u(x, t^0) = \int_{t^0-2\delta}^{t^0-\delta} d\tau \int_{|x^0-\xi|<2\delta} \frac{g(\xi, \tau)}{(t^0-\tau)^{n/2}} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4(t^0-\tau)}} d\xi +$$

$$+ \int_{t^0-\delta}^{t^0} d\tau \int_{\delta<|x^0-\xi|<2\delta} \frac{g(\xi, \tau)}{(t^0-\tau)^{n/2}} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4(t^0-\tau)}} d\xi =$$

$$= \int_D \frac{g(\xi, \tau)}{(t^0-\tau)^{n/2}} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4(t^0-\tau)}} d\xi\, d\tau, \qquad (10)$$

donde el dominio $D = \{|x^0 - \xi| < 2\delta,\ t^0 - 2\delta < \tau < t^0\} \setminus \{|\xi - x^0| \leqslant \delta,\ t^0 - \delta \leqslant \tau \leqslant t^0\}$ es analítico en cierto entorno del punto x^0. Con este objeto examinemos en el espacio $(3n + 1)$-dimensional (real) R_{3n+1} de variables x, y, ξ, τ ($x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$) un dominio $D_1 = \{|x_1 - x^0| < \delta/4,\ |y| < \delta/4,\ (\xi, \tau) \in D\}$ y una función de valores complejos, dada en D_1

$$G(x, y, \xi, \tau) = \frac{g(\xi, \tau)}{(t^0-\tau)^{n/2}} e^{-\frac{1}{4(t^0-\tau)} \sum_{k=1}^{n} (x_k+iy_k-\xi_k)^2} =$$

$$= \frac{g(\xi, \tau)}{(t^0-\tau)^{n/2}} e^{\frac{|y|^2-|x-\xi|^2}{4(t^0-\tau)}} e^{-i\frac{(x-\xi,\, y)}{4(t^0-\tau)}}.$$

Indiquemos que cuando $y = 0$, la función G coincide (para $|x - x^0| < \delta/4$, $(\xi, \tau) \in D$) con el integrando en (10).

La función G y sus derivadas G_{x_k} y G_{y_k}, $k = 1, \ldots, n$ pertenecen, evidentemente, a $C(\overline{D}_1 \setminus \{\tau = t^0\})$ (aquí. $\{\tau = t^0\} = \{x \in R_n,\ y \in R_n,\ \xi \in R_n,\ \tau = t^0\}$). Examinemos las funciones G, G_{x_k}, G_{y_k}, $k = 1, \ldots, n$, en el subdominio $D_1' = \{|x - x^0| < \delta/4,\ |y| < \delta/4,\ \delta < |\xi - x^0| < 2\delta,\ t^0 - \delta < \tau < t^0\}$ del dominio D_1. Puesto que en D_1' $|\xi - x| = |\xi - x^0 + x^0 - x| \leqslant |\xi - x^0| + |x^0 - x| \leqslant 9\delta/4$, $|\xi - x| \geqslant |\xi - x^0| - |x^0 - x| \geqslant 3\delta/4$ y $|y| < \delta/4$, entonces, para todos los puntos (x, y, ξ, τ) de D_1'

$$|G| \leqslant \frac{g_0}{(t^0-\tau)^{n/2}} e^{-\frac{\delta^2}{8(t^0-\tau)}},$$

$$|G_{x_k}| = |G_{y_k}| \leqslant g_0 \frac{|x-\xi|+|y|}{2(t^0-\tau)^{\frac{n}{2}+1}} e^{\frac{|y|^2-|x-\xi|^2}{4(t^0-\tau)}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{5g_0\delta}{4(t^0-\tau)^{\frac{n}{2}+1}} e^{-\frac{\delta^2}{8(t^0-\tau)}}, \qquad k=1, \ldots, n$$

donde $g_0 = \max\limits_{(\xi, \tau) \in \bar{D}} |g(\xi, \tau)|$.

Por consiguiente, las funciones G, G_{x_k}, G_{y_k}, $k=1, 2, \ldots, n$, pertenecen a $C(\bar{D}_1')$ ($G(x, y, \xi, t^0) = G_{x_k}(x, y, \xi, t^0) = C_{y_k}(x, y, \xi, t^0) = 0$, $k=1, \ldots, n$) y, consecuentemente, pertenecen a $C(\bar{D}_1)$.

Además, como la función G es analítica según cada una de las variables $x_1 + iy_1, \ldots, x_n + iy_n$ (para cualquier $\tau < t^0$), entonces, para todo k, $k=1, \ldots, n$, satisface en D_1 la condición de Cauchy—Riemann

$$(\mathrm{Re}\, G)_{x_k} = (\mathrm{Im}\, G)_{y_k}, \qquad (\mathrm{Re}\, G)_{y_k} = -(\mathrm{Im}\, G)_{x_k}.$$

Así pues la función de valores complejos

$$F(x, y) =$$

$$= \int_D G(x, y, \xi, \tau)\, d\xi\, d\tau = \int_D \frac{g(\xi, \tau)}{(t^0-\tau)^{n/2}} e^{-\frac{1}{4(t^0-\tau)} \sum\limits_{h=1}^{n} (x_h + iy_h - \xi_h)^2} d\xi\, d\tau$$

es continuamente diferenciable en el dominio $V = \{|x - x^0| < \delta/4, |y| < \delta/4$ del espacio R_{2n}, con la particularidad de que todo $(x, y) \in V$ y para cualquier k, $k=1, \ldots, n$,

$$(\mathrm{Re}\, F)_{x_k} = (\mathrm{Im}\, F)_{y_k}, \qquad (\mathrm{Re}\, F)_{y_k} = -(\mathrm{Im}\, F)_{x_k}.$$

Por eso, para todo punto (x^1, y^1) del dominio V la función $F(x_1^1, \ldots, x_{k-1}^1, x_k, x_{k+1}^1, \ldots, x_n^1, y_1^1, \ldots, y_{k-1}^1, y_k, y_{k+1}^1, \ldots, y_n^1)$ de dos variables (reales) x_k e y_k es función analítica de la variable compleja $x_k + iy_k$ en el punto $x_k^1 + iy_k^1$, $k=1, \ldots, n$. Es fácil mostrar*) que en este caso $F(x, y)$ es una función analítica de n variables complejas $x_1 + iy_1, \ldots, x_n + iy_n$ en el dominio V. Y como, para $|x - x^0| < \delta$ la función $F(x, 0)$ coincide con la función que estudiamos $u(x, t^0)$, la afirmación del teorema queda demostrada.

OBSERVACIÓN. Una función $u(x, t)$ que en cierto dominio Q del espacio R_{n+1} satisface a la ecuación homogénea de la conducción de calor, no tiene que ser obligatoriamente analítica respecto de t.

---

*) Véanse, por ejemplo, *V. S. Vladimirov*, «Métodos de la teoría de funciones de varias variables complejas», «Naúka», 1964, pág. 42, o *B. V. Shabat*, «Introducción al análisis complejo», «Naúka», 1969, pág. 273 (en ruso).

Por ejemplo, la función $u(x, t)$, igual a $t^{-n/2}e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$ para $|x| > 1$, $t > 0$, y nula para $|x| > 1$, $t \leqslant 0$, satisface en $\{|x| > 1, -\infty < t < \infty\}$ la ecuación (1_0), sin embargo no es analítica respecto de t (pertenece, por supuesto, a $C^\infty(|x| > 1, -\infty < t < \infty)$).

2. Problema de Cauchy para la ecuación de la conducción de calor. Una función $u(x, t)$, perteneciente al espacio $C^{2,1}(0 < t < T) \cap C(0 \leqslant t < T)$, se denomina *solución (clásica) del problema de Cauchy para la ecuación* (1), *si en* $\{0 < t < T\}$ ella satisface la ecuación (1), y para $t = 0$ satisface también la condición unicial

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \tag{11}$$

donde $f(x, t)$ y $\varphi(x)$ son funciones dadas.

Demostremos, ante todo, el siguiente teorema de unicidad.

TEOREMA 2. *El problema de Cauchy* (1), (11) *no puede tener más de una solución clásica acotada en* $\{0 < t < T\}$.

Supongamos que $u_1(x, t)$ y $u_2(x, t)$ son dos soluciones clásicas del problema (1), (11) acotadas en $\{0 < t < T\}$. En este caso, la función $u = u_1 - u_2$ será la solución, acotada en $\{0 < t < T\}$, de la ecuación homogénea de la conducción de calor (1_0) que satisface a condición inicial homogénea

$$u|_{t=0} = 0 \tag{11_0}$$

Por consiguiente, para la función u en la banda $\{0 < t < T\}$ es válida la representación (9), obtenida en el punto precedente, de la cual se deduce inmediatamente que $u \equiv 0$ en $\{0 < t < T\}$. El teorema está demostrado.

Designemos mediante $M_\sigma = M_\sigma(T)$, $\sigma \geqslant 0$ el conjunto de todas las funciones $u(x, t)$ dadas en $\{0 \leqslant t < T\}$, con la particularidad de que para cada una de estas funciones existen unas constantes positivas A y a (dependientes de la propia función) tales que

$$|u(x, t)| \leqslant Ae^{a|x|^\sigma} \quad \text{para todo} \quad (x, t) \in \{0 \leqslant t < T\}.$$

Está claro que el conjunto M_σ es un espacio lineal cualquiera que sea $\sigma \geqslant 0$, siendo, para $\sigma \leqslant \sigma'$, $M_\sigma \subset M_{\sigma'}$; M_0 es el conjunto de todas las finciones acotadas en $\{0 \leqslant t < T\}$, y M_2 es el conjunto de todas las funciones para cada una de las cuales existen unas constantes positivas A y a tales que

$$|u(x, t)| \leqslant Ae^{a|x|^2} \tag{12}$$

para todos los $(x, t) \in \{0 \leqslant t < T\}$.

En el teorema se establece la unicidad de la solución del problema de Cauchy (1), (11) en el conjunto de funciones acotadas M_0. La unicidad de solución tiene lugar, en realidad, también en M_2 y, consecuentemente, en cualquier M_σ, $0 \leqslant \sigma \leqslant 2$. A saber, tiene lugar la siguiente afirmación que hace el teorema 2 más general.

TEOREMA 2'. *El problema de Cauchy* (1), (11) *no puede tener más de una solución perteneciente a* M_2*).

Para demostrar el teorema 2 necesitaremos en la siguiente afirmación auxiliar.

LEMA 1. *Supongamos que para un cierto* $T>0$ *la función* $u(x, t)$ *es en la banda* $\{0<t<T\}$ *una solución del problema* (1_0), (11_0) *y satisface la igualdad* (12) *con unas constantes* $a>0$ y $A>0$. *Entonces,* $u=0$ *en la banda* $\{0<t<T_1\}$ *donde* $T_1 = \min\{T, 1/5a\}$.

Tomemos $\varepsilon>0$ arbitrario y examinemos en $\{0<t<T_1\}$ dos funciones

$$w_{\pm}(x, t) = \pm u(x, t) + \varepsilon\left(t + \frac{1}{(T_1-t)^{n/2}} e^{\frac{|x|^2}{4(T_1-t)}}\right).$$

Estas funciones pertenecen, evidentemente, a $C^{2,1}(0<t<T_1)\cap$ $\cap C(0\leqslant t<T_1)$. Puesto que $u|_{t=0}=0$, para todo $x\in R_n$

$$w_{+}(x, 0) = \varepsilon T_1^{-n/2} e^{\frac{|x|^2}{4T_1}} > 0, \tag{13}$$

ya que $\mathcal{L}u=0$ en $\{0<t<T_1\}$, para todos los puntos $(x, t)\in$ $\in\{0<t<T_1\}$ resulta

$$\mathcal{L}(w_{\pm}) = \pm\mathcal{L}_2(u) + \varepsilon\mathcal{L}(t + (T_1-t)^{-n/2} e^{\frac{|x|^2}{4(T_1-t)}}) = \varepsilon > 0 \tag{14}$$

Sea (x^0, t^0) un punto arbitrario de la banda $\{0<t<T_1\}$ Elijamos $R>0$ tan grande que el punto (x^0, t^0) pertenezca al cilindro $\{|x|<R,\ 0<t<T_1\}$ y que las funciones $w_{\pm}(x, t)$ en la superficie lateral $\{|x|=R,\ 0<t<T_1\}$ de este cilindro sean positivas

$$w_{\pm}(x, t)|_{|x|=R} > 0, \quad 0<t<T_1 \tag{15}$$

(lo último siempre se puede lograr, puesto que $w_{\pm}|_{|x|=R} =$
$= \pm u|_{|x|=R} + \varepsilon(t + (T_1-t)^{-n/2} e^{\frac{R^2}{4(T_1-t)}}) \geqslant -Ae^{aR^2} + \varepsilon T_1^{-n/2} e^{\frac{R^2}{4T_1}} \geqslant$
$\geqslant -Ae^{aR^2} + \varepsilon(5a)^{\frac{n}{2}} e^{\frac{5aR^2}{4}} \to +\infty$ cuando $R\to+\infty$).

Demostremos ahora que si una función $w(x, t)$ pertenece a $C^{2,1}(\{|x|<R,\ 0<t<T_1\})\cap C(\{|x|\leqslant R,\ 0\leqslant t<T_1\})$ y satisface las condiciones

$$w(x, 0)\geqslant 0 \text{ cuando } |x|\leqslant R, \tag{13'}$$

$$\mathcal{L}w(x, t)>0 \quad \text{en} \quad \{|x|<R,\ 0<t<T_1\} \tag{14'}$$

y

$$w|_{|x|=R}\geqslant 0 \quad \text{para} \quad 0\leqslant t<T_1, \tag{15'}$$

*) Se puede mostrar que, siendo $\sigma>2$ cualquiera, la solución del problema (1), (11), en el conjunto M_σ no es la única.

entonces

$$w(x, t) \geqslant 0 \quad \text{para todo} \quad (x, t) \in \{|x| < R,\ 0 < t < T_1\}. \quad (16')$$

Supongamos, al contrario, que en $\{|x| < R,\ 0 < t < T_1\}$ existe un punto (x', t') tal que $w(x', t') < 0$. Designemos con (x'', t'') un punto de $\{|x| \leqslant R,\ 0 \leqslant t \leqslant t'\}$, donde la función $w(x, t)$ ($w(x, t) \in C(\{|x| \leqslant R,\ 0 \leqslant t \leqslant t'\})$) alcanza su mínimo, es decir,

$$w(x'', t'') = \min_{\{|x| \leqslant R,\ 0 \leqslant t \leqslant t'\}} w(x, t) \leqslant w(x', t') < 0.$$

En virtud de (13') y (15') $(x'', t'') \in \{|x| < R,\ 0 < t \leqslant t'\}$. Si $(x'', t'') \in \{|x| < R,\ 0 < t < t'\}$, entonces $\frac{\partial w(x'', t'')}{\partial t} = 0$ y $\frac{\partial^2 w(x'', t'')}{\partial x_i^2} \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, n$, de donde se infiere que $\mathscr{L}w(x'', t'') \leqslant 0$, lo que contradice a (14'). Si $(x'', t'') \in \{|x| < R,\ t = t'\}$, $\frac{\partial w(x'', t'')}{\partial t} \leqslant 0$ y $\frac{\partial^2 w(x'', t'')}{\partial x_i^2} \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, n$, de donde se infiere que $\mathscr{L}w(x'', t'') \leqslant 0$, lo que de nuevo contradice a (14'). De este modo queda demostrada la desigualdad (16').

Puesto que las funciones $w \pm (x, t)$ satisfacen, en virtud de (13)—(15), las condiciones (13')—(15'), para todo $(x, t) \in \{|x| < R,\ 0 < t < T_1\}$ tienen lugar las desigualdades $w \pm (x, t) \geqslant 0$, de donde proviene que $w \pm (x^0, t^0) \geqslant 0$, es decir,

$$|u(x^0, t^0)| \leqslant \varepsilon \left(t_0 + \frac{1}{(T_1 - t^0)^{n/2}} e^{\frac{|x^0|^2}{4(T_1 - t^0)}}\right).$$

Por ser arbitrarios $\varepsilon > 0$ y el punto (x^0, t^0), de la última desigualdad se deduce que $u(x, t) \equiv 0$ en $\{0 < t < T_1\}$. El lema está demostrado.

DEMOSTREMOS AHORA EL TEOREMA 2. Sean $u_1(x, t)$ y $u_2(x, t)$ dos soluciones en $\{0 < t < T\}$ del problema (1), (11), pertenecientes a M_2. Entonces, su diferencia $u = u_1 - u_2$ es en $\{0 < t < T\}$ la solución del problema (1_0), (11_0) y satisface para todo $(x, t) \in \{0 \leqslant t < T\}$, la desigualdad (12) con ciertas constantes $A > 0$ y $a > 0$. En vista del lema 1, $u(x, t) = 0$ en $\{0 < t < T_1\}$, donde $T_1 = \min\left(T, \frac{1}{5a}\right)$. Si $T_1 = T$, la afirmación del teorema queda demostrada.

Sea $T_1 = \frac{1}{5a} < T$. En este caso, como la función $u(x, t)$ es continua en $\{0 < t < T\}$, $u\Big|_{t=\frac{1}{5a}} = 0$. Por eso, la función $v(x, t) = u\left(x, t + \frac{1}{5a}\right)$ es en la banda $\left\{0 < t < T - \frac{1}{5a}\right\}$ la solución del problema (1_0), (11_0) y satisface en esta banda la desigualdad (12).

Conforme al lema 1, $v(x, t)=0$ en $\{0<t<T_2\}$, donde $T_2=$ $=\min\left\{T-\frac{1}{5a}, \frac{1}{5a}\right\}$, de donde se desprende que $u(x, t)=0$ en $\left\{0<t<T_2+\frac{1}{5a}\right\}$. Si $T_2+\frac{1}{5a}<T$ $\left(\text{en este caso, } T_2=\frac{1}{5a}\right)$, entonces, repitiendo los mismos razonamientos, llegamos a que $u(x, t)=0$ en $\left\{0<t<2\cdot\frac{1}{5a}+T_3\right\}$, donde $T_3=\min\left(T-\frac{2}{5a}, \frac{1}{5a}\right)$, etc. Realizados un número finito de pasos, obtenemos que $u=0$ en $\{0<t<T\}$. El teorema queda demostrado.

Pasemos ahora a la demostración del teorema de existencia de la solución del problema de Cauchy (1), (11). Del punto anterior se deduce que si la solución, acotada en $\{0<t<T\}$, del problema (1), (11) con una función $f(x, t)$ acotada en $\{0<t<T\}$ existe, ella tiene la forma

$$u(x, t)=\int_{R_n} U(x-\xi, t)\,\varphi(\xi)\,d\xi+\int_0^t\int_{R_n} U(x-\xi, t-\tau)\,f(\xi, \tau)\,d\xi\,d\tau. \quad (17)$$

Por eso, la demostración de la existencia de la solución se reduce, naturalmente, a la búsqueda de aquellas condiciones para las funciones φ y f, en las cuales la función $u(x, t)$, prefijada mediante la fórmula (17), es la solución clásica del problema (1), (11).

Designemos con $B(R_n)$, y $B(0<t<T)$ los espacios de Banach de las funciones, continuas y acotadas en R_n, o, respectivamente, en la banda $\{0<t<T\}$, cuya norma tiene por expresión $\|\varphi\|_{B(R_n)}=\sup\limits_{x\in R_n}|\varphi(x)|$ y $\|f\|_{B(0<t<T)}=\sup\limits_{(x, t)\in\{0<t<T\}}|f(x, t)|$.

TEOREMA 3. *Si $\varphi(x)$ pertenece a $B(R_n)$ y las funciones $f(x, t)$ y $f_{x_i}(x, t)$, $i=1, \ldots, n$, pertenecen a $B(0<t<T)$, entonces existe la solución clásica $u(x, t)$ del problema* (1), (11) *que pertenece a $B(0<$ $<t<T)$ y que se define por la fórmula* (17); *con ello,*

$$\|u\|_{B(0<t<T)}\leqslant\|\varphi\|_{B(R_n)}+T\|f\|_{B(0<t<T)}. \quad (18)$$

El teorema 3 se pone de manifiesto inmediatamente de las dos afirmaciones siguientes.

LEMA 2. *Cuando $\varphi\in B(R_n)$, la función*

$$u_1(x, t)=\int_{R_n} U(x-\xi, t)\,\varphi(\xi)\,d\xi \quad (19)$$

es la solución clásica del problema de Cauchy (1_0), (11) *en el semiespacio $\{t>0\}$; además, para todo $x\in R_n$, $t>0$, tienen lugar las desigualdades*

$$\inf_{x\in R_n}\varphi(x)\leqslant u_1(x, t)\leqslant\sup_{x\in R_n}\varphi(x). \quad (20)$$

LEMA 3. *Si f y f_{x_i}, $i = 1, \ldots, n$ pertenecen a B $(0 < t < T)$, la función*

$$u_2(x, t) = \int_0^t d\tau \int_{R_n} U(x-\xi, t-\tau) f(\xi, \tau)\, d\xi, \quad (x, t) \in \{0 < t < T\}, \tag{21}$$

pertenece a B $(0 < t < T)$ y es la solución clásica del problema de Cauchy (1), (11_0) *en la banda* $\{0 < t < T\}$: *en este caso*

$$\| u_2 \|_{B(0<t<T)} \leqslant T \| f \|_{B(0<t<T)}. \tag{22}$$

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA 2. Para demostrar el lema 2, es suficiente establecer las siguientes propiedades de la función $u_1(x, t)$:

a) $u_1 \in C^{2,1}(t > 0)$ y $\mathscr{L}u_1 = 0$ en $\{t > 0\}$,

b) para la función u_1 se verifican las desigualdades (20),

c) la función u_1 pertenece al espacio $C(t \geqslant 0)$ y satisface la condición inicial (11).

Tomemos los números arbitrarios δ y T_1, $0 < \delta < T_1$. Puesto que para todo $x \in R_n$, $\xi \in R_n$, $t \in [\delta, T_1]$ cualesquiera que sean $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, n$, y $\beta \geqslant 0$

$$\left| \frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta} D_x^\alpha U(x-\xi, t) \right| \leqslant C_{\alpha\beta} (1 + |\xi - x|)^{|\alpha|+2\beta} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4T_1}},$$

donde $C_{\alpha\beta} = C_{\alpha\beta}(\delta)$ son ciertas constantes positivas, entonces, la función $u_1(x, t) \in C^\infty(\delta < t < T_1)$, con la particularidad de que

$$\frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta} D_x^\alpha u_1(x, t) = \int_{R_n} \frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta} D_x^\alpha U(x-\xi, t) \cdot \varphi(\xi)\, d\xi.$$

Ya que la función $U(x - \xi, t)$ satisface en la banda $\{\delta < t < T_1\}$ (según (x, t)) la ecuación (1_0), entonces la ecuación (1_0) será satisfecha en dicha banda también por la función $u_1(x, t)$. Por consiguiente, por ser arbitrarios los números $\delta > 0$ y $T_1 > \delta$, la función $u_1(x, t)$ posee la propiedad a).

Puesto que la función U es no negativa, entonces, de acuerdo con (2), para todo $x \in R_n$ y $t > 0$ tenemos las desigualdades

$$u_1(x, t) \leqslant \int_{R_n} U(x-\xi, t) (\sup_{\xi \in R_n} \varphi(\xi))\, d\xi = \sup_{x \in R_n} \varphi(x),$$

$$u_1(x, t) \geqslant \int_{R_n} U(x-\xi, t) (\inf_{\xi \in R_n} \varphi(\xi))\, d\xi = \inf_{x \in R_n} \varphi(x).$$

De estemodo queda demostrada la propriedad b).

Pasemos a la demostración de la propiedad c). Tomemos un punto arbitrario $x^0 \in R_n$ y mostremos que $\lim\limits_{\substack{(x,\, t) \to (x^0,\, 0) \\ (x,\, t) \in \{t > 0\}}} u_1(x, t) = \varphi(x^0)$. En vista de (2), para cualesquiera $(x, t) \in \{t > 0\}$ y para todo $\delta > 0$ tenemos

$$u_1(x, t) - \varphi(x^0) = \int_{R_n} U(x-\xi, t)(\varphi(\xi) - \varphi(x^0))\,d\xi =$$

$$= \int_{|\xi - x^0| \leqslant \delta} U(x-\xi, t)(\varphi(\xi) - \varphi(x^0))\,d\xi +$$

$$+ \int_{|\xi - x^0| > \delta} U(x-\xi, t)(\varphi(\xi) - \varphi(x^0))\,d\xi = I_{1,\delta} + I_{2\delta}. \quad (23)$$

Por ser φ continua en el punto x^0, según cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ (tomémoslo en la igualdad (23)) tal que $|\varphi(\xi) - \varphi(x^0)| < \varepsilon/2$, siempre que $|\xi - x^0| < \delta$. Por esto,

$$|I_{1,\delta}| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \int_{|x^0 - \xi| \leqslant \delta} U(x-\xi, t)\,d\xi \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \int_{R_n} U(x-\xi, t)\,d\xi = \varepsilon/2. \quad (24)$$

Sea $|x - x^0| < \delta/2$; entonces, para $|\xi - x^0| > \delta$ tenemos $|x - \xi| = |x - x^0 + x^0 - \xi| \geqslant |x^0 - \xi| - |x - x^0| > \delta - \delta/2 = \delta/2$. Por eso

$$|I_{2,\delta}| \leqslant \int_{|x^0 - \xi| > \delta} \frac{e^{-\frac{|x-\xi|^2}{8t}} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{8t}}}{(2\sqrt{\pi t})^n} (|\varphi(\xi)| + |\varphi(x^0)|)\,d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2\|\varphi\|_{B(R_n)}}{(2\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{\delta^2}{32t}} \int_{|x^0 - \xi| > \delta} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{8t}}\,d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2\|\varphi\|_{B(R_n)}}{(2\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{\delta^2}{32t}} \int_{R_n} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{8t}}\,d\xi = \text{const}\, e^{-\frac{\delta^2}{32t}} \leqslant \varepsilon/2 \quad (25)$$

siempre que $t \in (0, \delta_0)$ para δ_0 lo suficientemente pequeño. Así pues, de (23)—(25) obtenemos que para todos los puntos (x, t) del semiespacio $\{t > 0\}$, para los cuales $|x - x^0|^2 + t^2 < \min(\delta_0^2, \delta^2/4)$, $|u_1(x, t) - \varphi(x^0)| < \varepsilon$. El lema está demostrado.

DEMOSTRACION DEL LEMA 3. Representemos la función $u_2(x, t)$ (véase (21)) en la forma

$$u_2(x, t) = \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_0^t d\tau \int_{R_n} e^{-|\xi|^2} f(x + 2\xi\sqrt{t-\tau}, \tau)\,d\xi, \quad (26)$$

$$(x, t) \in \{0 < t < T\}.$$

Para demostrar el lema es suficiente comprobar que

a) $u_2(x, t) \in C(0 \leqslant t - T)$, $u_2(x, 0) = 0$,

b) tiene lugar la desigualdad (22),

c) $u_2(x, t) \in C^{2,1}(0 < t < T)$ y $\mathcal{L}u_2 = f$ en $\{0 < t < T\}$.

Dado que la función $f(x, t)$ es acotada en $\{0 < t < T\}$, entonces

$$|e^{-|\xi|^2}f(x+2\xi\sqrt{t-\tau},\ \tau)| \leqslant e^{-|\xi|^2}\|f\|_{B(0<t<T)},$$

y, por tanto (f es continua), la función

$$g(x, t, \tau) = \frac{1}{\pi^{n/2}} \int\limits_{R_n} e^{-|\xi|^2} f(x+2\xi\sqrt{t-\tau},\ \tau)\, d\xi$$

es continua y acotada en el conjunto $\{x \in R_n,\ 0<t<T,\ 0<\tau\leqslant t\}$ y $g(x, t, t) = f(x, t)$, $|g(x, t, \tau)| \leqslant \|f\|_{B(0<t<T)}$. Por esta causa, la función $u_2(x, t) = \int\limits_0^t g(x, t, \tau)\, d\tau$ pertenece a $C(0 \leqslant t < T)$, $u_2|_{t=0} = 0$ y $\|u_2\|_{B(0<t<T)} \leqslant T\|f\|_{B(0<t<T)}$. Las propiedades a) y b) están demostradas.

Ya que la función $f(x, t)$ tiene en $\{0 < t < T\}$ las derivadas continuas $f_{x_i}(x, t)$, $i = 1, \ldots, n$, y $|f| + |\nabla f| \leqslant$ const en $\{0 < t < T\}$, la función $g(x, t, \tau)$ tiene las derivadas continuas $g_{x_i}(x, t, \tau)$, $i = 1, \ldots, n$, en el conjunto $\{x \in R_n,\ 0 < t < T,\ 0 \leqslant \tau \leqslant t\}$. Por lo tanto, la función $u_2(x, t)$ tiene en $\{0 \leqslant t < T\}$ las derivadas continuas $u_{2x_i}(x, t)$, $i = 1, \ldots, n$, con la particularidad de que

$$\begin{aligned} u_{2x_i}(x, t) &= \frac{1}{\pi^{n/2}} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{R_n} e^{-|\xi|^2} f_{x_i}(x+2\xi\sqrt{t-\tau},\ \tau)\, d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi^{n/2}} \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \int\limits_{R_n} e^{-|\xi|^2} f_{\xi_i}(x+2\xi\sqrt{t-\tau},\ \tau)\, d\xi = \\ &= \frac{1}{\pi^{n/2}} \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \int\limits_{R_n} e^{-|\xi|^2}\xi_i f(x+2\xi\sqrt{t-\tau},\ \tau)\, d\tau, \quad i = 1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{27}$$

Puesto que para todo $j = 1, \ldots, n$

$$|e^{-|\xi|^2}\xi_j f_{x_j}(x+2\xi\sqrt{t-\tau},\ \tau)| \leqslant |\xi|\, e^{-|\xi|^2} \|f_{x_j}\|_{B(0<t<T)}$$

entonces las funciones $\int\limits_{R_n} e^{-|\xi|^2}\xi_j f(x+2\xi\sqrt{t-\tau},\ \tau)\, d\xi$ tienen primeras derivadas respecto a todo $x_1, \ldots, x_n$ que son continuas y acotadas en el conjunto $\{x \in R_n,\ 0 < t < T,\ 0 < \tau \leqslant t\}$. En este caso, de (27) se desprende que la función $u_2(x, t)$ tiene todas las derivadas respecto a $x_1, \ldots, x_n$ hasta el segundo orden inclusive, continuas en $\{0 \leqslant t < T\}$. Además,

$$\Delta u_2(x, t) = \frac{\pi}{\pi^{n/2}} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \int_{R_n} e^{-|\xi|^2} \sum_{i=1}^n \xi_i f_{x_i}(x + 2\xi\sqrt{t-\tau}, \tau)\, d\xi. \tag{28}$$

Luego, para los puntos arbitrarios (x, t) y $(x, t + \Delta t)$, $\Delta t > 0$, pertenecientes a $\{0 < t < T\}$,

$$\frac{u_2(x, t+\Delta t) - u_2(x, t)}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} g(x, t+\Delta t, \tau)\, d\tau +$$

$$+ \int_0^t \frac{g(x, t+\Delta t, \tau) - g(x, t, \tau)}{\Delta t}\, d\tau = I_1(\Delta t) + I_2(\Delta t). \tag{29}$$

Dado que en el segmento $[t, t + \Delta t]$ la función $g(x, t + \Delta t, \tau)$ es continua respecto a τ, $I_1(\Delta t) = g(x, t + \Delta t, t + \theta\Delta t)$ donde $\theta = \theta(x, t, \Delta t)$, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$. Por consiguiente,

$$\lim_{\Delta t \to +0} I_1(\Delta t) = g(x, t, t) = f(x, t). \tag{30}$$

Puesto que la función f tiene derivadas respecto a $x_1, \ldots, x_n$, continuas y acotadas en $\{0 < t < T\}$, la función $g(x, t, \tau)$ admite en $\{x \in R_n, 0 < t < T, 0 < \tau < t\}$ una derivada continua respecto a t:

$$g_t(x, t, \tau) = \frac{1}{\pi^{n/2}\sqrt{t-\tau}} \int_{R_n} e^{-|\xi|^2} \sum_{i=1}^n \xi_i f x_i(x + 2\xi\sqrt{t-\tau}, \tau)\, d\xi,$$

siendo $|g_t(x, t, \tau)| \leqslant \text{const}/\sqrt{t-\tau}$. Entonces

$$\left| \frac{g(x, t+\Delta t, \tau) - g(x, t, \tau)}{\Delta t} \right| \leqslant \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} |g_{t'}(x, t', \tau)|\, dt' \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\text{const}}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \frac{dt'}{\sqrt{t'-\tau}} \leqslant \text{const}/\sqrt{t-\tau},$$

Por esto, en virtud del teorema de Lebesgue,

$$\lim_{\Delta t \to +0} I_2(\Delta t) =$$

$$= \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \int_{R_n} e^{-|\xi|^2} \sum_{i=1}^n \xi_i f_{x_i}(x + 2\xi\sqrt{t-\tau}, \tau)\, d\xi. \tag{31}$$

De (28)—(31) se deduce que

$$\lim_{\Delta t \to +0} \frac{u_2(x, t+\Delta t) - u_2(x, t)}{\Delta t} = f(x, t) + \Delta u_2(x, t). \tag{32}$$

Análogamente se demuestra que

$$\lim_{\Delta t\to -0}\frac{u_2(x,\ t+\Delta t)-u_2(x,\ t)}{\Delta t}=-\lim_{\Delta t\to -0}\frac{1}{\Delta t}\int_{t+\Delta t}^{t} g(x,\ t,\ \tau)\,d\tau+$$

$$+\lim_{\Delta t\to -0}\int_0^{t+\Delta t}\frac{g(x,\ t+\Delta t,\ \tau)-g(x,\ t,\ \tau)}{\Delta t}\,d\tau=f(x,\ t)+\Delta u_2(x,\ t). \quad (32')$$

Por consiguiente, la función $u_2(x,\ t)$ tiene una derivada respecto a t que es continua en $\{0<t<T\}$ e igual a $f+\Delta u_2$. El lema está demostrado.

En el teorema 3 hemos establecido la existencia de una solución clásica del problema de Cauchy (1), (11) con cualesquiera φ de $C(R_n)$ y f de $C(0<t<T)$ acotadas para las cuales son continuas y acotadas en $\{0<t<T\}$ todas las derivadas de primer orden respecto a las variables espaciales. Surge la pregunta: ¿para qué el problema de Cauchy (1), (11) sea resoluble, no será suficiente suponer que la función f sólo sea continua y acotada? La condición de que la función tenga derivadas (continuas) respecto a las variables espaciales es, realmente, elevada: se puede demostrar que el problema (1), (11) se resuelve sólo suponiendo que la función $f(x,\ t)$ (continua y acotada) satisface, en lo que se refiere a las variables espaciales, la condición de Hölder, es decir, para todo punto $(x,\ t)$ de $\{0<t<T\}$ existen constantes $M>0$, $\alpha>0$ (dependientes de este punto) tales que $|f(x',\ t)-f(x,\ t)|\leqslant M|x'-x|^\alpha$, cualesquiera que sea $x'\in R_n$. Sin embargo, si la función f es sólo continua (y acotada) en $\{0<t<T\}$, el problema (1), (11) puede no tener solución (clásica), lo que muestra el ejemplo, que sigue.

Sea $\zeta=\zeta(|x|)$ una función arbitraria indefinidamente diferenciable en R_n, igual a 1 para $|x|<1/2$ y nula para $|x|>3/4$. Examinemos el siguiente problema de Cauchy:

$$\mathcal{L}u=u_t-\Delta u=f_0(x), \quad (33)$$

$$u|_{t=t_0}=\varphi_0(x), \quad (34)$$

donde

$$f_0(x)=-\frac{x_1^2-x_2^2}{2|x|^2}\zeta(|x|)((n+2)(-\ln|x|)^{-1/2}+$$
$$+\frac{1}{2}(-\ln|x|)^{-3/2})+\frac{x_1^2-x_2^2}{|x|}\zeta'(|x|)((n+3)(-\ln|x|)^{1/2}-$$
$$-(-\ln|x|)^{-1/2})+(x_1^2-x_2^2)\zeta''(|x|)(-\ln|x|)^{1/2},$$

y

$$\varphi_0(x)=(x_1^2-x_2^2)\zeta(|x|)(-\ln|x|)^{1/2}.$$

La función $f_0(x) \in C(R_n) \cap C^\infty(|x| > 0)$ es igual a cero cuando $|x| > 3/4$ y, por lo tanto, es acotada en R_n. La función inicial $\varphi_0(x) \in C^1(R_n) \cap C^\infty(|x| > 0)$ es igual a cero cuando $|x| > 3/4$ y, consecuentemente, es acotada en R_n. Se comprueba directamento (compárese con el ejemplo correspondiente para la ecuación de Poisson, cap. IV, § 3, p. 3) que la función acotada $u(x, t) \equiv \varphi_0(x)$ (ésta no depende de t) satisface, para $|x| > 0$, la ecuación 33. Además, la función $u(x, t)$ satisface, evidentemente, la condición inicial (34).

No obstante, no existe ningún $T > 0$ para el cual la función $u(x, t) \equiv \varphi_0(x)$ pertenezca al espacio $C^{2,1}(0 < t < T)$, puesto que, por ejemplo, $\lim\limits_{|x| \to 0} u_{x_1x_1}(x, t) = \infty$. Por consiguiente, esta función no es la solución del problema (33), (34).

Demostremos que el problema (33), (34) no tiene, en absoluto, solución en ninguna banda $\{0 < t < T\}$. Supongamos, al contrario, que para cierto $T > 0$ la solución $v(x, t)$ del problema (33), (34) existe en la banda $\{0 < t < T\}$. En este caso, la función $w(x, t) = u(x, t) - v(x, t) = \varphi_0(x) - v(x, t) \in C^{2,1}(\{|x| > 0, \ 0 < t < T\})$ y satisface en el conjunto $\{|x| > 0, \ 0 < t < T\}$ la ecuación homogénea de la conducción de calor (1_0). Además, dado que $\varphi_0 \in C^1(R_n)$, $w(x, t) \in C^1(T/2 \leqslant t < T)$. De este modo, $w(x, t) \in C^{2,1}(\{0 < |x| \leqslant 1, T/2 \leqslant t < T\}) \cap C^1(\{|x| \leqslant 1, \ T/2 \leqslant t < T\})$ y $w_t - \Delta w = 0$ para todos los puntos (x, t) de $\{0 < |x| < 1, \ T/2 < t < T\}$.

Mostremos que en estas circunstancias la función $w(x, t)$ debe pertenecer al espacio $C^{2,1}(\{|x| < 1, \ T/2 < t < T\})$ lo que no puede tener lugar, ya que la función $v \in C^{2,1}(\{|x| < 1, \ T/2 < t < T\})$, y la función $u(x, t) \equiv \varphi_0(x) \notin C^{2,1}(\{|x| < 1, \ T/2 < t < T\})$.

Así pues, sea $w(x, t) \in C^{2,1}(\{0 < |x| \leqslant 1, \ T/2 \leqslant t < T\}) \cap C^1(\{|x| \leqslant 1, \ T/2 \leqslant t < T\})$ y $\mathcal{L}w = 0$ en $\{0 < |x| < 1, T/2 < t < T\}$. Mostremos que $w(x, t) \in C^{2,1}(\{|x| < 1, \ T/2 < t < T\})$. La demostración de esta afirmación repite en cierto sentido los razonamientos aplicados en el p. 1, al establecer la representación (9).

Tomemos un punto arbitrario (ξ, τ) de $\{0 < |x| < 1, \ T/2 < t < T\}$ y ε arbitrario, $\varepsilon \in (0, \tau - T/2)$. En el conjunto $\{0 < |x| < 1, \ T/2 < t < \tau\}$ tiene lugar la igualdad

$$(w(x, t)\, U(\xi - x, \tau - t))_t + \sum_{i=1}^{n} (wU_{x_i} - w_{x_i}U)_{x_i} =$$
$$= U(\xi - x, \tau - t)\, \mathcal{L}w(x, t) - w(x, t)\, \mathcal{L}^*_{x,t} U(\xi - x, \tau - t) = 0.$$

Integremos esta igualdad respecto de $\{\delta < |x| < 1, \ T/2 < t < \tau - \varepsilon\}$, donde δ es un número arbitrario del intervalo $(0, |\xi|)$.

Valiéndose de la fórmula de Ostrogradski, obtenemos

$$\int\limits_{\delta<|x|<1} w(x,\ \tau-\varepsilon)\,U(\xi-x,\ \varepsilon)\,dx =$$

$$= \int\limits_{\delta<|x|<1} w(x,\ T/2)\,U(\xi-x,\ \tau-T/2)\,dx -$$

$$-\int\limits_{T/2}^{\tau-\varepsilon} dx \int\limits_{|x|=1}\left(w(x,\ t)\frac{\partial U(\xi-x,\ \tau-t)}{\partial n_x}-\frac{\partial w(x,\ t)}{\partial n}U(\xi-x,\ \tau-t)\right)dS_x -$$

$$-\int\limits_{T/2}^{\tau-\varepsilon} dt \int\limits_{|x|=\delta}\left(w(x,\ t)\frac{\partial U(\xi-x,\ \tau-t)}{\partial n_x}-\frac{\partial w(x,\ t)}{\partial n}U(\xi-x,\ \tau-t)\right)dS_x =$$

$$= I_{1,\,\delta}+I_{2,\,\varepsilon}+I_{3,\,\varepsilon,\,\delta}. \qquad (35)$$

Pasemos en (35) al límite, primero para $\varepsilon\to 0$ y luego para $\delta\to 0$. Tomemos arbitrariamente δ_0, $0<\delta_0<\min(1-|\xi|,\ |\xi|-\delta)$. Entonces

$$\int\limits_{\delta<|x|<1} w(x,\ \tau-\varepsilon)\,U(\xi-x,\ \varepsilon)\,dx =$$

$$= \int\limits_{|x-\xi|<\delta_0} w(x,\ \tau-\varepsilon)\,U(\xi-x,\ \varepsilon)\,dx +$$

$$+ \int\limits_{\{\delta<|x|<1\}\cap\{|x-\xi|\geqslant\delta_0\}} w(x,\ \tau-\varepsilon)\,U(\xi-x,\ \varepsilon)\,dx.$$

Puesto que en el conjunto $\{\delta<|x|<1\}\cap\{\delta_0\leqslant|x-\xi|\}$

$$|w(x,\ \tau-\varepsilon)\,U(\xi-x,\ \varepsilon)|\leqslant\max|w(x,\ t)\exp\left(-\frac{\delta_0^2}{4\varepsilon}\right)\Big/(2\sqrt{\pi\varepsilon})^n,$$

entonces para $\varepsilon\to 0$ $\displaystyle\int\limits_{\{\delta<|x|<1\}\cap\{|x-\xi|\geqslant\delta_0\}} w(x,\tau-\varepsilon)\,U(\xi-x,\varepsilon)\,dx\to 0.$

Por eso,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\delta<|x|<1} w(x,\ \tau-\varepsilon)\,U(\xi-x,\ \varepsilon)\,dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{|x-\xi|<\delta_0} w(x,\ \tau-\varepsilon)\,U(\xi-x,\ \varepsilon)\,dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi^{n/2}}\int\limits_{|\eta|<\frac{\delta_0}{2\sqrt{\varepsilon}}} w(\xi+2\eta\sqrt{\varepsilon},\ \tau-\varepsilon)\,e^{-|\eta|^2}\,d\eta = w(\xi,\ \tau),$$

y, por consiguiente,

$$\lim_{\delta\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\delta<|x|<1} w(x,\ \tau-\varepsilon)\,U(\xi-x,\ \varepsilon)\,dx = w(\xi,\ \tau). \tag{36}$$

Luego, evidentemente,

$$\lim_{\delta\to 0} I_{1,\,\delta} = \int\limits_{|x|<1} w(x,\ T/2)\,U(\xi-x,\ \tau-T/2)\,dx, \tag{37}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_{2,\,\varepsilon} = \int\limits_{T/2}^{\tau} dt \int\limits_{|x|<1}\Big(w(x,\ t)\,\frac{\partial U(\xi-x,\ \tau-t)}{\partial n_x} - \frac{\partial w(x,\ t)}{\partial n}\,U(\xi-x,\ \tau-t)\Big)\,dS_x, \tag{38}$$

y como $w\in C^1(\{|x|\leqslant 1,\ T/2\leqslant t\leqslant \tau\})$, tenemos

$$\lim_{\delta\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0} I_{3,\,\varepsilon,\,\delta} = 0. \tag{39}$$

De las correlaciones (35)—(39) se deduce que para todo punto $(x,\ t)$ de $\{0<|x|<1,\ T/2<t<T\}$ tiene lugar la igualdad

$$w(x,\ t) = \int\limits_{|\xi|<1} w(\xi,\ T/2)\,U(x-\xi,\ t-T/2)\,d\xi -$$

$$-\int\limits_{T/2}^{t} d\tau \int\limits_{|\xi|=1}\Big(w(\xi,\ \tau)\,\frac{\partial U(x-\xi,\ t-\tau)}{\partial n_\xi} - \frac{\partial w(\xi,\ \tau)}{\partial n}\,U(x-\xi,\ t-\tau)\Big)\,dS_\xi,$$

de la cual inmediatamente se desprende que w pertenece a $C^\infty(\{|x|<1,\ T/2<t<T\})$ y, con mayor razón, a $C^{2,1}(\{|x|<1,\ T/2<t<T\})$. La afirmación está demostrada.

§ 2. Problemas mixtos

1. Unicidad de la solución. Sea D un dominio acotado n-dimensional del espacio R_n ($x=(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ es un punto de este espacio). Del mismo modo que para los problemas mixtos de las ecuaciones hiperbólicas, examinemos en el espacio $(n+1)$-dimensional $R_{n+1}=R_n\ \{-\infty<t<+\infty\}$ un cilindro acotado $Q_T=\{x\in D,\ 0<t<T\}$ de altura $T>0$, y sea Γ_T la superficie lateral de este cilindro:

$\Gamma_T=\{x\in\partial D,\ 0<t<T\}$, y D_τ, $\tau\in[0,\ T]$ un conjunto $\{x\in D,\ t=\tau\}$, en particular, $D_0=\{x\in D,\ t=0\}$ es la base inferior del cilindro Q_T, mientras que $D_T=\{x\in D,\ t=T\}$, su base superior.

Consideremos en el cilindro Q_T, para cierto $T>0$, una ecuación parabólica

$$\mathcal{L}u \equiv u_t - \operatorname{div}(k(x)\nabla u) + a(x)\,u = f(x, t), \tag{1}$$

donde $k(x) \in C^1(\overline{Q}_T)$, $a(x) \in C(\overline{Q}_T)$, $k(x) \geqslant k_0 = \text{const} > 0$.

La función $u(x, t)$, que pertenece al espacio $C^{2,1}(Q_T) \cap C(Q_T \cup \cup \Gamma_T \cup \overline{D}_0)$*) y que satisface en Q_T la ecuación (1), en D_0 la condición inicial

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \tag{2}$$

y en Γ_T, la condición límite

$$u|_{\Gamma_T} = \chi,$$

se llama *solución clásica del primer problema mixto para la ecuación* (1).

La función $u(x, t)$ que pertenece al espacio $C^{2,1}(Q_T) \cap C(Q_T \cup \cup \Gamma_T \cup \overline{D}_0) \cap C^{1,0}(Q_T \cup \Gamma_T)$ y que satisface en Q_T la ecuación (1), en D_0 la condición inicial (2), y en Γ_T la condición límite

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma(x)\,u\right)\Big|_{\Gamma_T} = \chi,$$

donde $\sigma(x)$ es una función continua en Γ_T, se llama *solución clásica del tercer problema mixto para la ecuación* (1).

Cuando $\sigma \equiv 0$, el tercer problema mixto lleva el nombre de *segundo problema mixto*.

Puesto que el caso de las condiciones límites no homogéneas se reduce fácilmente al de condiciones límites homogéneas, en lo sucesivo consideraremos las siguientes condiciones límites homogéneas

$$u|_{\Gamma_T} = 0 \tag{3}$$

y

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma(x)\,u\right)\Big|_{\Gamma_T} = 0. \tag{4}$$

Convengamos en considerar que el coeficiente $a(x)$ en la ecuación (1) es no negativo en Q_T, y la función $\sigma(x)$ en la condición límite (4) es no negativa en Γ_T.

LEMA 1. *Sea $f(x, t) \in L_2(Q_T)$ y sea $u(x, t)$ una solución clásica del tercero (segundo) problema mixto* (1), (2), (4) *o la solución clásica, perteneciente a $C^{1,0}(Q_T \cup \Gamma_T)$, del primer problema mixto* (1)—(3). *Entonces, $u(x, t) \in H^{1,0}(Q_T)$***).

Tomemos arbitrariamente $\tau \in (0, T)$ y $\varepsilon \in (0, \tau)$. La igualdad (1), multiplicada por u, la integramos en el cilindro $Q_{\varepsilon,\tau} = \{x \in D,$

---

*) La definición de espacios $C^{p,q}$ véase en el p. 1, § 7, cap. III.

**) Los espacios $H^{r,0}(Q_T)$ y las propiedades de sus elementos han sido examinados en el p. 2, § 7, cap. III.

$\varepsilon < t < \tau\}$. Puesto que en Q_T tienen lugar las correlaciones: $uu_t = \frac{1}{2}(u^2)_t$, $u \operatorname{div}(k\nabla u) = \operatorname{div}(ku\nabla u) - k|\nabla u|^2$ y $\frac{1}{2}(u^2)_t - \operatorname{div}(ku\nabla u) = fu - au^2 - k|\nabla u|^2 \in L_1(Q_{\varepsilon,\tau})$, entonces, conforme a la fórmula de Ostrogradski, tenemos

$$\frac{1}{2}\int\limits_{D_\tau} u^2\,dx - \frac{1}{2}\int\limits_{D_\varepsilon} u^2\,dx + \int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}} k|\nabla u|^2\,dx\,dt + \int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}} au^2\,dx\,dt - \int\limits_{\Gamma_{\varepsilon,\tau}} ku\frac{\partial u}{\partial n}\,dS\,dt = \int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}} fu\,dx\,dt,$$

donde $\Gamma_{\varepsilon,\tau} = \{x \in \partial D,\ \varepsilon < t < \tau\}$. De aquí, cuando $u(x, t)$ es la solución del primer problema mixto,

$$\frac{1}{2}\int\limits_{D_\tau} u^2\,dx - \frac{1}{2}\int\limits_{D_\varepsilon} u^2\,dx + \int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}} k|\nabla u|^2\,dx\,dt + \int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}} au^2\,dx\,dt = \int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}} fu\,dx\,dt;$$

cuando $u(x, t)$ es la solución del tercero (segundo) problema mixto

$$\frac{1}{2}\int\limits_{D} u^2\,dx - \frac{1}{2}\int\limits_{D_\varepsilon} u^2\,dx + \int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}} k|\nabla u|^2\,dx\,dt + \int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}} au^2\,dx\,dt + \int\limits_{\Gamma_{\varepsilon,\tau}} k\sigma u^2\,dS\,dt = \int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}} fu\,dx\,d\tau.$$

Por eso,

$$\frac{1}{2}\int\limits_{D_\tau} u^2\,dx + k_0\int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}} |\nabla u|^2\,dx\,dt \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{D_\tau} u^2\,dx + \int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}} k(x)|\nabla u|^2\,dx\,dt \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{D_\varepsilon} u^2\,dx + \int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}} |f||u|\,dx\,dt \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{D_\varepsilon} u^2\,dx + \|u\|_{L_2(Q_{\varepsilon,\tau})}\|f\|_{L_2(Q_T)}.$$

Pasemos en esta desigualdad al límite para $\varepsilon \to 0$. Como resultado, obtenemos

$$\frac{1}{2}\int\limits_{D_\tau} u^2\,dx \leqslant \frac{1}{2}\|\varphi\|^2_{L_2(D)} + \|u\|_{L_2(Q_\tau)}\|f\|_{L_2(Q_T)} \tag{5}$$

y

$$k_0\int\limits_{Q_\tau} |\nabla u|^2\,dx\,dt \leqslant \frac{1}{2}\|\varphi\|^2_{L_2(D)} + \|u\|_{L_2(Q_\tau)}\|f\|_{L_2(Q_T)}. \tag{6}$$

Tomemos arbitrariamente $t \in (0, T)$ e integremos la desigualdad (5) respecto de $\tau \in (0, t)$

$$\int_0^t \int_{D_\tau} u^2\, dx\, d\tau \leqslant T \| \varphi \|^2_{L_2(D)} + 2T \| u \|_{L_2(Q_t)} \| f \|_{L_2(Q_T)} \leqslant$$

$$\leqslant T \| \varphi \|^2_{L_2(D)} + 2T^2 \| f \|^2_{L_2(Q_t)} + \frac{1}{2} \| u \|^2_{L_2(Q_T)},$$

de donde se deduce que para cualquier $t \in (0, T)$

$$\| u \|^2_{L_2(Q_t)} \leqslant 2T \| \varphi \|^2_{L_2(D)} + 4T^2_{L_2(Q_T)} \| f \|^2_{L_2(Q_T)} = C_0^2.$$

Por consiguiente, $u \in L_2(Q_T)$ y

$$\| u \|_{L_2(Q_T)} \leqslant C_0. \tag{7}$$

Entonces, de (6) tenemos

$$\| |\nabla| \|^2_{L_2(Q_T)} \leqslant \frac{1}{2k_0} \| \varphi \|^2_{L_2(D)} + \frac{C_0}{k_0} \| f \|_{L_2(Q_T)}$$

para cualquier $\tau \in (0, T)$. Por consiguiente, $| \nabla u | \in L_2(Q_T)$. El lema está demostrado.

OBSERVACIÓN. De las desigualdades (5) y (7) se deduce inmediatamente que para la solución clásica del tercero (segundo) problema mixto (1), (2), (4) y para la solución clásica, perteneciente a $C^{1,0}(Q_T \cup \Gamma_T)$, del primer problema mixto tiene lugar la siguiente acotación

$$\| u \|_{L_2(D_\tau)} \leqslant C_1, \quad \tau \in (0, T), \tag{8}$$

donde la constante C_1 sólo depende de T, $\| \varphi \|_{L_2(D)}$ y $\| f \|_{L_2(Q_T)}$.

Sea u la solución clásica del tercero (segundo) problema mixto (1), (2), (4) o la solución clásica del primer problema mixto (1)—(3), perteneciente a $C^{1,0}(Q_T \cup \Gamma_T)$, con la particularidad de que la función $f(x, t) \in L_2(Q_T)$. Multipliquemos (1) por una función arbitraria $v(x, t)$ que pertenece a $C^1(\overline{Q}_T)$ y que satisface la condición

$$v|_{D_T} = 0, \tag{9}$$

e integremos la igualdad obtenida en el cilindro $Q_{\varepsilon, \tau}$, donde τ es un número arbitrario de $(0, T)$ y ε, un número arbitrario de $(0, \tau)$. Según la fórmula de Ostrogradski obtenemos

$$\int_{Q_{\varepsilon,\tau}} (-uv_t + k\nabla u \nabla v + auv)\, dx\, dt - \int_{\Gamma_{\varepsilon,\tau}} kv \frac{\partial u}{\partial n}\, dS\, dt +$$

$$+ \int_{D_\tau} uv\, dx = \int_{D_\varepsilon} uv\, dx + \int_{Q_{\varepsilon,\tau}} fv\, dx\, dt. \tag{10}$$

Si u es la solución del primer problema mixto, adicionalmente supondremos que

$$v|_{\Gamma_T}=0. \qquad (11)$$

En este caso la igualdad (10) tomará la forma

$$\int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}}(-uv_t+k\nabla u\nabla v+auv)\,dx\,dt+\int\limits_{D_\tau}uv\,dx=\int\limits_{D_\varepsilon}uv\,dx+\int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}}fv\,dx\,dt. \qquad (10')$$

Si u es la solución del tercero (segundo) problema mixto, la igualdad (6) tiene por expresión

$$\int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}}(-uv_t+k\nabla u\nabla v+auv)\,dx\,dt+\int\limits_{\Gamma_{\varepsilon,\tau}}k\sigma uv\,dS\,dt+\int\limits_{D_\tau}uv\,dx=$$

$$=\int\limits_{D_\varepsilon}uv\,dx+\int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}}fv\,dx\,dt. \qquad (10'')$$

En virtud del lema 1, $u\in H^{1,0}(Q_T)$ y, por lo tanto (véase § 7, cap. III), $u|_{\Gamma_T}\in L_2(\Gamma_T)$. Teniendo en cuenta (8) y (9), pasemos en las igualdades (10′) y (10″) al límite para $\varepsilon\to 0$ y $\tau\to T$. De resultas obtenemos las afirmaciones siguientes.

La solución clásica $u(x, t)$, perteneciente a $C^{1,0}(Q_T\cup\Gamma_T)$, del primer problema mixto satisface la identidad integral

$$\int\limits_{Q_T}(-uv_t+k\nabla u\nabla v+auv)\,dx\,dt=\int\limits_{D_0}\varphi v\,dx+\int\limits_{Q_T}fv\,dx\,dt \qquad (12)$$

para todas las v de $C^1(\overline{Q}_T)$ que satisfacen las condiciones (9) y (11), y, por consiguiente, también *para todas las v de $H^1(Q_T)$ que satisfacen las mismas condiciones* (9) *y* (11).

La solución clásica $u(x, t)$ del tercero (segundo, cuando $\sigma=0$) problema mixto satisface la identidad integral

$$\int\limits_{Q_T}(-uv_t+k\nabla u\nabla v+auv)\,dx\,dt+\int\limits_{\Gamma_T}k\sigma uv\,dS\,dt=$$

$$=\int\limits_{D_0}\varphi v\,dx+\int\limits_{Q_T}fv\,dx\,dt. \qquad (13)$$

para todas las v de $C^1(\overline{Q}_T)$ que satisfacen la condición (9), y, por lo tanto, también *para todas las v de $H^1(Q_T)$ que satisfacen la misma condición* (9).

Empleando las identidades obtenidas, introduzcamos los conceptos de soluciones generalizadas de los problemas mixtos que se consideran. Vamos a suponer que $f(x, t)\in L_2(Q_T)$ y $\varphi(x)\in L_2(D)$.

La función $u(x, t)$, perteneciente al espacio $H^{1,0}(Q_T)$ se llama *solución generalizada del primer problema mixto* (1)—(3), si satisface la condición límite (3) y la identidad (12) para todas las $v(x, t)$ de $H^1(Q_T)$ que satisfacen las condiciones (9) y (11).

La función $u(x, t)$, perteneciente al espacio $H^{1,0}(Q_T)$, se llama *solución generalizada del tercero (segundo, cuando $\sigma = 0$) problema mixto* (1), (2), (4), si satisface la identidad (13) para todas las $v(x, t)$ de $H^1(Q_T)$ que satisfacen la condición (9).

Junto con las soluciones clásicas y generalizadas de los problemas mixtos se puede introducir el concepto de solución en casi todo punto c.t.p.

La función $u(x, t)$ se llama *solución en c.t.p. del primer problema mixto* (1)—(3) *o del tercero (segundo, si $\sigma = 0$) problema mixto* (1), (2), (4), si ella pertenece al espacio $H^{2,1}(Q_T)$, satisface, para casi todo $(x, t) \in Q_T$, la ecuación (1), la condición inicial (2) y una de las condiciones límites (3) o, respectivamente (4).

Ya hemos mostrado más arriba que la solución clásica del tercero (segundo) problema mixto (1), (2), (4) y la solución clásica del primer problema mixto (1)—(3), perteneciente a $C^{1,0}(Q_T \cup \Gamma_T)$, son soluciones generalizadas de los problemas mixtos correspondientes. De una manera análoga se demuestra que la solución en c.t.p. del primero, segundo o tercero problema mixto es la solución generalizada del problema correspondiente. Es también fácil establecer que si la solución generalizada del primer problema mixto (1)—(3) o del tercero (segundo) problema mixto (1), (2), (4) pertenece a $H^{2,1}(Q_T)$, es la solución en c.t.p. de este problema; si la solución generalizada en el caso del problema (1)—(3) pertenece a $C^{2,1}(Q_T) \cap C(Q_T \cup \Gamma_T \cup \overline{D}_0)$, y en el caso del problema (1), (2), (4) a $C^{2,1}(Q_T) \cap C(Q_T \cup \Gamma_T \cup \overline{D}_0) \cap C^{1,0}(Q_T \cup \Gamma_T)$, entonces será la solución clásica (compárese con el p. 1, § 2, cap. V, donde están dadas las demostraciones de las afirmaciones correspondientes para las soluciones de los problemas mixtos relacionados a la ecuación hiperbólica).

Señalemos además, que la solución generalizada de un problema mixto para la ecuación parabólica, al igual que la solución clásica y la solución en c.t.p. posee la siguiente propiedad: si $u(x, t)$ es una solución generalizada del problema mixto (1)—(3) o del problema (1), (2), (4) en el cilindro Q_T, será también la solución generalizada del problema correspondiente en el cilindro $Q_{T'}$, cualquiera que sea T', $0 < T' < T$. La demostración de esta afirmación es análoga a la de la afirmación correspondiente para las soluciones de los problemas mixtos para una ecuación hiperbólica.

Demos a conocer, ahora, los teoremas de unicidad de las soluciones de los problemas mixtos.

TEOREMA 1. *El primer problema mixto* (1)—(3) *no puede tener más de una solución generalizada.*

El tercero (segundo) problema mixto (1), (2), (4) *no puede tener más de una solución generalizada.*

Este teorema se demuestra de igual modo que el de la unicidad de soluciones de los problemas mixtos para una ecuación hiperbólica (teorema 1, p. 1, § 2, cap. V).

Sean $u_1(x, t)$ y $u_2(x, t)$ dos soluciones generalizadas del problema (1)—(3) o del problema (1), (2), (4). En este caso, la función $u = u_1 - u_2$ será la solución generalizada del problema correspondiente para $f = 0$ y $\varphi = 0$. Hemos de mostrar que $u = 0$ en Q_T.

Examinemos en Q_T la función

$$v(x, t) = \int_t^T u(x, \theta)\, d\theta$$

Directamente se comprueba que la función v tiene en Q_T derivadas generalizadas

$$v_t = -u,$$

$$v_{x_i} = \int_t^T u_{x_i}(x, \theta)\, d\theta, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Puesto que, obviamente, las funciones v, v_t, y v_{x_i}, $i = 1, \ldots, n$, pertenecen a $L_2(Q_T)$, entonces $v \in H^1(Q_T)$. Con ello, $v|_{D_t} = 0$, $v|_{\Gamma_T} = \int_t^T u|_{\Gamma_T}\, d\theta$, y, en particular, si u es una solución generalizada del primer problema mixto (1)—(3), entonces $v|_{\Gamma_T} = 0$. Sustituyamos la función v en la identidad (12) (si u es solución del primer (1)—(3)) o en la identidad (13) (si u es solución del problema (1), (2), (4)). Entonces, para el primer problema mixto obtenemos la igualdad

$$\int_{Q_T} (u^2(x, t) + k\nabla u(x, t) \cdot \int_t^T \nabla u(x, \theta)\, d\theta - av(x, t)\, v_t(x, t)\, dx\, dt = 0 \tag{14}$$

y para el tercero (segundo) problema mixto, la igualdad

$$\int_{Q_T} (u^2(x, t) + k(x) \nabla u(x, t) \cdot \int_t^T \nabla u(x, \theta)\, d\theta - avv_t)\, dx\, dt +$$

$$+ \int_{\Gamma_T} k\sigma u(x, t) \int_t^T u(x, \theta)\, d\theta\, dS\, dt = 0. \tag{14'}$$

Puesto que (véase la demostración del teorema 1, p. 1, § 2, cap. V)

$$\int_{Q_T} k\nabla u(x,\ t) \int_t^T \nabla u(x,\ \theta)\,d\theta\,dx\,dt=\frac{1}{2}\int_D k\left|\int_0^T \nabla u(x,\ t)\,dt\right|^2 dx \geqslant 0,$$

$$\int_{\Gamma_T} k\sigma u(x,\ t)\int_t^T u(x,\ \theta)\,d\theta\,dS\,dt=\frac{1}{2}\int_{\partial D} k\sigma\left(\int_0^T u(x,\ t)\,dt\right)^2 dS \geqslant 0$$

y

$$\int_{Q_T} avv_t\,dx\,dt=-\frac{1}{2}\int_{D_0} av^2\,dx \leqslant 0,$$

entonces, de (14) y (14') tenemos

$$\int_{Q_T} u^2(x,\ t)\,dx\,dt \leqslant 0,$$

de donde se infiere que $u=0$ en Q_T. El teorema queda demostrado.

Ya que la solución en c.t.p. del problema mixto (1)—(3) o del (1), (2), (4) es también solución generalizada del problema correspondiente, del teorema 1 se deduce.

COROLARIO 1. *El primer problema mixto* (1)—(3) *no puede tener más de una solución en c.t.p.*

El tercero (segundo) problema mixto (1), (2), (4) *no puede tener más de una solución en c.t.p.*

Del teorema 1 se deduce, además, la afirmación siguiente.

COROLARIO 2. *El tercero (segundo) problema mixto* (1), (2), (4) *no puede tener más de una solución clásica.*

Efectivamente, sean u_1 y u_2 dos soluciones clásicas del problema (1), (2), (4). Entonces, la diferencia entre ellas será solución clásica (del problema (1), (2), (4) para $\varphi=0$ y $f=0 \in L_2(Q_T)$. Por consiguiente, u_1-u_2 es una solución generalizada que, debido al teorema 1, es igual a cero.

Establezcamos, ahora, el teorema de unididad de la solución clásica del primer problema mixto.

TEOREMA 2. *El primer problema clásico mixto* (1)—(3) *no puede tener más de una solución clásica.*

Sean u_1 y u_2 dos soluciones clásicas en el cilindro Q_T del primer problema mixto (1)—(3). Entonces, la función $u=u_1-u_2$ pertenece a $C^{2,1}(Q_T)\cap C(Q_T\cup\Gamma_T\cup\bar{D}_0)$, satisface en Q_T la ecuación homogénea

$$\mathcal{L}u=u_t-\operatorname{div}(k\nabla u)+au=0, \tag{1_0}$$

en Γ_T la condición límite (3) y en D_0 la condición inicial homogénea

$$u|_{t=0}=0. \tag{2_0}$$

Mostremos que $u(x, t)$ es igual a cero en Q_T.

Supongamos que existe un punto $(x^0, t^0) \in Q_T$ tal que $u(x^0, t^0) \neq \neq 0$. Vamos a considerar que $u(x^0, t^0) > 0$ (si $u(x^0, t^0) < 0$, en lugar de la función u se debe considerar la función $-u$, pues para ella se cumplen (1_0), (2_0) y (3) y $-u(x^0, t^0) > 0$).

Designemos $u(x^0, t^0)$ mediante M y examinemos la función

$$v(x, t) = u(x, t) - \frac{M}{2t^0}(t - t^0).$$

Señalemos ante todo que

$$\mathscr{L}v = -\frac{M}{2t^0} < 0 \quad \text{para todo} \quad (x, t) \in Q_T. \tag{15}$$

Puesto que $v \in C(\overline{Q}_{t^0})$, existe en $\overline{Q}_{t^0}$ un punto (x^1, t^1) en el cual la función $v(x, t)$ alcanza su valor máximo; con ello, como $v(x^0, t^0) = u(x^0, t^0) = M$, entonces $v(x^1, t^1) \geqslant v(x^0, t^0) = M$.

El punto (x^1, t^1) no puede pertenecer al conjunto $\overline{\Gamma}_{t^0} \cup D_0$, dado que $v|_{\Gamma_T} = u|_{\Gamma_T} - \frac{M}{2t^0}(t - t^0) = \frac{M}{2t^0}(t^0 - t) \leqslant \frac{M}{2}$ y $v|_{D_0} = = u|_{D_0} + \frac{M}{2} = \frac{M}{2}$. Por consiguiente, el punto (x^1, t^1) debe pertenecer al conjunto $Q_{t^0} \cup D_{t^0}$. Supongamos que pertenece a Q_{t^0}. Entonces, $v_t(x^1, t^1) = 0$, $v_{x_i}(x^1, t^1) = 0$ y $v_{x_i x_i}(x^1 t^1) \leqslant 0$, $i = 1, \ldots, n$. Es decir, $\mathscr{L}v(x^1, t^1) = v_t(x^1, t^1) - k(x^1)\Delta v(x^1, t^1) - \nabla k(x^1)\nabla v \times \times (x^1, t^1) + a(x^1)v(x^1, t^1) \geqslant 0$, lo que contradice a (15). En el caso de que $(x^1, t^1) \in D_{t^0}$, $v_t(x^1, t^1) \geqslant 0$, $v_{x_i}(x^1, t^1) = 0$ y $v_{x_i x_i}(x^1, t^1) \leqslant 0$, $i = 1, \ldots, n$. Es decir, de nuevo $\mathscr{L}v(x^1, t^1) \geqslant 0$. El teorema queda demostrado.

2. Existencia de la solución generalizada. Pasemos ahora a la demostración de la existencia de las soluciones de los problemas (1)—(3) y (1), (2), (4). Igual que en el caso hiperbólico con este fin emplearemos el método de Fourier.

Sea $v(x)$ una función propia generalizada del primer problema de contorno

$$\operatorname{div}(k(x)\nabla v) - av = \lambda v, \quad x \in D, \qquad v|_{\partial D} = 0 \tag{16}$$

o del tercero (segundo, cuando $\sigma = 0$) problema de contorno

$$\operatorname{div}(k(x)\nabla v) - av = \lambda v, \quad x \in D, \qquad \left(\frac{\partial v}{\partial n} + \sigma(x)v\right)\Big|_{\partial D} = 0 \tag{17}$$

(λ es el valor propio correspondiente). Esto significa que en el primer problema de contorno v pertenece a $\mathring{H}^1(Q)$ y satisface la identidad integral

$$\int_D (k\nabla v\nabla\eta + av\eta)\,dx + \lambda\int_D v\eta\,dx = 0$$

cualquiera que sea $\eta \in \mathring{H}^1(D)$, mientras que en el tercero (segundo) problema de contorno $v \in H^1(D)$ y satisface la identidad integral

$$\int_D (k\nabla v\nabla\eta + av\eta)\,dx + \int_{\partial D} k\sigma v\eta\,dS + \lambda\int_D v\eta\,dx = 0$$

cualquiera que sea $\eta \in H^1(D)$.

Examinemos un sistema $v_1, v_2, \ldots$, ortonormal en $L_2(D)$ y compuesta de todas las funciones propias generalizadas del problema (16) o, respectivamente, del problema (17); $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ es la sucesión de los valores propios correspondientes, la cual consideramos, como siempre, no creciente, con la particularidad de que cada valor propio interviene en esta sucesión tantas veces cual es su multiplicidad. Como fue mostrado en el § 1, cap. IV, el sistema $v_1, v_2, \ldots$ es una base ortonormal en $L_2(D)$ y $\lambda_k \to -\infty$ para $k \to \infty$. Para el primero, tercero (cuando $\sigma \not\equiv 0$ en ∂D) y segundo (cuando $a \not\equiv 0$ en D) problemas de contorno (recordemos que $a(x) \geqslant 0$ en D y $\sigma(x) \geqslant 0$ en ∂D), el primer valor propio $\lambda_1 < 0$, es decir $0 > \lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots$ Si $a \equiv 0$ en D, para el segundo problema de contorno $0 = \lambda_1 > \lambda_2 \geqslant \geqslant \lambda_3 \geqslant \ldots$

Supongamos que la función inicial φ en (2) pertenece a $L_2(D)$ y la función $f \in L_2(Q_T)$. De acuerdo con el teorema de Fubini, $f(x, t) \in L_2(D_t)$ para casi todo $t \in (0, T)$. Desarrollemos la función φ y la función $f(x, t)$, para casi todos los valores de $t \in (0, T)$, en series de Fourier según el sistema $v_1, v_2, \ldots$ de las funciones generalizadas del problema (16) (si se considera el problema (1), (2), (3)) o del problema (17) (si se considera el problema (1), (2), (4)):

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k v_k(x), \\ f(x, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\, v_k(x), \end{aligned} \tag{18}$$

donde

$$\varphi_k = (\varphi, v_k)_{L_2(D)}, \qquad f_k(t) = (f(x, t), v_k(x))_{L_2(D)}, \tag{19}$$

con la particularidad de que las funciones $f_k(t)$ pertenecen a $L_2(0, T)$. Según la igualdad de Parseval—Steklov

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^2 = \|\varphi\|^2_{L_2(D)} \tag{20}$$

y para casi todo $t \in (0, T)$

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2(t) = \int_D f^2(x, t)\, dx,$$

de donde

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^T f_k^2(t)\, dt = \int_{Q_T} f^2(x, t)\, dx\, dt. \tag{20'}$$

Examinemos, para cualquier $k = 1, 2, \ldots$, la función

$$U_k(t) = \varphi_k e^{\lambda_k t} + \int_0^t f_k(\tau)\, e^{\lambda_k (t-\tau)}\, d\tau, \tag{21}$$

que pertenece a $H^1(0, T)$ y satisface casi siempre en $(0, T)$ la ecuación

$$U_k' - \lambda_k U_k = f_k, \tag{22}$$

y la condición ($H^1(0, T) \subset C([0, T])$)

$$U_k(0) = \varphi_k. \tag{22'}$$

Es fácil (igual que en el caso hiperbólico) comprobar que la función

$$u_k(x, t) = U_k(t)\, v_k(x)$$

es la solución generalizada del primero (si $v_k(x)$ es función propia del problema (16)) o del tercero (segundo) (si $v_k(x)$ es función propia del problema (17)) problema mixto para la ecuación

$$u_t - \operatorname{div}(k \nabla u) + au = f_k(t)\, v_k(x)$$

con la condición inicial

$$u|_{t=0} = \varphi_k v_k(x).$$

Por consiguiente, si en calidad de función inicial en (2) y en el segundo miembro de la ecuación (1) tomamos las sumas parciales de las series (18) $\sum_{k=1}^{N} \varphi_k v_k(x)$ y $\sum_{k=1}^{N} f_k(t)\, v_k(x)$, la solución generalizada del problema (1)—(3), o, respectivamente, del (1), (2), (4) será la función

$$S_N(x, t) = \sum_{k=1}^{N} U_k(t)\, v_k(x).$$

En particular, para el primer problema mixto $S_N(x, t)$ satisface la igualdad integral

$$\int_{Q_T} (-S_N v_t + k\nabla S_N \cdot \nabla v + aS_N v)\, dx\, dt =$$

$$= \int_{D_0} \sum_{h=1}^{N} \varphi_k v_k(x)\, v(x, 0)\, dx + \int_{Q_T} \sum_{h=1}^{N} f_k(t)\, v_k(x)\, v(x, t)\, dx\, dt, \qquad (23)$$

cualquiera que sea v de $H^1(Q_T)$ que satisfaga las condiciones (9) y (11); en el caso del tercero (segundo) problema mixto, la identidad integral

$$\int_{Q_T} (-S_N v_t + k\nabla S_N \cdot \nabla v + aS_N v)\, dx\, dt + \int_{\Gamma_T} k\sigma S_N v\, dS\, dt =$$

$$= \int_{D_0} \sum_{k=1}^{N} \varphi_k v_k(x)\, v(x, 0)\, dx + \int_{Q_T} \sum_{k=1}^{N} f_k(t)\, v_k(x)\, v(x, t)\, dx\, dt \qquad (23')$$

para toda v de $H^1(Q_T)$ que satisfaga la condición (9).

Mostremos que la solución generalizada del problema (1)—(3) o del problema (1), (2), (4) se prefija mediante la serie

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k(t)\, v_k(x), \qquad (24)$$

donde, para el problema (1)—(3), $v_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$ serán las funciones propias del problema (16), mientras que para el problema (1), (2), (4), $v_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$ serán las funciones propias del problema (17).

TEOREMA 3. *Si $f \in L_2(Q_T)$ y $\varphi \in L_2(D)$, cualquiera de los problemas mixtos (1), (2), (3) o (1), (2), (4) tiene la solución generalizada u. Esta solución se representa por la serie (24) convergente en $H^{1,0}(Q_T)$. En este caso tiene lugar la desigualdad*

$$\|u\|_{H^{1,0}(Q_T)} \leqslant C(\|\varphi\|_{L_2(D)} + \|f\|_{L_2(Q_T)}), \qquad (25)$$

donde la constante $C > 0$ no depende de φ y f.

De la fórmula (21) fluye que para todo $t \in [0, T]$

$$|U_k(t)| \leqslant |\varphi_k|\, e^{\lambda_k t} + \int_0^t |f_k|(\tau)\, |e^{\lambda_k(t-\tau)}|\, d\tau \leqslant |\varphi_k|\, e^{\lambda_k t} +$$

$$+ \frac{\|f_k\|_{L_2(0, T)}}{\sqrt{2|\lambda_k|}} \quad \text{para} \quad k > 1$$

y

$$|U_1(t)| \leqslant |\varphi_1| + C_1 \|f_1\|_{L_2(0, T)},$$

donde $C_1 = \sqrt{T}$ para el segundo problema mixto cuando $a \equiv 0$, en los casos restantes $C_1 = 1/\sqrt{2|\lambda_1|}$.

Por eso, para todo $t \in [0, T]$

$$U_k^2(t) \leqslant 2\varphi_k^2 e^{2\lambda_k t} + \frac{1}{|\lambda_k|} \|f_k\|^2_{L_2(0,T)} \quad \text{para} \quad k > 1 \tag{26}$$

y

$$U_1^2(t) \leqslant 2\varphi_1^2 + 2C_1^2 \|f_1\|^2_{L_2(0,T)}. \tag{26'}$$

Examinemos la suma parcial $S_N(x, t)$ de la serie (24). Para todo $t \in [0, T]$ pertenece al espacio $\mathring{H}^1(D_t)$ en el primer problema mixto o al espacio $H^1(D_t)$, en el tercero (segundo) problema mixto.

Al estudiar el problema (1)—(3), resulta cómodo introducir en el espacio $\mathring{H}^1(D_t)$ el producto escalar

$$\int_{D_t} (k\nabla u \nabla v + auv)\, dx.$$

Al estudiar el problema (1), (2), (4), introduzcamos en el espacio $H^1(D_t)$ el producto escalar

$$\int_{D_t} (k\nabla u \nabla v + auv)\, dx + \int_{\partial D_t} k\sigma uv\, dS,$$

si (o bien) $a \not\equiv 0$ en D, o bien $\sigma \not\equiv 0$ en ∂D, y el producto escalar

$$\int_{D_t} (k\nabla u \nabla v + uv)\, dx,$$

siempre que $a \equiv 0$ en D y $\sigma \equiv 0$ en ∂D. Puesto que en el caso del primero y tercero, para $\sigma \not\equiv 0$, problemas mixtos y en el del segundo problema mixto para $a \not\equiv 0$, los sistemas de funciones $v_1/\sqrt{-\lambda_1}$, $v_2/\sqrt{-\lambda_2}$, ..., son ortonormados en los productos escalares correspondientes, mientras que en el segundo problema mixto, cuando $a \equiv 0$, queda ortonormado el sistema de funciones $v_1/\sqrt{1-\lambda_1}$, $v_2/\sqrt{1-\lambda_2}$, ..., entonces para todo $t \in [0, T]$ y para cualesquiera M y N, $1 \leqslant M < N$, en virtud de (26), tenemos

$$\|S_N(x, t) - S_M(x, t)\|^2_{H^1(D_t)} = \left\| \sum_{k=M+1}^{N} U_k(t)\, v_k(x) \right\|^2_{H^1(D_t)} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=M+1}^{N} U_k^2(t)\, |\lambda_k| \leqslant \sum_{k=M+1}^{N} \left(2e^{2\lambda_k t}\varphi_k^2 |\lambda_k| + \int_0^T f_k^2(t)\, dt \right).$$

en el caso del primer problema mixto y en el del segundo y tercero problemas, si (o bien) $a \not\equiv 0$ en D, o bien $\sigma(x) \not\equiv 0$ en ∂D,

$$\|S_N(x, t) - S_M(x, t)\|^2_{H^1(D_t)} = \sum_{k=M+1}^{N} U_k^2(t)(1+|\lambda_k|) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=M+1}^{N} \left[2e^{2\lambda_k t}\varphi_k^2(1+|\lambda_k|) + \frac{1+|\lambda_k|}{|\lambda_k|}\int_0^T f_k^2(t)\,dt\right] \leqslant$$

$$\leqslant 2\,\frac{1+|\lambda_2|}{|\lambda_2|} \sum_{k=M+1}^{N} \left[e^{2\lambda_k t}(1+|\lambda_k|)\varphi_k^2 + \int_0^T f_k^2(t)\,dt\right],$$

si $a \equiv 0$ en D y $\sigma \equiv 0$ en ∂D. Es decir, en ambos casos tiene lugar la desigualdad

$$\|S_N(x, t) - S_M(x, t)\|^2_{H^1(D_t)} \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \sum_{k=M+1}^{N} \left(\varphi_k^2 e^{2\lambda_k t}(1+|\lambda_k|) + \int_0^T f_k^2(t)\,dt\right). \qquad (27)$$

Junto con esta desigualdad, debido a (26′) se verifica también, para todo $t \in [0, T]$ y cualquier $N \geqslant 1$, la desigualdad

$$\|S_N(x, t)\|^2_{H^1(D_t)} = \left\|U_1 v_1 + \sum_{k=2}^{N} U_k v_k\right\|^2_{H^1(D_t)} \leqslant$$

$$\leqslant C_2 \sum_{k=1}^{N} \left(\varphi_k^2 e^{2\lambda_k t}(1+|\lambda_k|) + \int_0^T f_k^2(t)\,dt\right). \qquad (28)$$

Integrando respecto de $t \in (0, T)$ las desigualdades (27) y (28), obtenemos

$$\|S_N - S_M\|^2_{H^{1,0}(Q_T)} \leqslant C_3 \sum_{k=M+1}^{N} \left(\varphi_k^2 + \int_0^T f_k^2(t)\,dt\right), \qquad (29)$$

$$\|S_N\|^2_{H^{1,0}(Q_T)} \leqslant C_4 \sum_{k=1}^{N} \left(\varphi_k^2 + \int_0^T f_k^2(t)\,dt\right). \qquad (30)$$

En virtud de (20) y (20′), la serie con término común $\varphi_k^2 + \int_0^T f_k^2(t)\,dt$ converge. Por eso, de (29) se desprende que la serie (24) converge en $H^{1,0}(Q_T)$, y, por lo tanto, su suma $u(x, t)$ pertenece a $H^{1,0}(Q_T)$, y en el caso del primer problema mixto, satisface la condición límite (3). Pasando al límite para $N \to \infty$ en la identidad (23) (primer problema) y en la (23') (tercero (segundo) problema), resulta que la función $u(x, t)$ satisface la identidad (12) o (13), respectivamente. Por consiguiente, $u(x, t)$ es la solución generalizada. La desigualdad (25) se deduce de (30), si pasamos al límite para $N \to \infty$ y hacemos uso de las igualdades (20) y (20'). El teorema queda demostrado.

Ha de notarse que análogamente al caso hiperbólico, la existencia de las soluciones generalizadas para los problemas mixtos en cuestión puede ser demostrada con ayuda del método de Galiorkin.

3. Suavidad de las soluciones generalizadas de los problemas mixtos. Existencia de la solución en c.t.p. y de la solución clásica. Al estudiar la suavidad de las soluciones generalizadas, nos limitamos a la consideración del primero y segundo (en la condición límite (4) $\sigma = 0$) problemas mixtos para el caso particular de la ecuación (1), a saber, la ecuación de la conducción de calor (en (1) $k \equiv 1$, $a \equiv 0$), aunque, siendo suficientemente suaves los coeficientes y la función σ, el uso del mismo método conduce a resultados semejantes también en el caso general.

Sea $u(x, t)$ la solución generalizada del primero o del segundo problema mixto para la ecuación de la conducción de calor

$$u_t - \Delta u = f \tag{31}$$

$$u|_{t=0} = \varphi \tag{32}$$

y (o bien)

$$u|_{\Gamma_T} = 0 \tag{33}$$

para el primer problema mixto, o bien

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_T} = 0, \tag{34}$$

para el segundo problema mixto.

Recordemos (véase p. 4, § 2, cap. IV) que si el contorno ∂D del dominio D pertenece a la clase C^r para cierto $r \geqslant 1$, entonces las funciones propias generalizadas $v_k(x)$, $k = 1, 2 \ldots$, del primero y segundo problemas de contorno para el operador de Laplace pertenecen a los espacios $H^r_{\mathcal{D}}(D)$ y $H^r_{\mathcal{N}}(D)$, respectivamente, o sea, pertenecen a $H^r(D)$ y satisfacen en ∂D para el primer problema de contorno las condiciones límites

$$v_k|_{\partial D} = \ldots = \Delta^{\left[\frac{r-1}{2}\right]} v_k|_{\partial D} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

y en el segundo problema de contorno, cuando $r > 1$, a las condiciones límites

$$\frac{\partial v_k}{\partial n}\Big|_{\partial D} = \ldots = \frac{\partial}{\partial n}\Delta^{\left[\frac{r}{2}\right]-1} v_k|_{\partial D} = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots;$$

para $r = 1 H^r_{\mathscr{N}}(D) = H^1_{\mathscr{N}}(D) = H^1(D)$.

Designemos mediante $\widetilde{H}^{2l,\,l}_{\mathscr{D}}(Q_t)$, para $l \geqslant 1$ entero, un subespacio del espacio $H^{2l,\,l}(Q_T)$ (véase p. 2, § 7, cap. III) compuesto de todas las funciones f de $H^{2l,\,l}(Q_T)$ para las cuales

$$f|_{\Gamma_T} = \ldots = \Delta^{l-1} f|_{\Gamma_T} = 0;$$

por $\widetilde{H}^{2l,\,l}_{\mathscr{D}}(Q_T)$ para $l = 0$, entenderemos el espacio $L_2(Q_T)$: $\widetilde{H}^{0,\,0}_{\mathscr{D}}(Q_T) = H^{0,\,0}(Q_T) = L_2(Q_T)$.

Mediante $\widetilde{H}^{2l,\,l}_{\mathscr{N}}(Q_T)$, para $l \geqslant 1$ entero, designemos un subespacio del espacio $H^{2l,\,l}(Q_T)$ compuesto de todas las funciones f de $H^{2l,\,l}(Q_T)$ para las cuales

$$\frac{\partial f}{\partial n}\Big|_{\Gamma_T} = \ldots \frac{\partial}{\partial n}\Delta^{l-1} f|_{\Gamma_T} = 0;$$

por $\widetilde{H}^{2l,\,l}_{\mathscr{N}}(Q_T)$, para $l = 0$, entenderemos el espacio $L_2(Q_T)$: $\widetilde{H}^{0,\,0}_{\mathscr{N}}(Q_T) = L_2(Q_T)$.

Tiene lugar la siguiente afirmación.

TEOREMA 4. *Supongamos que para cierto* $s \geqslant 1$ $\partial D \in C^{2s}$ *y, en el caso del primer problema mixto* (31)—(33), $\varphi \in H^{2s-1}_{\mathscr{D}}(D)$, $f \in \widetilde{H}^{2(s-1),\,(s-1)}_{\mathscr{D}}(Q_T)$, *mientras que en el caso del segundo problema mixto* (31), (32), (34) $\varphi \in H^{2s-1}_{\mathscr{N}}(D)$, $f \in \widetilde{H}^{2(s-1),\,(s-1)}_{\mathscr{N}}(Q_T)$. *Entonces, la solución generalizada* $u(x, t)$ *de cada uno de estos problemas pertenece al espacio* $H^{2s,\,s}(Q_T)$ *y la serie* (24) *converge hacia esta solución en* $H^{2s,\,s}(Q_T)$. *Con ello, tiene lugar la siguiente desigualdad*

$$\|u\|_{H^{2s,\,s}(Q_T)} \leqslant C\,(\|\varphi\|_{H^{2s-1}(D)} + \|f\|_{H^{2(s-1),\,s-1}(Q_T)}), \tag{35}$$

donde la constante positiva C *no depende de* φ *y* f.

Señalemos que los requisitos del teorema 4 exigen, además de la suavidad de las funciones dadas, el cumplimiento de las siguientes condiciones

$$\varphi|_{\partial D} = \ldots = \Delta^{s-1}\varphi|_{\partial D} = 0$$

y

$$f|_{\Gamma_T} = \ldots = \Delta^{s-2} f|_{\Gamma_T} = 0$$

para el primer problema mixto y las condiciones

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n}\Big|_{\partial D} = \ldots = \frac{\partial}{\partial n}\Delta^{s-2}\varphi|_{\partial D} = 0$$

y

$$\frac{\partial f}{\partial n}\Big|_{\Gamma_T} = \ldots = \frac{\partial}{\partial n}\Delta^{s-2} f|_{\Gamma_T} = 0$$

para el segundo problema mixto. Estas condiciones son indispensables para que sean válidas las afirmaciones del teorema 4 sobre la convergencia de la serie (24) en $H^{2s,s}(Q_T)$ hacia la solución generalizada del problema mixto correspondiente. No obstante, si sólo nos interesa la suavidad de la solución generalizada (y no la convergencia hacia ella de la serie de Fourier), entonces, igual que en el caso de las ecuaciones hiperbólicas (véase el teorema 3′, p. 4, § 2, cap. V), estas condiciones pueden ser considerablemente debilitadas; como en el caso mencionado, pueden ser sustituidas por las condiciones de concordancia en ∂D_0 de las funciones φ y f.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 4. Según el lema 2, p. 4, § 2, cap. V, las funciones $f_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots$, dadas por la fórmula (19), pertenecen al espacio $H^{s-1}(0, T)$ (y, por lo tanto, cuando $s \geqslant 2$, al espacio $C^{s-2}([0, T])$). Por consiguiente, las funciones $U_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots$, que están dadas mediante la fórmula (21) y satisfacen en $(0, T)$ las ecuaciones (22), pertenecen al espacio $H^s(0, T)$ y, por lo tanto, al espacio $C^{s-1}([0, T])$. Entonces, en virtud de las propiedades de las funciones propias $v_k(x)$, las sumas parciales $S_N(x, t) = \sum_{k=1}^{N} U_k(t)\, v_k(x)$ de la serie (24) pertenecen al espacio $\tilde{H}^{2s,s}_{\mathscr{Z}}(Q_T)$, y, cuando todo $t \in [0, T]$, al espacio $H^{2s}_{\mathscr{Z}}(D_t)$ en el caso del primero o bien al espacio $\tilde{H}^{2s,s}_{\mathscr{N}}(Q_T)$ y, para todo $t \in [0, T]$, al espacio $H^{2s}_{\mathscr{N}}(D_t)$, en el caso del segundo problema mixto. Además, cuando $p = 1, \ldots, s$, las funciones $\frac{\partial^p S_N}{\partial t^p}$ pertenecen al espacio $H^{2(s-p),\, s-p}(Q_T)$, y, para todo $t \in [0, T]$, al espacio $H^{2s}_{\mathscr{Z}}(D_t)$ en el caso del primero o bien al espacio $H^{2s}_{\mathscr{N}}(D_t)$, en el caso del segundo problema mixto. Por ello, de acuerdo con el lema 3, p. 5, § 2, cap. IV, y a causa de la ortogonalidad en $L_2(D_t)$ de las funciones propias $v_k(x)$, para todo $t \in [0, T]$, cualquier $p = 0, \ldots, s$ y cualesquiera M y N, $1 \leqslant M < N$, tenemos las siguientes desigualdades

$$\left\| \frac{\partial^p S_N}{\partial t^p} - \frac{\partial^p S_M}{\partial t^p} \right\|^2_{H^{2(s-p)}(D_t)} \leqslant C_1 \left\| \Delta^{s-p} \frac{\partial^p}{\partial t^p} (S_N - S_M) \right\|^2_{L_2(D_t)} =$$

$$= C_1 \left\| \sum_{k=M+1}^{N} |\lambda_k|^{s-p} \frac{d^p U_k}{dt^p} v_k(x) \right\|^2_{L_2(D_t)} =$$

$$= C_1 \sum_{k=M+1}^{N} |\lambda_k|^{2(s-p)} \left(\frac{d^p U_k}{dt^p} \right)^2. \qquad (36)$$

Análogamente, para cualesquiera $t \in [0, T]$, $p = 0, \ldots, s$, $N \geqslant 1$

$$\left\| \frac{\partial^p S_N}{\partial t^p} \right\|^2_{H^{2(s-p)}(D_t)} \leqslant C_1 \sum_{k=1}^{N} |\lambda_k|^{2(s-p)} \left(\frac{d^p U_k}{dt^p} \right)^2$$

en el caso del primer problema mixto ($\lambda_1 \neq 0$) y

$$\left\| \frac{\partial^p S_N}{\partial t^p} \right\|^2_{H^{2(s-p)}(D_t)} = \left\| \frac{\partial^p (U_1 v_1)}{\partial t^p} + \frac{\partial^p (S_N - S_1)}{\partial t^p} \right\|^2_{H^{2(s-p)}(D_t)} \leqslant$$

$$\leqslant 2 \left(\frac{d^p U_1}{dt^p} \right)^2 \left\| \frac{1}{\sqrt{|D|}} \right\|^2_{H^{2(s-p)}(D_t)} + 2 \left\| \frac{\partial^p (S_N - S_1)}{\partial t^p} \right\|^2_{H^{2(s-p)}(D_t)} \leqslant$$

$$\leqslant C_2 \left(\left(\frac{d^p U_1}{dt^p} \right)^2 + \sum_{k=2}^{N} |\lambda_k|^{2(s-p)} \left(\frac{d^p U_k}{dt^p} \right)^2 \right)$$

en el caso del segundo problema mixto ($\lambda_1 = 0$). De este modo, en ambos casos para cualesquiera $t \in [0, T]$, $p = 0, \ldots, s$, $N \geqslant 1$

$$\left\| \frac{\partial^p S_N}{\partial t^p} \right\|^2_{H^{2(s-p)}(D_t)} \leqslant C_3 \left(\left(\frac{d^p U_1}{dt^p} \right)^2 + \sum_{k=1}^{N} |\lambda_k|^{2(s-p)} \left(\frac{d^p U_k}{dt^p} \right)^2 \right). \qquad (37)$$

Integrando las desigualdades (36) respecto de $t \in (0, T)$ y sumando según $p = 0, \ldots, s$, obtenemos

$$\| S_N - S_M \|^2_{H^{2s,s}(Q_T)} \leqslant C_1 \sum_{p=0}^{s} \sum_{k=M+1}^{N} |\lambda_k|^{2(s-p)} \left\| \frac{d^p U_k}{dt^p} \right\|^2_{L_2(0,T)}. \qquad (38)$$

Por analogía, de (37) obtenemos

$$\| S_N \|^2_{H^{2s,s}(Q_T)} \leqslant C_3 \sum_{p=0}^{s} \left(\left\| \frac{d^p U_1}{dt^p} \right\|^2_{L_2(0,T)} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{N} |\lambda_k|^{2(s-p)} \left\| \frac{d^p U_k}{dt^p} \right\|^2_{L_2(0,T)} \right). \qquad (39)$$

A continuación hagamos uso del siguiente lema cuya demostración daremos a conocer más abajo.

LEMA 2. *Supongamos que para cierto* $q \geqslant 0$ $\partial D \in C^{2q+2}$ *en el primer problema mixto* (31) — (33) $\varphi \in H_{\mathscr{D}}^{2q+1}(D)$, $f \in \tilde{H}_{\mathscr{D}}^{2q,q}(Q_T)$, *mientras que en el caso del segundo problema mixto* (31), (32), (34), $\varphi \in H_{\mathscr{N}}^{2q+1}(D)$, $f \in \tilde{H}_{\mathscr{N}}^{2q,q}(Q_T)$. *Entonces, para cualquier* p, $0 \leqslant p \leqslant q+1$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^{2(q+1-p)} \left\| \frac{d^pU_k}{dt^p} \right\|^2_{L_2(0,\,T)} \leqslant C\,(\|\varphi\|^2_{H^{2q+1}(D)} + \|f\|^2_{H^{2q,\,q}(Q_T)}), \quad (40)$$

donde la constante positiva C *no depende de* φ *y* f.

Teniendo en cuenta este lema (para $q = s-1$), de las desigualdades (38) se deduce que la serie (24) converge en $H^{2s,s}(Q_T)$. Por consiguiente, las soluciones generalizadas de los problemas (31)—(33) y (31), (32), (34) pertenecen al espacio $H^{2s,s}$ (e, incluso, a los espacios $\tilde{H}_{\mathscr{D}}^{2s,s}(Q_T)$ o bien $\tilde{H}_{\mathscr{N}}^{2s,s}(Q_T)$, respectivamente). Pasando en (39) al límite para $N \to \infty$, con ayuda de (40) y de las evidentes desigualdades

$$\left\| \frac{d^pU_1}{dt^p} \right\|^2_{L_2(0,\,T)} \leqslant \text{const}\,(\|\varphi\|^2_{L_2(D)} + \|f\|^2_{H^{2(s-1),\,s-1}(Q_T)}),$$

$p = 0, \ldots, s$, obtenemos la desigualdad (35). El teorema está demostrado.

Puesto que la solución generalizada del problema mixto, perteneciente al espacio $H^{2,1}(Q_T)$, es la solución en c.t.p, entonces, del teorema 4 se infiere para $s = 1$:

COROLARIO. *Supongamos que* $\partial D \in C^2$, $f \in L_2(Q_T)$ *y sea* $\varphi \in \mathring{H}^1(D)$ *(para el primer problema mixto* (31)—(33)) *y* $\varphi \in H^1(D)$ *(para el segundo problema mixto* (31), (32), (34)). *Entonces, la serie* (24) *converge en* $H^{2,1}(Q_T)$ *y su suma es la solución en c.t.p. del problema* (31)—(33) *o, respectivamente, del problema* (31), (32), (34). *Con ello, se verifica la desigualdad*

$$\|u\|_{H^{2,1}(Q_T)} \leqslant C\,(\|\varphi\|_{H^1(D)} + \|f\|_{L_2(Q_T)}),$$

donde la constante positiva C *no depende ni de* φ *ni de* f.

Antes de establecer la validez del lema 2, del cual hicimos uso en la demostración del teorema 4, demostremos las siguientes afirmaciones auxiliares.

LEMA 3. *Si* $f(x, t) \in H^{r,0}(Q_T)$, $r \geqslant 1$, *y* $g(t) \in L_2(0, T)$, *la función*

$$h(x) = \int_0^T f(x, t)\, g(t)\, dt$$

pertenece a $H^r(D)$ *y para todo* $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $|\alpha| \leqslant r$,

$$D_x^\alpha h(x) = \int_0^T D_x^\alpha f(x, t)\, g(t)\, dt. \tag{41}$$

Si en este caso $f|_{\Gamma_T} = 0$, *entonces* $h|_{\partial D} = 0$, *mientras que si, para* $r \geqslant 2$ $\frac{\partial f}{\partial n}\Big|_{\Gamma_T} = 0$, *entonces* $\frac{\partial h}{\partial n}\Big|_{\partial D} = 0$.

Advirtamos, ante todo, que del hecho de la pertenencia de la función f al espacio $L_2(Q_T)$ se deduce que $h \in L_2(D)$. En efecto, puesto que $f(x, t)\, g(t) \in L_1(Q_T)$, según el teorema de Fubini, $h \in L_1(D)$ y como, además, $h^2(x) \leqslant \int_0^T f^2(x, t)\, dt \cdot \|g\|^2_{L_2(0, T)}$, entonces $h \in L_2(D)$.

De este modo, la función h, como también las funciones

$$h_\alpha(x) = \int_0^T D_x^\alpha f(x, t)\, g(t)\, dt, \qquad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \quad |\alpha| \leqslant r,$$

pertenecen a $L_2(D)$.

Tomemos una función arbitraria $\eta(x)$ de $\dot{C}^r(\overline{D})$. Ya que es evidente que $g(t)\, \eta(x) \in H^{r, 0}(Q_T)$, para todo α, $|\alpha| \leqslant r$

$$\int_D h_\alpha(x)\, \eta(x)\, dx = \int_{Q_T} D_x^\alpha f(x, t) \cdot \eta(x)\, g(t)\, dx\, dt =$$

$$= (-1)^{|\alpha|} \int_{Q_T} f(x, t) \cdot D_x^\alpha \eta(x) \cdot g(t)\, dx\, dt = (-1)^{|\alpha|} \int_D h(x)\, D_x^\alpha \eta(x)\, dx$$

Por consiguiente, la función h tiene derivadas generalizadas $D_x^\alpha h = h_\alpha$, $|\alpha| \leqslant r$, pertenecientes a $L_2(D)$, es decir, $h \in H^r(D)$.

Si $f|_{\Gamma_T} = 0$, para toda función $\eta(x) \in C^1(\overline{D})$ y cualquier $i = 1, 2, \ldots, n$

$$\int_D h_{x_i} \eta\, dx = \int_{Q_T} f_{x_i}(x, t)\, \eta(x)\, g(t)\, dx\, dt =$$

$$= -\int_{Q_T} f(x, t) \cdot \eta_{x_i}(x)\, g(t)\, dx\, dt = -\int_D h \cdot \eta_{x_i}\, dx.$$

Por otra parte, puesto que $h \in H^1(D)$, entonces para $\eta \in C^1(\overline{D})$ arbitraria

$$\int_D h_{x_i} \eta\, dx = \int_{\partial D} h \eta n_i\, dS - \int_D h \eta_{x_i}\, dx,$$

donde $n_i(x)$ son las coordenadas del vector de una normal exterior a ∂D en el punto x. Por lo tanto, para cualquier $\eta(x) \in C^1(\partial D)$

$$\int_{\partial D} h\eta n_i\, dS = 0, \quad i = 1, \ldots, n,$$

de donde (compárese con la demostración del lema 4, p. 4, § 2, cap. V) se deduce que $h|_{\partial D} = 0$.

Si $r \geqslant 2$ y $\left.\frac{\partial f}{\partial n}\right|_{\Gamma_T} = 0$, entonces (compárese con la demostración del lema 4, p. 4, § 2, cap. V) para toda función $\eta \in C^2(\overline{D})$

$$\int_D \Delta h(x) \cdot \eta(x)\, dx = \int_{Q_T} \Delta f(x, t) \cdot \eta(x) g(t)\, dx\, dt =$$

$$= -\int_{Q_T} \nabla f(x, t) \cdot \nabla \eta(x) g(t)\, dx\, dt = -\int_D \nabla h \cdot \nabla \eta\, dx.$$

Por otra parte, dado que $h \in H^2(D)$, para cualquier $\eta \in C^1(\overline{D})$

$$\int_D \Delta h \cdot \eta\, dx = \int_{\partial D} \frac{\partial h}{\partial n} \eta\, dS - \int_D \nabla h \cdot \nabla \eta\, dx.$$

Por tanto, para cualquier función $\eta \in C^1(\partial D)$

$$\int_{\partial D} \frac{\partial h}{\partial n} \eta\, dS = 0,$$

es decir, $\left.\frac{\partial h}{\partial n}\right|_{\partial D} = 0$. El lema está demostrado.

COROLARIO. *Supongamos que la función* $g(t) \in L_2(0, T)$, *y la función* $f(x, t)$ *pertenece al espacio* $\hat{H}^{2r, r}_{\mathscr{D}}(Q_T)$ *o al espacio* $\widetilde{H}^{2r, r}_{\mathscr{N}}(Q_T)$ *para cierto* $r \geqslant 0$. *Entonces, la función* $h(x)$ *pertenece al espacio* $H^{2r}_{\mathscr{D}}(D)$ *o al espacio* $H^{2r}_{\mathscr{N}}(D)$, *respectivamente. En este caso, para cualquier* $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $|\alpha| \leqslant 2r$, *tiene lugar la fórmula* (41).

LEMA 4. *Sea* $\partial D \in C^2$. *Si para un cierto* $q \geqslant 0$ *la función* $f(x, t) \in \widetilde{H}^{2q, q}_{\mathscr{D}}(Q_T)$, *entonces para todo* p, $p = 0, \ldots, q$, $\frac{\partial^p f}{\partial t^p} \in \widetilde{H}^{2(q-p), q-p}_{\mathscr{D}}(Q_T)$. *Cuando* $f \in \widetilde{H}^{2q, q}_{\mathscr{N}}(Q_T)$, *para cualquier* p, $p = 0, \ldots, q$, $\frac{\partial^p f}{\partial t^p} \in \widetilde{H}^{2(q-p), q-p}_{\mathscr{N}}(Q_T)$.

Cuando $q = 0$ y $q = 1$, las afirmaciones del lema son evidentes. Para $q \geqslant 2$, la primera afirmación será consecuencia inmediata de la afirmación establecida en la demostración del lema 4, p. 4, § 2, cap. V: *si es que* $G \in H^2(Q_T)$ *y* $G|_{\Gamma_T} = 0$, *entonces* $G_t|_{\Gamma_T} = 0$. La segunda afirmación del lema se deduce, evidentemente, de lo siguiente: *si* $G \in H^{4,2}(Q_T)$ *y* $\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{\Gamma_T}=0$, *entonces* $\left.\frac{\partial G_t}{\partial n}\right|_{\Gamma_T}=0$. Notemos que ella se demuestra de la misma manera que la afirmación análoga en el lema 4, p. 4, § 2, cap. V. En efecto, puesto que $\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{\Gamma_T}=0$, para toda $\eta \in C^2(\overline{Q}_T)$, $\eta|_{D_0}=\eta|_{D_T}=0$, tenemos

$$\int\limits_{Q_T} \Delta G_t \cdot \eta \, dx\, dt = -\int\limits_{Q_T} \Delta G \cdot \eta_t \, dx\, dt = \int\limits_{Q_T} \nabla G \cdot \nabla \eta_t \, dx\, dt =$$

$$= -\int\limits_{Q_T} \nabla G_t \cdot \nabla \eta \, dx\, dt.$$

Por otra parte

$$\int\limits_{Q_T} \Delta G_t \cdot \eta \, dx\, dt = \int\limits_{\Gamma_T} \frac{\partial G_t}{\partial n} \cdot \eta \, dS\, dt - \int\limits_{Q_T} \nabla G_t \cdot \nabla \eta \, dx\, dt.$$

Por ello,

$$\int\limits_{\Gamma_T} \frac{\partial G_t}{\partial n} \cdot \eta \, dS\, dt = 0$$

para cualquier $\eta \in C^2(\overline{\Gamma}_T)$, $\eta|_{\partial D_0}=\eta|_{\partial D_T}=0$. Por lo tanto, $\left.\frac{\partial G_t}{\partial n}\right|_{\Gamma_T}=$ $=0$. El lema está demostrado.

LEMA 5. *Sea* $\partial D \in C^2$ *y sea, para cierto* $q \geqslant 0$, $f(x,t) \in \tilde{H}^{2q,q}_{\mathscr{D}}(Q_T)$ *o* $f(x,t) \in \tilde{H}^{2q,q}_{\mathscr{N}}(Q_T)$. Entonces, para cualquier p, $p=0, \ldots, q$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^{2(p-q)} \left\| \frac{d^p f_k}{dt^p} \right\|^2_{L_2(0,T)} \leqslant C \|f\|^2_{H^{2q,q}(Q_T)}, \tag{42}$$

donde la constante positiva C *no depende de* f.

Conforme al lema 2, p. 4, § 2, cap. V, para cualquier p, $0 \leqslant p \leqslant q$, $\frac{d^p f_k(t)}{dt^p} = \int\limits_D \frac{\partial^p f(x,t)}{\partial t^p} v_k(x)\, dx$, por eso

$$|\lambda_k|^{2(q-p)} \int\limits_0^T \left(\frac{d^p f_k(t)}{dt^p}\right)^2 dt =$$

$$= |\lambda_k|^{2q-p} \int\limits_D \left(\int\limits_0^T \frac{\partial^p f(x,t)}{\partial t^p} \frac{d^p f_k(t)}{pt^p} dt \right) v_k(x)\, dx =$$

$$= \lambda_k^{q-p} \int\limits_D \left(\int\limits_0^T \frac{\partial^p f(x,t)}{\partial t^p} \frac{d^p f_k(t)}{dt^p} dt \right) \Delta^{q-p} v_k(x)\, dx.$$

De acuerdo con el lema 4 la función $\frac{\partial^p f(x,t)}{\partial t^p}$ pertenece al espacio $\widetilde{H}_{\mathscr{D}}^{2(q-p),\,q-p}(Q_T)$ o, respectivamente, a $\widetilde{H}_{\mathscr{N}}^{2(q-p),\,q-p}(Q_T)$; quiere decir, que en virtud del corolalario del lema 3, la función $\int\limits_0^T \frac{\partial^p f(x,t)}{\partial t^p}\times$ $\times \frac{d^p f_k(t)}{dt^p}\,dt$ pertenece a $H_{\mathscr{D}}^{2(q-p)}(D)$ o, respectivamente, a $H_{\mathscr{N}}^{2(q-p)}(D)$. Por lo tanto,

$$|\lambda_k|^{2(q-p)}\int\limits_0^T\left(\frac{d^p f_k(t)}{dt^p}\right)^2 dt=$$

$$=\lambda_k^{q-p}\int\limits_D \Delta^{q-p}\left(\int\limits_0^T \frac{\partial^p f}{\partial t^p}\,\frac{d^p f_k}{dt^p}\,dt\right)\cdot v_k\,dx=$$

$$=\lambda_k^{q-p}\int\limits_{Q_T}\Delta^{q-p}\frac{\partial^p f(x,t)}{\partial t^p}\cdot\frac{d^p f_k(t)}{dt^p}\,v_k(x)\,dx\,dt=$$

$$=\lambda_k^{q-p}\int\limits_D\int\limits_0^T\left(\Delta_y^{q-p}\frac{\partial^p f(y,t)}{\partial t^p}\right)\left(\int\limits_D\frac{\partial^p f(x,t)}{\partial t^p}\,v_k(x)\,dx\right)v_k(y)\,dy\,dt=$$

$$=\lambda_k^{q-p}\int\limits_D\left(\int\limits_0^T\frac{\partial^p f(x,t)}{\partial t^p}\,g_k^{(p)}(t)\,dt\right)v_k(x)\,dx=$$

$$=\int\limits_D\left(\int\limits_0^T\frac{\partial^p f(x,t)}{\partial t^p}\,g_k^{(p)}(t)\,dt\right)\Delta^{q-p}v_k(x)\,dx,\qquad(43)$$

donde la función $g_k^{(p)}(t)=\int\limits_D\Delta^{q-p}\frac{\partial^p f(x,t)}{\partial t^p}\cdot v_k(x)\,dx$ pertenece, en virtud del lema 2, p. 4, § 2, cap. V, al espacio $L_2(0,T)$. La función $\Delta^{q-p}\frac{\partial^p f(x,t)}{\partial t^p}\in L_2(Q_T)$. Por eso, $\Delta^{q-p}\frac{\partial^p f(x,t)}{\partial t^p}\in L_2(D_t)$ para casi todo $t\in(0,T)$ y para casi todo $t\in(0,T)$ $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(g_k^{(p)}(t))^2=$ $=\left\|\Delta^{q-p}\frac{\partial^p f}{\partial t^p}\right\|^2_{L_2(D_t)}$. Por consiguiente,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\|g_k^{(p)}\|^2_{L_2(0,T)}=\left\|\Delta^{q-p}\frac{\partial^p f}{\partial t^p}\right\|^2_{L_2(Q_T)}\leqslant\text{const}\,\|f\|^2_{H^{2q,q}(Q_T)}.\qquad(44)$$

Puesto que, en vista del lema 4 y el corolario del lema 3, la función $\int_0^T \frac{\partial^p f(x, t)}{\partial t^p} g_k^{(p)}(t)\, dt$ pertenece a $H_{\mathscr{D}}^{2(q-p)}(D)$ o bien, respectivamente, a $H_{\mathscr{N}}^{2(q-p)}(D)$, entonces de (43) tenemos la igualdad

$$|\lambda_k|^{2(q-p)} \int_0^T \left(\frac{d^p f_k(t)}{dt^p}\right)^2 dt =$$

$$= \int_D \Delta^{q-p} \left(\int_0^T \frac{\partial^p f(x, t)}{\partial t^p} g_k^{(p)}(t)\, dt \right) v_k(x)\, dx = \int_0^T (g_k^{(p)}(t))^2\, dt,$$

de la cual, en virtud de (44), se deduce directamente (42). El lema está demostrado.

PASEMOS AHORA A LA DEMOSTRACIÓN DEL LEMA 2. Dado que la función $f \in H^{2q, q}(Q_T) \subset H^q(Q_T)$, entonces las funciones $f_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots$, pertenecen a $H^q(0, T)$ (lema 2, p. 4, § 2, cap. V). Por ello, de acuerdo con (21) y (22), las funciones $U_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots$, pertenecen a $H^{q+1}(0, T)$. De (22) se deduce que para todo p, $1 \leqslant p \leqslant q+1$

$$\frac{d^p U_k}{dt^p} = \lambda_k^p U_k + \sum_{r=0}^{p-1} \lambda_k^{p-r-1} \frac{d^r f_k}{dt^r}, \qquad t \in (0, T).$$

Por consiguiente, en virtud de la desigualdad (42) del lema 5, para demostrar las desigualdades (40) es suficiente establecer que

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^{2(q+1)} \|U_k\|^2_{L_2(0, T)} \leqslant \text{const}\, (\|\varphi\|^2_{H^{2q+1}(D)} + \|f\|^2_{H^{2q, q}(Q_T)}). \quad (45)$$

Multipliquemos (22) por U_k e integremos la igualdad obtenida respecto de $t \in (0, T)$. Haciendo uso de la condición (22'), obtenemos

$$\frac{1}{2} U_k^2(T) - \frac{1}{2} \varphi_k^2 - \lambda_k \int_0^T U_k^2(t)\, dt = \int_0^T f_k(t)\, U_k(t)\, dt,$$

de donde ($\lambda_k \leqslant 0$) tenemos la desigualdad

$$|\lambda_k|\, \|U_k\|^2_{L_2(0, T)} \leqslant \frac{1}{2} \varphi_k^2 + \|f_k\|_{L_2(0, T)} \|U_k\|_{L_2(0, T)}$$

y, consecuentemente, la desigualdad

$$|\lambda_k|^{2q+2}\|U_k\|^2_{L_2(0,T)}\leqslant\frac{1}{2}\varphi_k^2|\lambda_k|^{2q+1}+$$

$$+(|\lambda_k|^q\|f_k\|_{L_2(0,T)})(|\lambda_k|^{q+1}\|U_k\|_{L_2(0,T)})\leqslant\frac{1}{2}\varphi_k^2|\lambda_k|^{2q+1}+$$

$$+\frac{1}{2}|\lambda_k|^{2q}\|f_k\|^2_{L_2(0,T)}+\frac{1}{2}|\lambda_k|^{2q+2}\|U_k\|^2_{L_2(0,T)}.$$

De este modo,

$$|\lambda_k|^{2q+2}\|U_k\|^2_{L_2(0,T)}\leqslant\varphi_k^2|\lambda_k|^{2q+1}+|\lambda_k|^{2q}\|f_k\|^2_{L_2(0,T)},$$

y, por tanto, la desigualdad (45) se infiere de la (42) (para $p=0$) y la desigualdad (teorema 8, p. 5, § 2, cap. IV)

$$\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k^2|\lambda_k|^{2q+1}\leqslant\text{const}\,\|\varphi\|^2_{H^{2q+1}(D)}.$$

El lema está demostrado.

Demostremos ahora el teorema de existencia de las soluciones clásicas de los problemas (31)—(33) y (31), (32), (34).

Indiquemos que si $f\in H^{2,1}(Q_T)$, entonces las funciones $U_k(t)$, $k=1, 2, \ldots$, definidas por la igualdad (21), pertenecen al espacio $H^2(0, T)$, y, por consiguiente, también al espacio $C^1([0, T])$.

Si $\partial D\in C^{\left[\frac{n}{2}\right]+3}$, en vista del teorema 7, p. 4, § 2, cap. IV, las funciones propias $v_k(x)$ del primero o segundo problema de contorno para el operador de Laplace en D pertenecen al espacio $H^{\left[\frac{n}{2}\right]+3}(D)$, y, por tanto (teorema 3, p. 2, § 6, cap. III), también al espacio $C^2(\overline{D})$. Entonces, las sumas parciales S_N de la serie (24) pertenecen al espacio $C^{2,1}(\overline{Q}_T)$.

TEOREMA 5. *Sea $\partial D\in C^{2s_0+1}$, donde $2s_0+1\geqslant\left[\frac{n}{2}\right]+3$ y sea $\varphi\in H_{\mathscr{D}}^{2s_0+1}(D)$, $f\in\widetilde{H}_{\mathscr{D}}^{2s_0,s_0}(Q_T)$, para el primer problema mixto (31)—(33) y $\varphi\in H_{\mathscr{N}}^{2s_0+1}(D)$, $f\in\widetilde{H}_{\mathscr{N}}^{2s_0,s_0}(Q_T)$, para el segundo problema mixto (31), (32), (34). Entonces, la serie (24) converge en $C^{2,1}(\overline{Q}_T)$ y su suma es la solución clásica del primer problema mixto (31)—(33) o, respectivamente, del segundo problema mixto (31),* (32), (34). *En este caso*

$$\|u\|_{C(\overline{Q}_T)} \leqslant C\,(\|\varphi\|_{H^{2s_0-1}(D)} + \|f\|_{H^{2(s_0-1),\, s_0-1}(Q_T)}), \tag{46}$$

donde la constante positiva C no depende de φ *y* f.

Establezcamos al principio las acotaciones requeridas de la función $U_k(t)$ y de su derivada $U_k'(t)$, $k = 1, 2, \ldots$ De la fórmula (21) se tiene

$$|U_k(t)| \leqslant |\varphi_k| + \frac{1}{\sqrt{2|\lambda_k|}}\|f_k\|_{L_2(0,\,T)} \quad \text{para} \quad k > 1$$

y

$$|U_1(t)| \leqslant |\varphi_1| + C_1\|f_1\|_{L_2(0,\,T)},$$

donde $C_1 = 1/\sqrt{2|\lambda_1|}$ para el primer problema mixto y $C_1 = \sqrt{T}$, para el segundo problema mixto. De (22) se desprende que para todo $t \in [0,\ T]$

$$|U_k'(t)| \leqslant |\lambda_k|\,|U_k| + |f_k| \leqslant |\lambda_k|\,|\varphi_k| + |f_k| +$$

$$+ \frac{\sqrt{|\lambda_k|}}{\sqrt{2}}\|f_k\|_{L_2(0,\,T)} \quad \text{para} \quad k \geqslant 1.$$

Por esta razón, para todo $t \in [0, T]$

$$U_k^2(t) \leqslant 2|\varphi_k|^2 + \frac{1}{|\lambda_k|}\|f_k\|^2_{L_2(0,\,T)}, \qquad k > 1, \tag{47}$$

$$U_1^2(t) \leqslant 2\varphi_1^2 + 2C_1^2\|f_1\|^2_{L_2(0,\,T)}, \tag{47'}$$

$$U_k'^2(t) \leqslant 3\lambda_k^2\varphi_k^2 + \frac{3}{2}|\lambda_k|\,\|f_k\|^2_{L_2(0,\,T)} + 3|f_k|^2, \qquad k \geqslant 1. \tag{48}$$

Demostremos la siguiente afirmación auxiliar.

LEMA 6. *Sea* $f(t)$ *una función arbitraria de* $H^1(0,\ T)$ *y sea* ε *un número arbitrario de* $[0,\ T]$. *Entonces, para todo* $t \in [0,\ T]$ *se verifica la desigualdad*

$$f^2(t) \leqslant \frac{2}{\varepsilon}\|f\|^2_{L_2(0,\,T)} + 2\varepsilon\|f'\|^2_{L_2(0,\,T)}. \tag{49}$$

Designemos por α el valor medio de la función f en el intervalo $(0,\ T)$:

$$\alpha = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt,$$

y examinemos la función

$$f_\alpha(t) = f(t) - \alpha,$$

continua en $[0,\ T]$.

Puesto que $\int_0^T f_\alpha(t)\,dt=0$, existe un punto $t^0\in(0, T)$ tal que $f_\alpha(t^0)=0$. Por eso, para cualquier $t\in[0, T]$ y todo $\varepsilon>0$

$$f_\alpha^2(t)=2\int_{t^0}^{t} f_\alpha(t)\,f'_\alpha(t)\,dt\leqslant\frac{1}{\varepsilon}\int_0^T f_\alpha^2(t)\,dt+\varepsilon\int_0^T f'^2(t)\,dt$$

Por consiguiente, para cualquier $t\in[0, T]$ y todo ε, $0<\varepsilon\leqslant T$, tenemos

$$f^2(t)-2\alpha f(t)+\alpha^2\leqslant\frac{1}{\varepsilon}\left(\int_0^T f^2(\tau)\,d\tau-2\alpha\int_0^T f(\tau)\,d\tau+\alpha^2 T\right)+$$
$$+\varepsilon\int_0^T f'^2(\tau)\,d\tau=\frac{1}{\varepsilon}\int_0^T f^2(\tau)\,d\tau+\varepsilon\int_0^T f'^2(\tau)\,d\tau-\frac{\alpha^2 T}{\varepsilon}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{\varepsilon}\int_0^T f^2(\tau)\,d\tau+\varepsilon\int_0^T f'^2(\tau)\,d\tau-\alpha^2,$$

de donde se deduce la desigualdad

$$\frac{1}{\varepsilon}\|f\|^2_{L_2(0,T)}+\varepsilon\|f'\|_{L_2(0,T)}\geqslant 2\alpha^2-2\alpha f(t)+f^2(t)=$$
$$=\left(\sqrt{2}\alpha-\frac{1}{\sqrt{2}}f(t)\right)^2+\frac{f^2(t)}{2}\geqslant\frac{f^2(t)}{2}$$

que coincide con la desigualdad (49). El lema está demostrado.

Examinemos la desigualdad (48) para tales k que $|\lambda_k|\geqslant 1/T$; designemos con k_0 el valor mínimo de todos estos k (recordemos que la sucesión $|\lambda_k|$ es monótona no decreciente). Entonces, en virtud del lema 6, tenemos, para todo $k\geqslant k_0$

$$|f_k(t)|^2\leqslant 2|\lambda_k|\,\|f_k\|^2_{L_2(0,T)}+\frac{2}{|\lambda_k|}\|f'_k\|^2_{L_2(0,T)}.$$

Introduciendo la última desigualdad en (48), obtenemos para todo $t\in[0, T]$ y $k\geqslant k_0$

$$f'^2_k(t)\leqslant 3\lambda_k^2\varphi_k^2+\frac{15}{2}|\lambda_k|\,\|f_k\|^2_{L_2(0,T)}+\frac{6}{|\lambda_k|}\|f'_k\|^2_{L_2(0,T)}\leqslant$$
$$\leqslant 8\left(\lambda_k^2\varphi_k^2+|\lambda_k|\,\|f_k\|^2_{L_2(0,T)}+\frac{1}{|\lambda_k|}\|f'_k\|^2_{L_2(0,T)}\right). \qquad (50)$$

En virtud del teorema 3, p. 2, § 6, cap. III, lema 3, p. 5, § 2, cap. IV y de las desigualdades (47) y (50), para todo $t\in[0, T]$ y cualesquiera M y N, $k_0 \leqslant M < N$, tenemos

$$\|S_N - S_M\|^2_{C^2(\overline{D}_t)} + \left\|\frac{\partial}{\partial t}(S_N - S_M)\right\|^2_{C(\overline{D}_t)} \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \left(\|S_N - S_M\|^2_{H^{2s_0+1}(D_t)} + \left\|\frac{\partial}{\partial t}\left(S_N - S_M\right\|^2_{H^{2s_0-1}(D_t)}\right) \leqslant\right.$$

$$\leqslant C_2 \left(\left\|\sum_{h=M+1}^{N} U_h(t)\,\Delta^{s_0} v_h(x)\right\|^2_{H^1(D_t)} + \right.$$

$$\left. + \left\|\sum_{h=M+1}^{N} U'_h(t)\,\Delta^{s_0-1} v_h(x)\right\|^2_{H^1(D_t)}\right) \leqslant$$

$$\leqslant C_3 \sum_{h=M+1}^{N} \left(|\lambda_h|^{2s_0+1} U_h^2(t) + |\lambda_h|^{2s_0-1} U_h'^2(t)\right) \leqslant$$

$$\leqslant C_4 \sum_{h=M+1}^{N} (\varphi_h^2 |\lambda_h|^{2s_0+1} + \lambda_h^{2s_0} \|f_h\|^2_{L_2(0,\,T)} + \lambda_h^{2s_0-2} \|f'_h\|^2_{L_2(0,\,T)}).$$

Por consiguiente,

$$\|S_N - S_M\|^2_{C^{2,1}(\overline{Q}_T)} \leqslant$$

$$\leqslant C_5 \sum_{h=M+1}^{N} (\varphi_h^2 |\lambda_h|^{2s_0+1} + |\lambda_h|^{2s_0} \|f_h\|^2_{L_2(0,\,T)} + \lambda_h^{2s_0-2} \|f'_h\|^2_{L_2(0,\,T)}). \quad (51)$$

Por analogía, valiéndonos de (47′), obtenemos que para todo $t \in [0, T]$ y cualquier $N \geqslant 1$ son válidas las desigualdades

$$\|S_N\|^2_{C(\overline{D}_t)} \leqslant C_6 \|S_N\|^2_{H^{2s_0-1}(D_t)} \leqslant C_7 \left(U_1^2(t) + \sum_{h=1}^{N} |\lambda_h|^{2s_0-1} U_h^2(t)\right) \leqslant$$

$$\leqslant C_8 \left(\varphi_1^2 + \|f_1\|^2_{L_2(0,\,T)} + \sum_{h=1}^{N} (\varphi_h^2 |\lambda_h|^{2s_0-1} + \lambda_h^{2s_0-2} \|f_h\|^2_{L_2(0,\,T)}\right),$$

y, por lo tanto, las desigualdades

$$\|S_N\|^2_{C(\overline{Q}_T)} \leqslant C_9 \left(\varphi_1^2 + \|f_1\|^2_{L_2(0,\,T)} + \sum_{h=1}^{N} (\varphi_h^2 |\lambda_h|^{2s_0-1} + \right.$$

$$\left. + \lambda_h^{2s_0-2} \|f_h\|^2_{L_2(0,\,T)})\right). \quad (52)$$

Puesto que la función φ pertenece al espacio $H^{2s_0+1}_{\mathscr{D}}(D)$ (en el caso del primer problema mixto) o al espacio $H^{2s_0+1}_{\mathscr{N}}(D)$ (en el caso del segundo problema mixto), entonces la serie $\sum_{h=1}^{\infty} \varphi_h^2 |\lambda_h|^{2s_0+1}$

converge. Además, del hecho de que la función φ pertenece al espacio $H_{\mathscr{D}}^{2s_0-1}(D)$ o bien, respectivamente, a $H_{\mathscr{N}}^{2s_0-1}(D)$, se deduce (teorema 8, p. 5, § 2, cap. IV) que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^2 |\lambda_k|^{2s_0-1} \leqslant \text{const} \|\varphi\|^2_{H^{2s_0-1}(D)}. \tag{53}$$

Como $f \in \widetilde{H}_{\mathscr{D}}^{2s_0,\, s_0}(Q_T)$ y $f \in \widetilde{H}_{\mathscr{N}}^{2s_0,\, s_0}(Q_T)$ para los primero y segundo problemas mixtos, respectivamente, entonces, de acuerdo con el lema 5, convergen las series

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^{2s_0} \|f_k\|^2_{L_2(0,\,T)} \text{ y } \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^{2(s_0-1)} \|f_k'\|^2_{L_2(0,\,T)}.$$

Además, dado que la función f pertenece al espacio $\widetilde{H}_{\mathscr{D}}^{2(s_0-1),\, s_0-1}(Q_T)$ o bien, respectivamente, al espacio $\widetilde{H}_{\mathscr{N}}^{2(s_0-1),\, s_0-1}(Q_T)$ y de las desigualdades (42) del lema 5 tenemos

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^{2(s_0-1)} \|f_k\|^2_{L_2(0,\,T)} \leqslant \text{const} \|f\|^2_{H^{2(s_0-1),\, s_0-1}(Q_T)}. \tag{54}$$

Por eso, de las desigualdades (51) se infiere que la serie (24) converge en $C^{2,1}(\overline{Q}_T)$ y la suma $u(x, t)$ de la serie pertenece a $C^{2,1}(\overline{Q}_T)$ y, por tanto, es la solución clásica del problema mixto correspondiente. De las desigualdades (52)—(54) se deduce que nuestra acotación (46) es correcta. El teorema queda demostrado.

PROBLEMAS DEL CAPITULO VI.

1. Sea D un dominio acotado del espacio R_n, $n > 2$, y sea x^0 un punto de D. Supongamos que la función $u(x, t) \in C^{2,1}(\{x \in D \setminus x^0,\ 0 < t < T\})$, $T > 0$, satisface en $\{x \in D \setminus x^0, 0 < t < T\}$ una ecuación homogénea de la conducción de calor. Supongamos también que cuando $x \to x^0$, la función $u(x, t)$ $|x - x^0|^{n-2} \to 0$ uniformemente respecto a $t \in (0, T)$. Muéstrese que en este caso la función $u(x, t)$ puede ser complementariamente definida en el conjunto $\{x = x^0, 0 < t < T\}$ de una manera tal que la función obtenida pertenezca a $C^\infty(\{x \in D, 0 < t < T\})$.

2. Supongamos que la función $u(x, t)$ pertenece a $C^{2,1}(t > 0)$ y en el semiespacio $\{t > 0\}$ es la solución de una ecuación homogénea de la conducción de calor. Sea, además, que existe una función $A(x)$ tal que cualquiera que sea $R > 0$, la función $u(x, t) \to A(x)$ (para $t \to \infty$) uniformemente respecto de $x \in \{|x| < R\}$. Demuéstrese que la función $A(x)$ es armónica en R_n.

3. Supóngase que la función $\varphi(x)$ pertenece a $C(R_n)$ y que para todo $x \in R_n$ satisface la desigualdad $|\varphi(x)| \leqslant C^{e^{a|x|^2}}$, donde C y a son ciertas constantes positivas. Demuéstrese que en la banda $\left\{x \in R_n,\ 0 < t < \frac{1}{4a}\right\}$ existe

la solución $u(x, t)$ del problema de Cauchy

$$u_t - \Delta u = 0, \quad x \in R_n, \quad 0 < t < \frac{1}{4a}, \qquad (1)$$
$$u|_{t=0} = \varphi(x).$$

Esta solución se da mediante la fórmula de Poisson y pertenece a la clase de unicidad B_2.

Si la función $\varphi(x) \in C(R_n)$ y satisface la condición: para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $C = C(\varepsilon) > 0$ tal que

$$|\varphi(x)| < Ce^{\varepsilon |x|^2} \quad \text{para todo} \quad x \in R_n, \qquad (2)$$

entonces de los resultados del problema 3 se desprende que en el semiespacio $\{t > 0\}$ existe la solución del problema de Cauchy para la ecuación homogénea de la conducción de calor con una función inicial $\varphi(x)$, con la particularidad de que esta solución pertenece a la clase de unicidad B_2 y que se da por la fórmula de Poisson.

4. Supóngase que la función $\varphi(x) \in C(R_n)$ y que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe una constante $C = C(\varepsilon) > 0$ tal que se verifique (2). Designemos con $u(x, t)$ la solución del problema de Cauchy (de la clase B_2)

$$u_t - \Delta u = 0, \quad x \in R_n, \quad t > 0 \qquad (3)$$
$$u|_{t=0} = \varphi(x)$$

Demuéstrese la siguiente afirmación. Si existe una función $A(x)$ tal que con cualquier $R > 0$

$$\frac{n}{\sigma_n \rho^n} \int\limits_{|x-\xi|<\rho} u(\xi)\, d\xi \to A(x), \quad \text{cuando} \quad \rho \to \infty,$$

uniformemente respecto de $x \in \{|x| < R\}$ (σ_n es el área de la esfera unitaria en R_n), entonces uniformemente respecto a $x \in \{|x| < R\}$ (para cualquier $R > 0$) $\lim\limits_{t\to\infty} u(x, t) = A(x)$, siendo $A(x)$ una función armónica.

5. Sea $u(x, t)$ una solución (perteneciente a B_2) del problema de Cauchy (3), donde $\varphi(x) \in B(R_n)$ y sea $\lim\limits_{t\to\infty} u(0, t) = A$. Demuéstrese que en este caso para cualquier punto $x \in R_n$ $\lim\limits_{t\to\infty} u(x, t) = A$.

6. Muéstrese que la solución $u(x, t)$ del problema de Cauchy (3), donde $\varphi \in B(R_n)$, es una función analítica respecto de $(x, t)]$ en el semiespacio $\{x \in R_n, t > 0\}$.

7. Muéstrese que la solución clásica del primer problema mixto

$$u_t - \Delta u = 0, \quad (x, t) \in Q_T = \{D \times (0, T)\},$$
$$u|_{D_0} = \varphi(x)$$
$$u|_{\Gamma_T} = 0$$

es la solución generalizada de este problema, si $\partial D \in C^2$.

8. Demuéstrense los teoremas de existencia y unicidad de soluciones generalizadas del primero, segundo y tercero problemas mixtos para la ecuación parabólica (problemas (1)—(3) y (1), (2), (4) del p. 1, § 2) sin hacer suposiciones de que $a(x)$ y $\sigma(x)$ sean no negativas.

9. Supóngase que la función $u(x, t)$ pertenece a $C^{2,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q}_T)$, satisface en Q_T la ecuación homogénea de la conducción de calor ($u_t - \Delta u = 0$) y la

condición inicial homogénea ($u|_{D_0} = 0$, D_0 es la base inferior del cilindro Q_T). Demuéstrese que en este caso $u \in C^\infty(Q_T \cup D_0)$. Demuéstrese también que para cualquier punto (x, t) del cilindro $\{D' \times (0, T)\}$, donde $D' \Subset D_0$, $\rho = \inf\limits_{\substack{x' \in \partial D' \\ x'' \in \partial D_0}} |x' - x''| > 0$,

$$|D^\alpha u(x, t)| \leqslant C(\alpha, T) \frac{e^{-\frac{\rho^2}{8T}}}{\rho^{2\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n + 2}} \|u\|_{C(\bar{Q}_T)},$$

donde $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $D^\alpha u = \dfrac{\partial^{\alpha_0 + \ldots + \alpha_n} u}{\partial t^{\alpha_0} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$ y $C(\alpha, T)$ es una constante positiva dependiente sólo del vector α y del número T.

10. Supóngase que la función $\varphi \in B(R_n)$ y D_l, $l = 1, 2, \ldots$, es una sucesión de dominios del espacio R_n, $D_l \subset D_{l+1}$, $l = 1, \ldots$, $\bigcup\limits_{l=1}^{\infty} D_l = R_n$. Designemos por $u_l(x, t)$ la solución de la ecuación $u_t - \Delta u = 0$ en $D_l \times (0, T)$, continua en $\{\bar{D}_l \times [0, T]\}$ y que satisface la condición inicial $u_l|_{D_l} = \varphi$. Supóngase que $\|u_l\|_{C(\bar{D}_l \times [0, T])} \leqslant C$, donde la constante positiva C no depende de l. Entonces, uniformemente respecto de (x, t) de $\bar{D} \times [0, T]$, donde D es un dominio acotado arbitrario de R_n, la sucesión u_l, $l = 1, 2, \ldots$, converge hacia la solución (acotada) del problema de Cauchy en la faja $\{x \in R_n, 0 < t < T\}$ para la ecuación homogénea de conducción de calor con una función inicial φ. Demuéstrese esta afirmación.

LITERATURA ADICIONAL PARA EL CAPITULO VI

V. S. Vladímirov, Ecuaciones de la física matemática. «Naúka», 1971 (en ruso).

A. M. Iljin, A. S. Kaláshnikov, O. A. Oléinik, Ecuaciones lineales de segundo orden del tipo parabólico. УМН 17: 3 (1962), 3—146.

O. A. Ladyzhenskaya, Problemas de contorno de la física matemática, «Naúka», 1973 (en ruso).

O. A. Ladyzhenskaya, V. A. Solonnikov, N. N. Uráltseva, Ecuaciones lineales y quazilineales del tipo parabólico, «Naúka», 1967 (en ruso).

V. P. Mijailov, Sobre el problema de Dirichlet para una ecuación parabólica, 1. Compendio matemático 61: 1 (1963), 40—64; 2. Compendio matemático. 62: 2 (1963), 140—159 (en ruso).

I. G. Petrovski, Conferencias sobre las ecuaciones en derivadas parciales, Fismatgiz, 1961 (en ruso).

I. G. Petrovski Zur ersten Randwertaufgabe der Wärmeleitungsgleichung, Compos. mathem. 1 (1935), 389—419.

S. L. Sóbolev. Ecuaciones de la física matemática, Fismatgiz, 1954 (en ruso).

A. N. Tijonov, Théorèmes d'unicité pour l'équation de la chaleur, Compendio matemático 42 (1935), 199—216.

A. N. Tijonov, A. A. Samarski, Ecuaciones de la física matemática. Editorial Mir.

A NUESTROS LECTORES:

«Mir» edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés, árabe y otros idiomas extranjeros. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica: manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas; literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia-ficción.

Dirijan sus opiniones a la Editorial «Mir», 1 Rizhski per., 2, 129820, Moscú, I-110, GSP, URSS.

ECUACIONES DE LA FÍSICA MITEMÁTICA

DE GODUNOV S.

Este libro, escrito por Serguei Godunov, Doctor en Ciencias Fisicomatemáticas, contiene el curso completo de conferencias dictadas por él en las universidades de Moscú y Novosibirsk.

La original selección del material se debe a que el autor durante muchos años estuvo dedicado al estudio de la aplicación de las ecuaciones diferenciales a la mecánica del medio continuo. Ha elaborado diferentes métodos numéricos destinados a resolver estas ecuaciones.

El autor recopiló un material que ha llegado a ser clásico para los especialistas, aunque no se encuentra con frecuencia en los libros de texto ni en las monografías accesibles a un amplio círculo de lectores.

Este texto presenta interés tanto para los que estudian el curso de ecuaciones de la física matemática, como para los que se especializan en la rama de la aplicación de los métodos numéricos en la resolución de estas ecuaciones.

CURSO DE ÁLGEBRA SUPERIOR

DE KUROSH A.

El profesor Alejandro Kurosh fue doctor en Ciencias Fisicomatemáticas, catedrático, jefe de la Cátedra de Algebra Superior de la Universidad de Moscú. Sus trabajos de investigación en la rama del álgebra superior representan una aportación considerable a la matemática moderna.

Kurosh es autor de una serie de libros como «Teoría de los grupos», «Lecciones de álgebra superior», etc. Casi todos los trabajos publicados por el profesor Kurosh están traducidos a otros idiomas. En este libro se expone el curso de álgebra superior, que representa una de las disciplinas fundamentales de la matemática moderna. El curso de álgebra superior consta, en lo primordial, de dos partes. Una de ellas —el álgebra lineal— está dedicada al estudio de las ecuaciones lineales, es decir, de las ecuaciones del primer grado. La segunda parte —el álgebra de los polinomios— está dedicada al estudio de la ecuación con una incógnita, pero de grado superior.

El material del libro se expone de una manera clara y a un elevado nivel científico. Para ayudar a asimilar mejor los conceptos matemáticos, al final de cada capítulo se dan ejemplos y problemas con resoluciones detalladas.